C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 348 (2010) 217–221

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Analyse numérique

Éléments finis mixtes minimaux sur les polyèdres ☆

Minimal mixed finite elements on polyhedra

Snorre H. Christiansen

CMA, University of Oslo, PO Box 1053 Blindern, NO-0316 Oslo, Norway

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 1er juillet 2009
Accepté après révision le 18 janvier 2010
Disponible sur Internet le 19 février 2010

Présenté par Philippe G. Ciarlet

RÉSUMÉ

Étant donné un complexe cellulaire constitué de polytopes, plongé dans un espace Euclidien, nous construisons des espaces d'éléments finis de formes différentielles, conformes par rapport à la dérivée extérieure, contenant celles qui sont polynomiales de degré maximal donné, ayant localement la propriété de suite exacte et d'extension, de telle sorte que parmi tous les espaces ayant ces propriétés, ils ont la plus petite dimension. Plus généralement nous construisons, pour tout système d'éléments finis inclus dans un système d'éléments finis compatible, un système d'éléments finis compatible intermédiaire et de dimension minimale.

ABSTRACT

Given a cellular complex consisting of polytopes, embedded in a Euclidean space, we construct finite element spaces of differential forms, conforming with respect to the exterior derivative, containing those that are polynomial of given maximal degree, having locally the property of exact sequence and extension, so that among all spaces having these properties they have the smallest dimension. More generally we construct, for any finite element system included in a compatible finite element system, an intermediate compatible finite element system of minimal dimension.
© 2010 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

Consider a bounded domain S in $\mathbb{R}^n$ equipped with a cellular complex $\mathcal{T}$ where each cell $T \in \mathcal{T}$ is a polytope. We wish to construct good finite element spaces of differential forms on S which are conforming with respect to the exterior derivative and contain all those that are polynomial of given maximal degree p on the n-cells. Moreover we want the dimension to be minimal under these constraints. In dimension $n = 3$ this corresponds to mixed finite elements for the grad, curl and div operators. Working with cellular complexes provides greater flexibility than canonical shapes: duals of a cellular complex are cellular, the product of cellular complexes is again cellular and they can easily adapt to complicated geometries be it at the boundary of S or interior interfaces (where material parameters may jump for instance). Another

☆ This work, conducted as part of the award "Numerical analysis and simulations of geometric wave equations" made under the European Heads of Research Councils and European Science Foundation EURYI (European Young Investigator) Awards scheme, was supported by funds from the Participating Organizations of EURYI and the EC Sixth Framework Program.

Adresse e-mail : snorrec@math.uio.no.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2010.01.017

application is that cells can be agglomerated to constitute a coarser cellular complex and applying this idea recursively yields a multiresolution analysis – provided we can construct spaces naturally attached to each level of refinement.

For cellular complexes such as $\mathcal{T}$ we introduce, following [2] and [3], a notion of finite element system (FES), whereby spaces $A^k(T)$ of k-forms on T are specified for all degrees k and cells $T \in \mathcal{T}$ (of all dimensions), subject to stability under the exterior derivative and restriction by pullback to subcells. We introduce two more conditions, one concerning extension of forms from the boundary of a cell to its interior and the other stating exactness of the sequences (3) on the cells. The dimension of the global space can then be estimated by a local computation (Proposition 1.1). The conditions also guarantee correctness of global topological properties of the associated Galerkin spaces (Proposition 1.2). They guarantee that local degrees of freedom (DOF) can be defined even though they are not explicitly present in the notion of FES. Importantly the associated interpolation operators commute with the exterior derivative (Proposition 1.5). The FES that satisfy these properties are called *compatible*. When they contain polynomials of degree p on each cell they will yield approximation of order $(p'+1)$ in norms $\mathrm{W}^{p'+1,q}(S) \to \mathrm{L}^q(S)$ for $0 \leqslant p' \leqslant p$ at least when certain mild non-degeneracy conditions are satisfied.

The differential forms of polynomial degree at most p, restricted to each cell of $\mathcal{T}$, constitute a FES denoted A. Choosing a simplicial refinement of $\mathcal{T}$, there are well known compatible FES on this refinement that contain A. Choose one and interpret it as a compatible FES on $\mathcal{T}$ denoted B. More generally, given any FES A included in a compatible FES B we construct a compatible FES $\tilde{A}$ such that for all k and T, we have $A^k(T) \subseteq \tilde{A}^k(T) \subseteq B^k(T)$, and which is minimal with these properties. In fact we obtain a compatible FES containing A which has the smallest possible dimension (independently of B).

A central notion is that of discrete harmonic extension. The above mentioned interpolation also makes use of properties it satisfies (e.g. Proposition 1.4) and will therefore be called *harmonic* (it is a mild generalization of the projection based interpolation of Demkowicz et al.). Under the above non-degeneracy conditions, combining harmonic interpolation with a smoothening operator as in [4] yields L^q-stable commuting projections that guarantee for instance that the eigenvalue problem for $\mathrm{d}^\star\mathrm{d}$ is convergent.

The construction of $\tilde{A}^k(T)$ is done in two steps. First we enrich $A^k(T)$ by adding the spaces $E^k(T)$ defined by (9) and (10). They are minimal with the property that the sequences (5) become exact. Second we ensure that the extension property holds by adding discrete harmonic extensions constructed by Propositions 1.4 and 2.2, starting with cells of dimension 1 and increasing dimension inductively. Sequence exactness without the homogeneous boundary condition is then ensured by Proposition 1.3.

The construction shows that Nédélec's first family of mixed finite elements of degree $p+1$ on simplicial complexes is minimal among the compatible FES that contain polynomials of degree at most p. On general cellular complexes the dimension of the new spaces is given by that of a certain cohomology group, see Eq. (12). The gain in dimension from B to $\tilde{A}$ is significant even for $p=0$, while orders of convergence are maintained for h-version refinement. We also believe the FES framework to be advantageous for the so-called hp-setting and tensor product constructions with mixed orders (see [3, §3.3]).

Another application is the construction, for irregular hexahedral meshes, of div-conforming mixed finite elements containing the piecewise constants and with exactly 4 DOF per face of the mesh. The corresponding curl-conforming space also contains the constants and has 1 DOF per edge and 4 per face. This should have applications to multipoint flux approximation methods (collaboration with Jan Martin Nordbotten).

1. Cadre

Soit S un espace métrique compact. Une partie fermée T de S sera appellée cellule de dimension l lorsqu'il existe une bijection bi-Lipschitzienne de T sur la boule unité fermée $\mathbb{B}^l$ de $\mathbb{R}^l$. Le bord ∂T de T est alors par définition l'image réciproque de la sphère $\mathbb{S}^{l-1}$, et l'intérieur de T est $T \setminus \partial T$. La dimension est bien définie, et le bord ne dépend pas du choix de la bijection.

Un complexe cellulaire sur S est un ensemble fini $\mathcal{T}$ de cellules dans S tel que :

- La réunion de $\mathcal{T}$ est S, et S porte la topologie induite.
- Deux cellules distinctes ont des intérieurs disjoints.
- La frontière de toute cellule est réunion de cellules.

La partie de $\mathcal{T}$ constituée des cellules de dimension l sera notée $\mathcal{T}^l$. On note $\mathcal{T}^{(l)} = \mathcal{T}^0 \cup \cdots \cup \mathcal{T}^l$ le l-squelette de $\mathcal{T}$.

Lorsque S est une variété Lipschitzienne on note $X^k(S)$ l'espace des k-formes différentielles (FDs) sur S qui sont $\mathrm{L}^2(S)$ à dérivée extérieure $\mathrm{L}^2(S)$. Nous nous intéressons à la construction de sous-espaces de $X^k(S)$ étant donné un complexe cellulaire $\mathcal{T}$ sur S. Suivant [2,3] un système d'éléments finis (SEF) sur $\mathcal{T}$ est la donnée pour chaque entier naturel k et chaque $T \in \mathcal{T}$, d'un sous-espace $A^k(T)$ de $X^k(T)$, de telle sorte que les deux propriétés suivantes soient satisfaites :

- La dérivée extérieure induit des applications $\mathrm{d} : A^k(T) \to A^{k+1}(T)$.
- Si $T' \subseteq T$ avec inclusion i, le retrotransport (« pullback ») induit une application $i^\star : A^k(T) \to A^k(T')$. Pour $u \in A^k(T)$ on notera $i^\star u = u|_{T'}$.

La trace sera dans la suite toujours entendue au sens du retrotransport par l'application inclusion.

Dans ces conditions nous notons, pour tout complexe cellulaire $\mathcal{T}'$ inclus dans $\mathcal{T}$:

$$A^k(\mathcal{T}') = \{u = (u_T)_{T\in\mathcal{T}}\colon \forall T, T' \in \mathcal{T},\ u_T \in A^k(T) \text{ et } T' \subseteq T \Rightarrow u_T|_{T'} = u_{T'}\}. \tag{1}$$

Le plus grand SEF que nous envisageons est (bien) défini par :

$$\tilde{X}^k(T) = \{u \in X^k(T)\colon \forall T' \in \mathcal{T},\ T' \subseteq T \Rightarrow u|_{T'} \in X^k(T') \text{ et } \mathrm{d}u|_{T'} \in X^{k+1}(T')\}. \tag{2}$$

On note que $A^\bullet(\mathcal{T})$ peut être identifié à un sous-complexe de $\tilde{X}^\bullet(\mathcal{T})$, lui-même un sous-complexe de $X^\bullet(S)$. En ce sens il s'agit d'éléments finis conformes par rapport à la dérivée extérieure, et notre but est d'en construire qui soient de dimension finie aussi petite que possible, sous certaines contraintes.

Nous dirons qu'un SEF A est *compatible* lorsque les deux conditions suivantes sont remplies :

– *Suite exacte*. Pour tout $T \in \mathcal{T}$, la suite suivante est exacte :

$$0 \to \mathbb{R} \to A^0(T) \to A^1(T) \to \cdots \to A^{\dim T}(T) \to 0. \tag{3}$$

La deuxième flèche associe à un réel, la fonction sur T prenant cette valeur uniquement.

– *Extension*. Pour tout $T \in \mathcal{T}$ et tout $u \in A^k(\partial T)$, il existe un $v \in A^k(T)$ dont la trace sur ∂T est u.

On note $A_0^k(T)$ le sous-espace de $A^k(T)$ constitué des éléments ayant une trace nulle sur le bord.

Pour la démonstration des cinq propositions suivantes on pourra consulter [3]. On y suppose que tous les espaces $A^k(T)$ sont de dimension finie.

Proposition 1.1. *Pour tout SEF A on a* :

$$\dim A^k(\mathcal{T}) \leqslant \sum_{T\in\mathcal{T}} \dim A_0^k(T), \tag{4}$$

avec égalité lorsque la propriété d'extension est satisfaite.

Proposition 1.2. *Pour tout SEF compatible A, les groupes de cohomologie satisfont* $\dim \mathrm{H}^k(A^\bullet(\mathcal{T})) = \dim \mathrm{H}^k(X^\bullet(S))$ *pour tout k.*

Proposition 1.3. *Pour tout SEF A ayant la propriété d'extension, la propriété de suite exacte* (3) *est équivalente à la suivante* (*avec condition au bord homogène*) :

– *Pour toute cellule T, la suite suivante est exacte* :

$$0 \to A_0^0(T) \to A_0^1(T) \to \cdots \to A^{\dim T}(T) \to \mathbb{R} \to 0. \tag{5}$$

L'avant dernière flèche est l'intégration.

Proposition 1.4. *Soit un SEF A dont chaque espace $A^k(T)$ est muni d'un produit scalaire noté a. On suppose que T est une cellule telle que* (5) *est exacte. Pour chaque $\alpha \in \mathbb{R}$ il existe un unique élément u de $A^{\dim T}(T)$ tel que* :

$$\int_T u = \alpha \quad \textit{et} \quad \forall v \in A_0^{\dim T - 1}(T), \quad a(u, \mathrm{d}v) = 0. \tag{6}$$

Fixons $k < \dim T$. Tout $u \in A^k(\partial T)$ admettant une extension, admet une unique extension $u \in A^k(T)$ telle que :

$$\forall v \in A_0^k(T), \quad a(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v) = 0 \quad \textit{et} \quad \forall v \in A_0^{k-1}(T), \quad a(u, \mathrm{d}v) = 0. \tag{7}$$

Un élément u de $A^k(T)$ satisfaisant (7) sera dit harmonique. La proposition affirme donc l'existence et l'unicité d'une extension harmonique lorsqu'une extension existe. Si l'on a le choix entre plusieurs SEFs on parlera d'extension A-harmonique. L'orthogonalité pour a sera notée $\perp$, de sorte que (7) s'écrit aussi :

$$\mathrm{d}u \perp \mathrm{d}A_0^k(T) \quad \text{et} \quad u \perp \mathrm{d}A_0^{k-1}(T). \tag{8}$$

Proposition 1.5. *À tout SEF compatible A dont chaque espace $A^k(T)$ est muni d'un produit scalaire, est associé un* interpolateur harmonique $I^\bullet : \tilde{X}^\bullet(\mathcal{T}) \to A^\bullet(\mathcal{T})$, *qui est un projecteur commutant avec la dérivée extérieure et préservant chaque $A^k(T)$.*

La démonstration de cette proposition peut être interprétée comme définissant des degrés de liberté (DDL) unisolvants assurant la commutation de l'interpolation associée avec la dérivée extérieure. Si maintenant chaque espace $A^k(T)$ contient les FDs polynomiales sur T de degré au plus p on s'attend à obtenir un ordre approximation $p'+1$ (pour les normes d'opérateur $\mathrm{W}^{p'+1,q}(S) \to \mathrm{L}^q(S)$ avec $0 \leqslant p' \leqslant p$), mais pour cela il faut éviter quelques cas dégénérés. Il suffit que les retro-transports des espaces $A^k(T)$ par l'application $x \mapsto (\operatorname{diam} T)x + (\text{barycentre } T)$ appartiennent à un certain espace topologique compact sur lequel la norme de l'interpolation I^k sur les l'espace des FDs continues à dérivée extérieure continue, munie de la norme uniforme correspondante, est semicontinue supérieurement (voir [1, §5.4]). Alors les techniques de [4] permettent aussi de construire des projecteurs commutant avec la dérivée extérieure et uniformément bornés $\mathrm{L}^q(S) \to \mathrm{L}^q(S)$.

2. Construction

On suppose que S est un domaine de $\mathbb{R}^n$ et que chaque cellule $T \in \mathcal{T}$ est un polytope. Soit p un entier naturel.

Pour tout $T \in \mathcal{T}$ et tout k, notons $A^k(T)$ les FDs sur T qui sont trace sur T d'une k-FD sur $\mathbb{R}^n$, polynomiale de degré au plus p. Nous avons bien là un SEF, mais il est loin d'être compatible. Choisissons un raffinement $\mathcal{T}'$ de $\mathcal{T}$ qui soit un complexe simplicial – souvent le raffinement barycentrique convient. Notons $B^k(T)$ les k-FDs standards relativement au raffinement $\mathcal{T}'$ et de degré $p+1$. On entend par là la première famille d'EF mixtes de Nédélec [6], généralisée aux FDs par Hiptmair [5], choisissant ceux compris entre les polynomes de degré p et $p+1$. Le degré $p=0$ correspond aux formes de Whitney. On pourra consulter [1] à leur égard. Nous avons là un SEF compatible sur $\mathcal{T}$, mais il est équivalent aux éléments finis standards sur $\mathcal{T}'$.

Notre but est de construire un SEF compatible sur $\mathcal{T}$, intermédiaire entre A et B et aussi petit que possible. De fait nous en obtenons un qui est de dimension minimale sur chaque cellule et en tout degré, non seulement parmi ceux qui sont contenus dans B mais en général.

Plus généralement nous supposons que A est un SEF, que B est un SEF compatible, et que $A^k(T) \subseteq B^k(T)$ pour tout k et T (voilà ce qu'on entend un peu abusivement par l'inclusion de A dans B). La construction dépend du choix d'un produit scalaire a sur chaque $B^k(T)$ (on pourra prendre si on veut le produit L^2 sur les FDs). Elle se fait en deux étapes, la première complétant A de sorte que la propriété de suite exacte – sous la forme (5) – soit satisfaite, la deuxième assurant la propriété d'extension, sans nuire aux acquis. Le SEF obtenu est alors compatible d'après la Proposition 1.3.

Première étape. Si $k < \dim T$, posons :

$$E^k(T) = \left\{u \in B^k_0(T)\colon \mathrm{d}u \in A^{k+1}_0(T),\ \mathrm{d}u \perp \mathrm{d}A^k_0(T) \text{ et } u \perp \mathrm{d}B^{k-1}_0(T)\right\}. \tag{9}$$

Dans le cas $k = \dim T$, si $A^k(T)$ contient un u d'intégrale 1, on pose $E^k(T) = 0$, sinon on pose :

$$E^k(T) = \left\{u \in B^k(T)\colon u \perp \mathrm{d}B^{k-1}_0(T)\right\}. \tag{10}$$

Remarquons que $A^k(T) \cap E^k(T) = 0$ et posons :

$$\tilde{A}^k(T) = A^k(T) \oplus E^k(T). \tag{11}$$

On note que $\mathrm{d}: E^k(T) \to \mathrm{H}^{k+1}(A^\bullet_0(T))$ est un isomorphisme (si $k = \dim T$ interpréter la flèche comme l'intégration) ce qui donne en particulier :

$$\dim E^k(T) = \dim \mathrm{H}^{k+1}\big(A^\bullet_0(T)\big). \tag{12}$$

Proposition 2.1. *$\tilde{A}$ est un SEF contenant A tel que les suites* :

$$0 \to \tilde{A}^0_0(T) \to \tilde{A}^1_0(T) \to \cdots \to \tilde{A}^{\dim T}(T) \to \mathbb{R} \to 0, \tag{13}$$

sont exactes.

Deuxième étape. Par abus on note A le système $\tilde{A}$ qu'on vient de construire, ou plus généralement un SEF inclus dans B ayant la proprieté (5) de suite exacte avec condition au bord homogène. Pour toute cellule T nous allons compléter $A^\bullet(T)$ pour assurer la propriété d'extension sur T tout en préservant $A^\bullet_0(T)$. On commence par les cellules T de dimension 1, continue avec celles de dimension 2 et ainsi de suite.

Soit $l \geqslant 0$ et T une cellule de dimension $l+1$. Nous utilisons le résultat suivant où on note tr l'application trace $B^\bullet(T) \to B^\bullet(\partial T)$.

Proposition 2.2. *Fixons un $k \leqslant l$. Tout $u \in B^k(\partial T)$ tel que $\mathrm{d}u \in \operatorname{tr} A^{k+1}(T)$ admet une unique extension $u \in B^k(T)$ telle que* :

$$\mathrm{d}u \in A^{k+1}(T), \quad \mathrm{d}u \perp \mathrm{d}A^k_0(T) \quad \textit{et} \quad u \perp \mathrm{d}B^{k-1}_0(T). \tag{14}$$

Supposons que nous avons rempli notre programme pour les cellules de dimension au plus l ($l \geqslant 0$), le SEF étendu étant noté $\tilde{A}$. On considère une cellule T de dimension $l+1$.

On munit $\tilde{A}^k(\partial T)$ du produit scalaire somme. Pour $k \leqslant l$ posons :

$$F^k = \{u \in \tilde{A}^k(\partial T)\colon\ u \perp \operatorname{tr} A^k(T) \text{ et } \mathrm{d}u \in \operatorname{tr} A^{k+1}(T)\}, \tag{15}$$

et notons $\tilde{F}^k$ les extensions des éléments de F^k définies par la Proposition 2.2 ci-dessus. On pose aussi :

$$G^k = \{u \in \tilde{A}^k(\partial T)\colon\ \mathrm{d}u \perp \operatorname{tr} A^{k+1}(T) \text{ et } u \perp \{v \in \tilde{A}^k(\partial T)\colon\ \mathrm{d}v = 0\}\}, \tag{16}$$

et on note $\tilde{G}^k$ les extensions B-harmoniques des éléments de G^k. Finalement on pose :

$$\tilde{A}^k(T) = A^k(T) + \tilde{F}^k + \tilde{G}^k. \tag{17}$$

Pour $k = l+1$ on prend simplement $\tilde{A}^k(T) = A^k(T)$.

Proposition 2.3. *Sur le $(l+1)$-squelette de $\mathcal{T}$, $\tilde{A}$ est un SEF compatible intermédiaire entre A et B tel que $\tilde{A}_0^k(T) = A_0^k(T)$ pour tout k et T.*

La construction de $\tilde{A}$ s'achève par induction. Il est minimal d'après le résultat suivant.

Proposition 2.4. *Si $\hat{A}$ est un quelconque SEF compatible contenant A on a $\dim \hat{A}_0^k(T) \geqslant \dim \tilde{A}_0^k(T)$ pour tout k et T.*

Pour conclure faisons quelques remarques :

- Pour $l < n$ nous n'avons pas supposé que les cellules de dimension l soient plates (càd. inclues dans un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ de dimension l). On note que lorsque $T \in \mathcal{T}^l$ n'est pas plate, la dimension de $A^k(T)$ peut être supérieure à la dimension de l'espace des k-FDs de degré au plus p sur $\mathbb{R}^l$. Ainsi comme nous l'avions remarqué dans [2], lorsque les faces ne sont pas plates, toutes les k-FDs constantes par n-cellule ne peuvent pas être représentées avec un DDL par k-cellule seulement. La théorie exposée ici permet de les représenter avec une nombre de DDL minimal. Par ailleurs la construction de [2] peut être interprétée comme le cas particulier $A^k(T) = 0$ de celle-ci. Lorsque les cellules sont toutes plates elle est équivalente au cas $p = 0$ et permet donc de représenter les k-FDs constantes avec un DDL par k-cellule.
- Supposons que le $(n-1)$-squelette de $\mathcal{T}$ soit simplicial et que $\mathcal{T}$ admette un raffinement simplicial $\mathcal{T}'$ obtenu en ajoutant un sommet x a chaque n-cellule T de $\mathcal{T}$ et en formant les simplexes ayant x comme sommet et la face opposée dans ∂T. Prenons le cas $p = 0$ de la construction proposée. Alors A n'est pas un SEF compatible, alors que B sont les formes de Whitney par rapport à $\mathcal{T}'$. La construction proposée ici donne un SEF compatible $\tilde{A}$ sur $\mathcal{T}$ ayant un degré de liberté par cellule de $\mathcal{T}$, alors que B a un degré de liberté par cellule de $\mathcal{T}'$; l'ordre d'approximation est 1 pour les deux SEF. Par exemple pour les k-formes on a $\#\mathcal{T}^k$ DDL pour $\tilde{A}$ et au moins $\#\mathcal{T}^k + 2\#\mathcal{T}^{k-1}$ pour B (négligeant le bord ∂S). Le gain en nombre de DDL sera encore plus substantiel pour $p > 0$.
- Cette construction peut encore être spécialisée. Soit S un domaine dans $\mathbb{R}^3$ muni d'un maillage $\mathcal{S}$ en hexaèdres irréguliers. Chaque 2-face est un quadrangle qu'on divise en 4 triangles en joignant un point central aux quatre sommets. Ces triangles forment un 2-squelette simplicial auquel on ajoute les hexaèdres de $\mathcal{S}$. On note $\mathcal{T}$ le complexe cellulaire sur S ainsi obtenu et applique la construction précédente. On obtient en particulier un espace de 2-formes (correspondant à des champs de vecteurs div-conformes) ayant exactement 4 DDL par face de $\mathcal{S}$ et contenant les constantes par hexaèdre. L'espace de 1-formes associé (correspondant à des champs de vecteurs curl-conformes) a 1 DDL par arête et 4 par face.
- La dimension de $\tilde{A}_0^k(T)$ est donnée par (12). Si $\mathcal{T}$ est simplicial, on peut la calculer et on obtient exactement la dimension des EF standards sur $\mathcal{T}$ et de degré $p+1$. Ceci montre que sur les simplexes la première famille d'EF mixtes de Nédélec est minimale parmi les SEF compatibles contenant les polynomes de degré maximal donné.
- Finalement on note que si on prend au lieu pour B le SEF $\tilde{X}$ et pour chaque a le produit scalaire L^2, toutes les contructions ci-dessus s'expriment comme des EDP bien posées. Ainsi si on choisit un nombre fini de FDs dans chaque T (des ondes planes par exemple) il existe toujours une FES compatible les contenant et de dimension finie.

Références

[1] D.N. Arnold, R.S. Falk, R. Winther, Finite element exterior calculus, homological techniques, and applications, Acta Numer. 15 (2006) 1–155.
[2] S.H. Christiansen, A construction of spaces of compatible differential forms on cellular complexes, Math. Models Methods Appl. Sci. 18 (5) (2008) 739–757.
[3] S.H. Christiansen, Foundations of finite element methods for wave equations of Maxwell type, in: Applied Wave Mathematics, Springer, Berlin, Heidelberg, 2009, pp. 335–393.
[4] S.H. Christiansen, R. Winther, Smoothed projections in finite element exterior calculus, Math. Comp. 77 (262) (2008) 813–829.
[5] R. Hiptmair, Canonical construction of finite elements, Math. Comp. 68 (228) (1999) 1325–1346.
[6] J.-C. Nédélec, Mixed finite elements in $\mathbf{R}^3$, Numer. Math. 35 (3) (1980) 315–341.