



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com



Géométrie algébrique

Fibre de Milnor motivique à l'infini

A motivic Milnor fiber at infinity

Michel Raibaut

Laboratoire J.A. Dieudonné, UMR CNRS 6621, université de Nice-Sophia Antipolis, parc Valrose, 06108 Nice cedex 2, France

I N F O A R T I C L E

*Historique de l'article :*Reçu le 1^{er} décembre 2009

Accepté le 8 janvier 2010

Présenté par Christophe Soulé

R É S U M É

Pour une application régulière $f : U \rightarrow \mathbb{A}^1$ à source lisse, nous définissons une fibre de Milnor motivique à l'infini et nous la calculons dans le cas d'un polynôme de Laurent non dégénéré pour son polyèdre de Newton à l'infini.

© 2010 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

A B S T R A C T

Given a regular map $f : U \rightarrow \mathbb{A}^1$ on a smooth variety U we define a motivic Milnor fiber at infinity and we compute it in the case of a non-degenerate Laurent polynomial for its Newton polyhedra at infinity.

© 2010 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

Soit U une variété complexe lisse et $f : U \rightarrow \mathbb{A}^1$ une application régulière non constante. Il existe un réel positif R tel que $f : U \setminus f^{-1}(\overline{D}(0, R)) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, R)$ est une fibration topologique localement triviale [12]. Les espaces de cohomologie à support compact $H_c^*(f^{-1}(t), \mathbb{Q})$ de la fibre en t sont munis d'une structure de Hodge mixte. Steenbrink et Zucker puis M. Saito ont montré comment construire une structure de Hodge mixte limite lorsque t tend vers l'infini. Sabbah [13] l'a retrouvée en considérant la transformation de Fourier sur des modules convenables sur l'anneau des opérateurs différentiels. Le spectre de cette structure limite est un invariant de f appelé **spectre à l'infini** ([13] (5.4), [3] et [10]).

Pour un morphisme $f : X \rightarrow \mathbb{A}_\mathbb{C}^1$ avec X lisse et $x \in f^{-1}(0)$, Denef et Loeser [1,2] obtiennent le spectre de Hodge–Steenbrink de f en x à partir de la fibre de Milnor motivique $S_{f,x}$. Guibert, Loeser et Merle [6] généralisent $S_{f,x}$ en construisant une fibre de Milnor motivique $S_{f,U}$ adaptée à un ouvert U de X . Ainsi, en regardant la variété U comme ouvert dans une compactification, nous reconsidérons le problème initial du point de vue motivique et définissons un **fibre de Milnor motivique à l'infini** $S_{f,\infty}$. C'est un invariant appartenant à $\mathcal{M}_{\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$ (anneau de Grothendieck des variétés au dessus de \mathbb{G}_m munies d'une action de \mathbb{G}_m [6,5]). Il ne dépend pas de la compactification choisie (Théorème 2.2). Dans le groupe de Grothendieck $K_0(SH^{mon})$ des structures de Hodge munies d'un automorphisme d'ordre fini, il se réalise en la classe de la structure de Hodge mixte à l'infini de f (Théorème 3.1). Il donne ainsi accès au spectre à l'infini de f (Théorème 3.2). Nous le calculons pour un polynôme de Laurent non dégénéré pour son polyèdre de Newton à l'infini (Théorème 4.1).

Adresse e-mail : raibaut@unice.fr.

2. Fibre de Milnor motivique à l'infini

Pour les définitions usuelles des anneaux de Grothendieck, des espaces d'arcs et de la mesure motivique μ , on pourra se référer à [1,6] et [5]. On appelle variété tout \mathbb{C} -schéma séparé réduit de type fini sur \mathbb{C} . Nous considérons dans la suite une variété lisse U , une fonction régulière $f : U \rightarrow \mathbb{A}^1$, l'ouvert $U^* = U \setminus f^{-1}(0)$ et l'immersion $j : \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, $a \mapsto [1 : a]$.

Définition 2.1. On appelle **compactification de f** tout triplet $(X, i_X : U \rightarrow X, f_X : X \rightarrow \mathbb{P}^1)$ où X est une variété, i_X est une immersion ouverte dominante, f_X est une application propre et $f_X \circ i_X = j \circ f$.

Soit (X, i, \hat{f}) une compactification de f , notons F le fermé $X \setminus i(U^*)$, \hat{f} la fonction $[\hat{f}_{(0)} : \hat{f}_{(1)}]$ et $\hat{f}^{(\infty)}$ la fonction $\frac{\hat{f}_{(0)}}{\hat{f}_{(1)}}$ définie sur $X \setminus X_0$ où X_0 et X_{∞} sont les variétés $\hat{f}_{(1)}^{-1}(0)$ et $\hat{f}_{(0)}^{-1}(0)$. Nous travaillons dans l'anneau de Grothendieck $\mathcal{M}_{X_{\infty} \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$ ((2.2) [6] et (2.2) [5]) des variétés $(V \xrightarrow{(p_X, p_{\mathbb{G}_m})} X_{\infty} \times \mathbb{G}_m, \sigma)$ où σ est une bonne action sur V du groupe multiplicatif \mathbb{G}_m , p_X est un morphisme à fibres \mathbb{G}_m -invariantes et $p_{\mathbb{G}_m}$ est un morphisme homogène pour l'action σ .

Pour $(n, \delta) \in \mathbb{N}^{*2}$ on pose $X_n^{\delta} := \{\varphi \in \mathcal{L}(X \setminus X_0) \mid \text{ord}_t \hat{f}^{(\infty)}(\varphi) = n, \text{ord}_t \varphi^*(\mathcal{I}_F) \leq \delta n\}$. C'est une partie semi-algébrique de l'espace des arcs $\mathcal{L}(X)$ de X munie de l'action usuelle de \mathbb{G}_m sur les arcs $\lambda. \varphi(t) = \varphi(\lambda t)$ et du morphisme $\varphi \mapsto (\varphi(0), ac(\hat{f}^{(\infty)}(\varphi)))$ vers $X_{\infty} \times \mathbb{G}_m$, où $ac(\hat{f}^{(\infty)}(\varphi))$ est le premier coefficient non nul de la série $\hat{f}^{(\infty)}(\varphi(t))$. Considérons alors la fonction zêta motivique $Z_{\hat{f}^{(\infty)}, i(U^*)}^{\delta}(T)$ ((3.7) [6]), c'est la série génératrice de la suite des mesures motiviques $\mu(X_n^{\delta})$ définie par

$$Z_{\hat{f}^{(\infty)}, i(U^*)}^{\delta}(T) := \sum_{n \geq 1} \mu(X_n^{\delta}) T^n \in \mathcal{M}_{X_{\infty} \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}[[T]].$$

Si la compactification est lisse alors cette fonction zêta est rationnelle et $S_{\hat{f}^{(\infty)}, i(U^*)} := -\lim_{T \rightarrow \infty} Z_{\hat{f}^{(\infty)}, i(U^*)}^{\delta}(T)$ élément de $\mathcal{M}_{X_{\infty} \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$ ne dépend pas de δ pour δ assez grand ((3.8) [6]). Si la compactification est singulière, le lieu singulier est alors contenu dans le fermé $X \setminus i(U)$. La même preuve fonctionne et le résultat est inchangé. Pour une variété S , notons $p_S! : \mathcal{M}_{S \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m} \rightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$, $(V \xrightarrow{p, q} S \times \mathbb{G}_m, \sigma) \mapsto (V \xrightarrow{q} \mathbb{G}_m, \sigma)$. Ainsi,

Théorème 2.2. Soit (X, i_X, f_X) et (Y, i_Y, f_Y) deux compactifications de f . On a

$$p_{X_{\infty}}! S_{f_X^{(\infty)}, i_X(U^*)} = p_{Y_{\infty}}! S_{f_Y^{(\infty)}, i_Y(U^*)} \in \mathcal{M}_{\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}.$$

On note cette valeur $S_{f, \infty} \in \mathcal{M}_{\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$ et on l'appelle **fibre de Milnor motivique à l'infini de f** au sens de [1,6]. C'est un nouvel invariant de f que l'on peut tenter de calculer à partir de n'importe quelle compactification lisse ou non de f .

Remarque. Signalons les deux articles [8] et [9] où les auteurs considèrent également une fibre de Milnor motivique à l'infini, définie en termes de résolutions et sans considérer d'espaces d'arcs. Toute fois ils ne montrent pas qu'elle est indépendante de la compactification choisie.

3. Lien avec la structure de Hodge mixte limite

Soit (X, i, \hat{f}) une compactification de f . Par le théorème (3.9) [6], il existe un unique morphisme de $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -modules $S_{\hat{f}^{\infty}} : \mathcal{M}_{X \setminus X_0} \rightarrow \mathcal{M}_{X_{\infty} \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m}$ tel que pour tout morphisme propre $p : Z \rightarrow X \setminus X_0$ avec Z lisse et pour tout ouvert dense V de Z , $S_{\hat{f}^{\infty}}([V \rightarrow X \setminus X_0])$ vaut $p!(S_{\hat{f}^{\infty} \circ p, V})$. On note $MHM_{X \setminus X_0}$ la catégorie abélienne des modules de Hodge mixtes sur $X \setminus X_0$, $K_0(MHM_{X \setminus X_0})$ l'anneau de Grothendieck correspondant vu comme $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -module et $\Psi_{\hat{f}^{\infty}}$ le foncteur cycles proches [14]. Par additivité il existe un unique morphisme $\mathcal{M}_{\mathbb{C}}$ -linéaire $H : \mathcal{M}_{X \setminus X_0} \rightarrow K_0(MHM_{X \setminus X_0})$ tel que pour tout $p : Z \rightarrow X \setminus X_0$ avec Z lisse, $H([p : Z \rightarrow X \setminus X_0])$ est la classe $[Rp_!(\mathbf{Q}_Z)]$ où \mathbf{Q}_Z est le module de Hodge trivial sur Z (Lemme 14.61 [11]). On construit de même un morphisme $H : \mathcal{M}_{X_{\infty} \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m} \rightarrow K_0(MHM_{X_{\infty}}^{mon})$ ((3.16) [6]) compatible avec l'action de \mathbb{G}_m et la monodromie. En appliquant (3.17) [6] et la compatibilité des modules de Hodge mixtes avec l'image directe $p : X_{\infty} \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{C})$ on a avec les notations ci dessus :

Théorème 3.1. Pour une compactification (X, i, \hat{f}) le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{CD} \mathcal{M}_{X \setminus X_0} @>S_{\hat{f}^{\infty}}>> \mathcal{M}_{X_{\infty} \times \mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m} @>p!>> \mathcal{M}_{\mathbb{G}_m}^{\mathbb{G}_m} \\ @VHVV @VHVV @VHVV \\ K_0(MHM_{X \setminus X_0}) @>\Psi_{\hat{f}^{\infty}}>> K_0(MHM_{X_{\infty}}^{mon}) @>p!>> K_0(MHM_{\text{Spec}(\mathbb{C})}^{mon}) \end{CD}$$

En particulier $H(S_{f,\infty}) = p_!(\Psi_{\hat{f}_\infty}(Ri_!\mathbf{Q}_U))$.

La structure de Hodge mixte limite sur $H_c^k(f^{-1}(t), \mathbb{Q})$ s'identifie [13] à la structure de Hodge mixte du groupe $\mathbb{H}_c^k(\hat{f}^{-1}(\infty), \psi_{1/f}(Ri_!\mathbb{Q}_U))$. On obtient ce groupe d'hypercohomologie en prenant le faisceau pervers sous jacent de $p_!(\Psi_{\hat{f}_\infty}(Ri_!\mathbf{Q}_U)) \in D^b(MHM_{Spec\mathbb{C}}^{mon})$ ((14.1.1) [11] et [14]). Notons Φ le morphisme $K_0(MHM_{Spec\mathbb{C}}^{mon}) \rightarrow K_0(SH^{mon})$ ((6.1) [6] et (14.1.1) [11]). Par définition (3.12) [1] la classe de la structure de Hodge mixte limite est $\sum_k (-1)^k [\mathbb{H}_c^k(\hat{f}^{-1}(\infty), \psi_{1/f}(Ri_!\mathbb{Q}_U))]$. Elle est égale à $\Phi(p_!(\Psi_{\hat{f}_\infty}(Ri_!\mathbf{Q}_U)))$, elle même égale à $\Phi(H(S_{f,\infty}))$ par Théorème 3.1. Le spectre à l'infini est le spectre de la classe de la structure de Hodge mixte limite donné par le spectre de Hodge $sph : K_0(SH^{mon}) \rightarrow \mathbb{Z}[\mathbb{Q}]$ ((6.1.4) [6]). Ainsi,

Théorème 3.2. *Pour un morphisme non constant $f : U \rightarrow \mathbb{A}^1$ avec U lisse, la classe de la structure de Hodge mixte limite à l'infini est $\Phi(H(S_{f,\infty}))$ et son spectre à l'infini vaut $Sp(S_{f,\infty})$ où $Sp = sph \circ \Phi \circ H$.*

4. Calcul dans le cas d'un polynôme de Laurent non dégénéré

Soit $f(\underline{x}) := \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} a_\alpha \underline{x}^\alpha \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d][x_1^{-1}, \dots, x_d^{-1}]$, son support $\text{supp}(f)$ est l'ensemble $\{\alpha \in \mathbb{N}^d \mid a_\alpha \neq 0\}$ et son polyèdre de Newton à l'infini Γ_- est l'enveloppe convexe de $\text{supp}(f) \cup \{0\}$. On note Γ les faces de Γ_- ne contenant pas l'origine. Pour toute face γ de Γ_- , on note $f_\gamma(\underline{x})$ le polynôme quasi-homogène $\sum_{\alpha \in \gamma} a_\alpha \underline{x}^\alpha$. Au sens de Kouchnirenko [7], supposons que f est **non dégénéré pour son polyèdre de Newton à l'infini** : pour toute face γ de Γ , le polynôme f_γ est lisse sur \mathbb{G}_m^d .

Dans $\mathbb{P}^d \times \mathbb{P}^1$, on choisit la compactification $X = \{([\underline{x}], [\alpha : \beta]) \mid \alpha \tilde{P}(\underline{x})x_0^{\deg(Q)} = \beta x_0^{\deg(P)} Q(\underline{x})\}$, avec $\hat{f} : X \rightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, $([\underline{x}], [\alpha : \beta]) \mapsto [\alpha : \beta]$ et $i : \mathbb{A}^d_{\mathbb{C}} \rightarrow X$, $x \mapsto ([1 : x], [f(x), 1])$ où $f = \frac{P}{Q}$ avec Q monomial, P et Q premiers entre eux et \tilde{P} l'homogénéisé de P . Comme dans [4], on prouve la rationalité de $Z_{\hat{f}_\infty, i(U^*)}^\delta(T)$ sans recours au théorème de résolution des singularités d'Hironaka. Dans l'espace affine $U^* = \mathbb{G}_m^d \setminus f^{-1}(0)$, on utilise des arcs de Laurent $\varphi = (\frac{P_i(t)}{t^{\omega_i}})$ dont l'origine appartient à X_∞ et vérifiant la condition au bord $\text{ord}_t \varphi^*(\mathcal{I}_F) \leq \delta \text{ord}_t \hat{f}^\infty \varphi$. Pour ces arcs, $P_i(t)$ est une série formelle inversible et (ω_i) appartient à $\Omega = \{\omega \in \mathbb{Z}^d \mid \max((\omega \mid \cdot)_{|\Gamma_-}) > 0\}$. Pour chaque arc, on note $\gamma(\omega)$ la face de Γ_- où la forme linéaire $(\omega \mid \cdot)_{|\Gamma_-}$ atteint son maximum. Cette face ne contient pas 0. Les arcs sont donc classés par les faces de Γ et pour toute face $\gamma \in \Gamma$ on note $C_\gamma := \{\omega \in \Omega \mid \gamma(\omega) = \gamma\}$. La non dégénérescence de f correspond à la lissité des f_γ et permet de mesurer les espaces d'arcs. On obtient alors,

Théorème 4.1. *Soit $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d][x_1^{-1}, \dots, x_d^{-1}]$ non dégénéré pour son polyèdre de Newton Γ . La fibre de Milnor motivique à l'infini de $f : \mathbb{G}_m^d \rightarrow \mathbb{A}^1$ vaut*

$$S_{f,\infty} = - \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi(C_\gamma) [\mathbb{G}_m^d \setminus f_\gamma^{-1}(0), f_\gamma^{-1}, \sigma(\gamma)]$$

où χ est la caractéristique d'Euler à support compact et $\sigma(\gamma)$ est une action de \mathbb{G}_m sur $\mathbb{G}_m^d \setminus f_\gamma^{-1}(0)$ de la forme $\sigma(\gamma)(\lambda, x) = (\lambda^{-\omega_i} x_i)$ avec $\omega \in C_\gamma$. La classe $[\mathbb{G}_m^d \setminus f_\gamma^{-1}(0), f_\gamma^{-1}, \sigma(\gamma)]$ ne dépend pas de ω .

Si de plus le polynôme est commode (0 est contenu dans l'intérieur du polyèdre de Newton Γ_-) alors $\chi(C_\gamma)$ est nulle pour toute face γ contenue dans un hyperplan de coordonnées et vaut $(-1)^{d-\dim(\gamma)}$ sinon.

Par Théorème 3.2, le spectre à l'infini de f vaut $: sp(f) = - \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi(C_\gamma) Sp[f_\gamma^{-1}(1), \mu_\gamma]$ où $(f_\gamma^{-1}(1), \mu_\gamma)$ est la variété $f_\gamma^{-1}(1)$ munie de l'action de induite par $\sigma(\gamma)$.

Pour $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d]$ non dégénéré pour son polyèdre de Newton on obtient une formule similaire. Pour cela, comme dans [5], on stratifie \mathbb{A}^d en produit de tores et on utilise l'additivité de la fibre de Milnor motivique ((3.9) [6]). On applique alors le Théorème 4.1 à la restriction de f à chaque strate.

Références

- [1] J. Denef, F. Loeser, Geometry on arc spaces of algebraic varieties, in: European Congress of Mathematics, vol. I, Barcelona, 2000, in: Progr. Math., vol. 201, Birkhäuser, 2001, pp. 327–348.
- [2] J. Denef, F. Loeser, Motivic Igusa zeta functions, J. Algebraic Geom. 7 (1998) 505–537.
- [3] R. García López, A. Némethi, Hodge numbers attached to a polynomial map, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 49 (1999) 1547–1579.
- [4] G. Guibert, Espaces d'arcs et invariants d'Alexander, Comment. Math. Helv. 77 (2002) 783–820.
- [5] G. Guibert, F. Loeser, M. Merle, Nearby cycles and composition with a nondegenerate polynomial, Internat. Math. Res. Notices 31 (2005) 1873–1888.
- [6] G. Guibert, F. Loeser, M. Merle, Iterated vanishing cycles, convolution, and a motivic analogue of a conjecture of Steenbrink, Duke Math. J. 132 (2006) 409–457.
- [7] A.G. Kouchnirenko, Polyèdres de Newton et nombres de Milnor, Invent. Math. 32 (1976) 1–31.
- [8] Y. Matsui, K. Takeuchi, Monodromy zeta functions at infinity, Newton polyhedra and constructible sheaves, arXiv:0809.3149v7.
- [9] Y. Matsui, K. Takeuchi, Monodromy at infinity of polynomial map and mixed Hodge modules, arXiv:0912.5144v5.
- [10] A. Némethi, C. Sabbah, Semicontinuity of the spectrum at infinity, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 69 (1999) 25–35.

- [11] C.A. Peters, J.H.M. Steenbrink, *Mixed Hodge Structures*, Springer-Verlag, 2008.
- [12] F. Pham, Vanishing homologies and the n variable saddlepoint method, in: *Proc. Symp. Pure Math.*, vol. 40, 1983, pp. 319–333.
- [13] C. Sabbah, Monodromy at infinity and Fourier transform, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 33 (1997) 643–685.
- [14] M. Saito, Mixed Hodge modules, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 26 (1990) 221–333.