



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com



Analyse numérique

## Correction non linéaire et principe du maximum pour la discrétisation d'opérateurs de diffusion avec des schémas volumes finis centrés sur les mailles <sup>☆</sup>

*A nonlinear correction and maximum principle for diffusion operators discretized using cell-centered finite volume schemes*

Christophe Le Potier

CEA-Saclay, DEN, DM2S, SFME, LSET, 91191 Gif-sur-Yvette, France

---

### INFO ARTICLE

*Historique de l'article :*

Reçu le 19 février 2010

Accepté après révision le 20 mars 2010

Disponible sur Internet le 5 mai 2010

Présenté par Olivier Pironneau

---

### RÉSUMÉ

Nous décrivons une technique non linéaire qui permet de supprimer les oscillations apparaissant pour la discrétisation d'opérateur de diffusion avec des schémas volumes finis centrés sur les mailles.

© 2010 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

---

### ABSTRACT

We describe a nonlinear technique which suppresses oscillations appearing in the discretization of diffusion operators with cell-centered finite volume schemes.

© 2010 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

---

### Abridged English version

In the framework of nuclear waste disposal simulation, we are interested in a transport model in porous media which can be described by a convection–diffusion equation. Recently, a nonlinear finite volume scheme has been proposed to discretize the diffusion operators [8,12]. For that scheme, we obtained discrete maximum principle for distorted meshes or highly anisotropic diffusion tensors. In the present work, we propose a nonlinear correction which gives nonoscillating solutions which can be applied, for example, to the cell-centered finite volume schemes developed in [1–5,7,9,11,14].

We consider problem (1) and a cell-centered finite volume scheme described in (2). Here,  $\mathcal{M}$  and  $\mathcal{E}$  are the meshes and the faces of the grid. We let  $|K|$  denote the volume of a mesh and  $F_{K,\sigma}$  a consistent approximation of  $\int_{\sigma} D \nabla u \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} d\sigma$ . For  $\mu > 0$ , we propose the nonlinear correction described in (3).

In Proposition 4.1, we show that the new scheme is equivalent to the original scheme with a modified flux presented in (4). In Proposition 4.2, we prove that this modified flux is consistent. In Proposition 4.3, we give a few words about the coercivity of the modified scheme. In Proposition 4.5, we show that the new scheme is nonoscillating.

The numerical results are presented in the final section. We consider the analytical problem (7) and use the finite volume scheme in [1]. We first show the  $L^2$  error with respect to the analytical solution, the order in space, the minimum values and the percentage of negative values as a function of the discretization step  $h$  (Scheme 1). Then we present the results obtained with the modified scheme (Scheme 2). Finally, we propose a new modification of the original scheme which gives a

---

<sup>☆</sup> Ce travail est effectué dans le cadre du projet VFSitCom (ANR-08-BLAN-0275-01), <http://ens.math.univ-montp2.fr/droniou/vfsitcom/>.

positive solution (Scheme 3). We observe that Scheme 2 is first order in space. However, Scheme 3 remains second order in space and more accurate than the original scheme. We check that no oscillations appear with Scheme 2 and that Scheme 3 remains positive.

## 1. Introduction

Dans le cadre des études concernant le stockage des déchets nucléaires en formation géologique profonde, nous nous intéressons à un modèle de type transport qui s'écrit à l'aide d'une équation de convection–diffusion–dispersion avec un terme de décroissance radioactive et qui permet d'étudier la migration d'un radionucléide. Il est bien connu que les schémas classiques discrétisant des opérateurs de diffusion ne satisfont pas toujours le principe du maximum pour des mailles très déformées ou des rapports d'anisotropie très élevés [10]. Un travail récent consistant à modifier le schéma « Diamant » [7] permet d'obtenir ce principe [8,12]. Nous proposons une correction non linéaire qui donne des solutions non oscillantes pour des schémas volumes finis centrés sur les mailles. Elle s'applique par exemple aux méthodes proposées dans [1–5,7,9, 11,14].

## 2. Présentation

Nous considérons un domaine polygonal  $\Omega$  de  $\mathcal{R}^N$ . Nous simplifions le modèle de transport et nous intéressons au problème elliptique suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{q} = \overline{\overline{D}} \nabla u \\ \operatorname{div} \mathbf{q} = -f \quad \text{sur } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \delta\Omega \end{cases} \quad (1)$$

avec :  $u$ , la concentration de radionucléide,  $\overline{\overline{D}}$ , une matrice  $(N, N)$  symétrique définie positive,  $f \in L^2(\Omega)$ , le terme source.

## 3. Correction non linéaire

Nous considérons un maillage de  $\Omega$  caractérisé par l'ensemble de ses mailles  $\mathcal{M}$ , de ses faces  $\mathcal{E}$  (arêtes en 2 dimensions) et de ses points  $\mathcal{P}$  notés  $(x_K)_{K \in \mathcal{M}}$ . Nous notons :

- $|K|$  le volume de la maille  $K \in \mathcal{M}$ ,  $|\sigma|$  la longueur d'une face  $\sigma \in \mathcal{E}$ ,  $\mathcal{E}_K$ , l'ensemble des faces de  $K$  et  $\mathbf{n}_{K,\sigma}$  les normales orientées vers l'extérieur de  $K$  pour  $\sigma \in \mathcal{E}_K$ .
- $h_K$  le diamètre de chaque maille  $K$  et  $h_{\mathcal{M}} = \sup_{K \in \mathcal{M}} h_K$ .
- $\mathcal{E}_{int}$  l'ensemble des faces intérieures et  $\mathcal{E}_{ext}$  l'ensemble des faces appartenant à  $\partial\Omega$ .
- $\forall \sigma \in \mathcal{E}_{int}$ ,  $K$  et  $L$  sont les mailles de part et d'autre de cette face  $\sigma$ .
- $\forall K \in \mathcal{M}$ ,  $u_K$  la valeur de la concentration.

Nous nous donnons un schéma convergeant localement conservatif centré sur les mailles déduit du calcul du flux  $F_{K,\sigma}$  qui vérifie :

$$\begin{cases} \forall K \in \mathcal{M}, \quad \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} = -|K|f_K \\ \forall \sigma \in \mathcal{E}_{int}, \quad F_{K,\sigma} + F_{L,\sigma} = 0 \\ \forall \sigma \in \mathcal{E}_{ext}, \quad u_\sigma = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Nous supposons aussi que le flux numérique vérifie pour des fonctions  $u$  dans  $C^2(\Omega)$  et  $\overline{\overline{D}}$  régulière

$$\frac{F_{K,\sigma}}{|\sigma|} = \frac{\int_\sigma \overline{\overline{D}} \nabla u \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} \, d\sigma}{|\sigma|} + \mathcal{O}(h_{\mathcal{M}})$$

D'autre part, le schéma vérifie l'hypothèse de coercivité suivante :

$$\sum_{K \in \mathcal{M}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} -F_{K,\sigma} u_K \geq \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \mu_\sigma (u_L - u_K)^2 + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} \mu_\sigma (u_K)^2$$

où les  $\mu_\sigma$  sont des réels strictement positifs.

Notons  $V(K)$  le stencil du schéma. On peut alors écrire :  $\operatorname{Div}_K = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma} = \sum_{J \in V(K)} \alpha_{J,K} (u_J - u_K)$ ,  $\alpha_{J,K}$  étant des réels. Nous supposons aussi que  $\alpha_{J,K} \neq 0$  si  $J$  est une maille voisine de  $K$ . D'autre part, nous complétons les ensembles  $V(K)_{K \in \mathcal{M}}$  de manière à ce que  $J \in V(K)$  implique  $K \in V(J)$ , ce qui revient à rendre symétrique artificiellement le stencil. Notons que dans tous les cas, le nombre d'éléments des  $V(K)_{K \in \mathcal{M}}$  et des stencils des flux numériques est borné indépendamment du maillage.

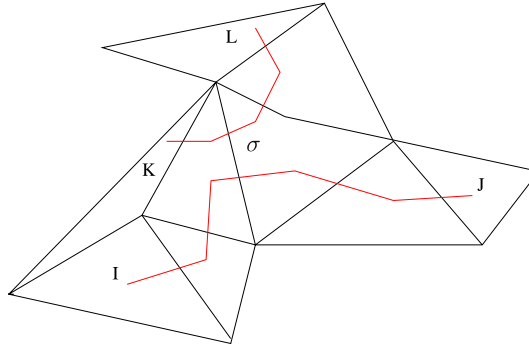


Fig. 1. Chemins  $IJ$  et  $KL$  intersectant l'arête  $\sigma$ ,  $I \in V(J)$ ,  $K \in V(L)$ .

Nous nous donnons  $\nu$  un paramètre strictement positif. Nous proposons de modifier le schéma précédent de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } \sum_{L \in V(K)} |u_L - u_K| \neq 0 \text{ et } \sum_{L \in V(J)} |u_L - u_J| \neq 0 \\ \forall K \in \mathcal{M}, \quad \text{Div}_K + \nu \sum_{J \in V(K)} \left\{ \frac{|\text{Div}_K|}{\sum_{L \in V(K)} |u_L - u_K|} + \frac{|\text{Div}_J|}{\sum_{L \in V(J)} |u_L - u_J|} \right\} (u_J - u_K) = -|K|f_K \\ \forall \sigma \in \mathcal{E}_{int}, \quad F_{K,\sigma} + F_{L,\sigma} = 0 \\ \sigma \in \mathcal{E}_{ext}, \quad u_\sigma = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

Si  $\sum_{L \in V(K)} |u_L - u_K| = 0$ , le terme proportionnel à  $|\text{Div}_K|$  n'apparaît pas et si  $\sum_{L \in V(J)} |u_L - u_J| = 0$ , les terme proportionnels à  $|\text{Div}_J|$  n'apparaissent pas non plus.

**4. Propriétés de l'algorithme**

Pour des mailles  $I$  et  $J$  telles que  $I \in V(J)$  (ou  $J \in V(I)$ ), nous notons  $\mathcal{E}_{I,J}$ , l'ensemble des faces intersectées par un chemin polygonal  $IJ$  qui ne passe pas par les points du maillage. Pour  $\sigma \in \mathcal{E}$ , nous notons  $ch(\sigma)$ , l'ensemble des chemins polygonaux qui intersectent  $\sigma$  (Fig. 1). Pour  $\sigma \in \mathcal{E}$ , nous définissons un flux modifié comme suit :

$$F'_{K,\sigma} = F_{K,\sigma} + \left\{ \sum_{IJ \in ch(\sigma), I \leq J} \text{sign}(\mathbf{n}_{K,\sigma,IJ}) \left\{ \nu \frac{|\text{Div}_I|}{\sum_{L \in V(I)} |u_L - u_I|} + \nu \frac{|\text{Div}_J|}{\sum_{L \in V(J)} |u_L - u_J|} \right\} (u_J - u_I) \right\} \quad (4)$$

où  $\text{sign}(\mathbf{n}_{K,\sigma,IJ}) = 1$  si  $\mathbf{n}_{K,\sigma}$  est dans le même sens que le chemin  $IJ$  et  $\text{sign}(\mathbf{n}_{K,\sigma,IJ}) = -1$  sinon.

**Proposition 4.1.** *Le schéma modifié est équivalent à résoudre le système d'équations suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall K \in \mathcal{M}, \quad \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F'_{K,\sigma} = -|K|f_K \\ \forall \sigma \in \mathcal{E}_{int}, \quad F'_{K,\sigma} + F'_{L,\sigma} = 0 \\ \sigma \in \mathcal{E}_{ext}, \quad u_\sigma = 0 \end{array} \right. \quad (5)$$

La deuxième égalité est immédiate car  $\text{sign}(\mathbf{n}_{K,\sigma,IJ}) + \text{sign}(\mathbf{n}_{L,\sigma,IJ}) = 0$ . Avec les flux modifiés, le schéma devient :

$$\text{Div}_K + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \text{sign}(\mathbf{n}_{K,\sigma,IJ}) \sum_{IJ \in ch(\sigma), I \leq J} \left\{ \nu \frac{|\text{Div}_I|}{\sum_{L \in V(I)} |u_L - u_I|} + \nu \frac{|\text{Div}_J|}{\sum_{L \in V(J)} |u_L - u_J|} \right\} (u_J - u_I) = -|K|f_K$$

Comme

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \sum_{IJ \in ch(\sigma), I \leq J, I \neq K \text{ et } J \neq K} \text{sign}(\mathbf{n}_{K,\sigma,IJ}) \left\{ \nu \frac{|\text{Div}_I|}{\sum_{L \in V(I)} |u_L - u_I|} + \nu \frac{|\text{Div}_J|}{\sum_{L \in V(J)} |u_L - u_J|} \right\} (u_J - u_I) = 0$$

nous obtenons :

$$\text{Div}_K + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \sum_{IJ \in ch(\sigma), I \leq J, I=K \text{ ou } J=K} \text{sign}(\mathbf{n}_{K,\sigma,IJ}) \left\{ \nu \frac{|\text{Div}_I|}{\sum_{L \in V(I)} |u_L - u_I|} + \nu \frac{|\text{Div}_J|}{\sum_{L \in V(J)} |u_L - u_J|} \right\} (u_J - u_I) = -|K|f_K$$

En prenant en compte la définition de  $\text{sign}(\mathbf{n}_{K,\sigma,I,J})$ , l'égalité devient finalement :

$$\text{Div}_K + \sum_{J \in V(K)} \left\{ \nu \frac{|\text{Div}_K|}{\sum_{L \in V(K)} |u_L - u_K|} + \nu \frac{|\text{Div}_J|}{\sum_{L \in V(J)} |u_L - u_J|} \right\} (u_J - u_K) = -|K|f_K$$

**Proposition 4.2.** Pour  $\bar{D}$  régulière, avec des fonctions  $u$  dans  $C^2(\Omega)$ , le flux  $\frac{F'_{K,\sigma}}{|\sigma|}$  est consistant.

Il suffit pour cela de montrer que  $\frac{F'_{K,\sigma} - F_{K,\sigma}}{|\sigma|}$  tend vers zéro lorsque  $h_{\mathcal{M}}$  tend vers zéro. En utilisant la symétrie du stencil, nous obtenons les inégalités  $\frac{|u_J - u_I|}{\sum_{L \in V(I)} |u_L - u_I|} \leq 1$  et  $\frac{|u_J - u_I|}{\sum_{L \in V(J)} |u_L - u_J|} \leq 1$ . On peut alors écrire que :  $|\frac{F'_{K,\sigma} - F_{K,\sigma}}{|\sigma|}| \leq \frac{\nu}{|\sigma|} \sum_{J \in \text{ch}(\sigma), I \leq J} |\text{Div}_I| + |\text{Div}_J|$ . Pour les fonctions de  $C^2(\Omega)$ , en utilisant l'hypothèse de consistance de  $F_{K,\sigma}$  et la régularité de  $\bar{D}$ , nous obtenons que  $\text{Div}_{K,K \in \mathcal{M}} = \mathcal{O}(|K|) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \mathcal{O}(|\sigma| h_{\mathcal{M}})$  qui est proportionnel à des volumes. Comme le nombre d'éléments  $\text{ch}(\sigma)$  est borné, avec des hypothèses de non-dégénérescence du maillage, on déduit la consistance de  $\frac{F'_{K,\sigma}}{|\sigma|}$  car  $|\sigma|$  est une longueur.

**Proposition 4.3.** Le schéma modifié est coercif.

Cette propriété est déduite de l'inégalité suivante :  $\sum_{K \in \mathcal{M}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} -(F'_{K,\sigma} - F_{K,\sigma})u_K \geq \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}} \zeta_{\sigma} (u_L - u_K)^2$ , avec  $\zeta_{\sigma} \geq 0$  et de l'hypothèse de coercivité du schéma initial.

Nous définissons le problème instationnaire associé au problème initial consistant à résoudre l'équation :  $\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div } \mathbf{q}$  sur  $\Omega$ . Nous utilisons le schéma modifié avec un schéma explicite où  $\Delta t$  est le pas de temps et  $u^n$  désigne  $u(n\Delta t)$ .

**Définition 4.4.** Un schéma est non oscillant si et seulement si  $\min_{J \in V(K)} u_J^n \leq u_K^{n+1} \leq \sup_{J \in V(K)} u_J^n$ .

Notons  $\beta_K = ((1 + \nu) \text{Card}(V(K)) \sup_{J \in V(K)} |\alpha_{J,K}| + \nu \sum_{J \in V(K)} \sup_{L \in V(J)} |\alpha_{L,J}|)$  qui est différent de zéro.

**Proposition 4.5.** Si  $\nu \geq 1$  et si  $\Delta t \leq \min_{K \in \mathcal{M}} |K| \frac{1}{\beta_K}$ , le schéma modifié est non oscillant.

Le schéma s'écrit :

$$|K|u_K^{n+1} = |K|u_K^n + \Delta t \sum_{J \in V(K)} \frac{\text{Div}_K^n |u_J^n - u_K^n| + \nu |\text{Div}_K^n| (u_J^n - u_K^n)}{\sum_{L \in V(K)} |u_L^n - u_K^n|} + \nu \sum_{J \in V(K)} |\text{Div}_J^n| \frac{(u_J^n - u_K^n)}{\sum_{L \in V(J)} |u_L^n - u_J^n|}$$

$$\begin{cases} \text{Div}_K^n |u_J^n - u_K^n| + \nu |\text{Div}_K^n| (u_J^n - u_K^n) = (\nu + 1) |\text{Div}_K^n| (u_J^n - u_K^n) & \text{si } \text{Div}_K^n (u_J^n - u_K^n) \geq 0 \\ \text{Div}_K^n |u_J^n - u_K^n| + \nu |\text{Div}_K^n| (u_J^n - u_K^n) = (\nu - 1) |\text{Div}_K^n| (u_J^n - u_K^n) & \text{sinon} \end{cases} \quad (6)$$

Le schéma devient donc :  $u_K^{n+1} = u_K^n (1 - \frac{\Delta t}{|K|} \tau_{K,K}(u^n)) + \sum_{J \in V(K), J \neq K} \frac{\Delta t}{|K|} \tau_{J,K}(u^n) u_J^n$ , avec  $\tau_{J,K}(u^n) \geq 0$  car  $\nu \geq 1$ .

Remarquons que  $\frac{\sum_{J \in V(K)} |\text{Div}_K^n|}{\sum_{L \in V(K)} |u_L^n - u_K^n|} \leq \text{Card}(V(K)) \sup_{J \in V(K)} |\alpha_{J,K}|$ . Comme  $|\tau_{K,K}| \leq \beta_K$ ,  $\Delta t \leq \min_{K \in \mathcal{M}} |K| \frac{1}{\beta_K}$ , et  $1 - \frac{\Delta t}{|K|} \tau_{K,K}(u^n) + \sum_{J \in V(K), J \neq K} \frac{\Delta t}{|K|} \tau_{J,K}(u^n) = 1$ , nous déduisons que le schéma est non oscillant.

**Corollaire 4.6.** Si  $f \geq 0$ , le schéma modifié (3) vérifie le principe du maximum décrit dans [6], c'est à dire :  $\forall K \in \mathcal{M}, u_K \geq \min_{\sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}} u_{\sigma} = 0$ .

**Remarque 1.** Avec des hypothèses de non-dégénérescence du maillage, on retrouve une condition classique du type  $\Delta t \leq Ch^2$ ,  $C$  étant une constante, et  $h$  le pas du maillage.

### 5. Résultats numériques

Nous cherchons à retrouver numériquement la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \text{div}(\bar{D} \nabla u) = -f & \text{sur } \Omega = ]0, 0.5[ \times ]0, 0.5[ \\ u = \sin(\pi x) \sin(\pi y) & \text{pour } (x, y) \in \partial \Omega \end{cases} \quad \text{avec } \bar{D} = \frac{1}{(x^2 + y^2)} \begin{pmatrix} y^2 + \epsilon x^2 & -(1 - \epsilon)xy \\ -(1 - \epsilon)xy & x^2 + \epsilon y^2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

et

**Tableau 1**  
Résultats obtenus avec les Schémas 1, 2 et 3 en fonction du pas en espace.

$h$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$
Erreur $L^2$ (Schéma 1)	$5.21 \times 10^{-1}$	$1.96 \times 10^{-1}$	$7.14 \times 10^{-2}$	$1.65 \times 10^{-2}$	$2.14 \times 10^{-3}$
Ordre (Schéma 1)		1.41	1.46	2.11	2.95
Conc Négatives (Schéma 1)	12.5	9.38	5.46	2.14	0.53
Val min (Schéma 1)	$-2.9 \times 10^{-1}$	$-2.4 \times 10^{-1}$	$-1.4 \times 10^{-1}$	$-5.26 \times 10^{-2}$	$-1.33 \times 10^{-2}$
Erreur $L^2$ (Schéma 2)	$1.52 \times 10^{-1}$	$8.51 \times 10^{-2}$	$4.46 \times 10^{-2}$	$2.33 \times 10^{-2}$	$1.21 \times 10^{-2}$
Ordre (Schéma 2)		0.84	0.93	0.94	0.94
<i>nit</i>	3	11	8	12	15
Erreur $L^2$ (Schéma 3)	$9.06 \times 10^{-2}$	$2.46 \times 10^{-2}$	$6.18 \times 10^{-3}$	$1.57 \times 10^{-3}$	$4.04 \times 10^{-4}$
Ordre (Schéma 3)		1.88	1.99	1.98	1.96
<i>nit</i>	7	8	10	10	11

$$\begin{cases} u_{ana} = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \\ f = -\operatorname{div} \overline{\overline{D}} u_{ana} \end{cases} \quad (8)$$

Le paramètre  $\epsilon$  est égal à  $10^{-6}$  ce qui donne un rapport d'anisotropie égal à  $10^6$ . Nous vérifions que  $f \geq 0$ . D'autre part, nous utilisons des maillages de carrés de surface  $h^2$ ,  $h$  variant de  $\frac{1}{4}$  à  $\frac{1}{64}$ . Nous calculons la solution du problème à l'aide d'un algorithme de point fixe. Notons  $u^i$  la valeur de la solution à l'itéré  $i$  et  $A(u^i)$  la matrice discrétisant l'opérateur de diffusion. Le schéma itératif s'écrit  $A(u^i)u^{i+1} = -f$ .

Nous montrons tout d'abord les résultats obtenus dans le Tableau 1 avec le schéma développé dans [1] (Schéma 1) (Erreurs  $L^2$  de  $u$  par rapport à la solution analytique, ordre, pourcentage de valeurs négatives, valeur minimum). Nous représentons également les résultats obtenus avec le schéma modifié (Schéma 2). Nous proposons un dernier schéma (Schéma 3) qui est une variante du Schéma 2, où la deuxième équation du système (3) est remplacée par l'égalité suivante :

$$\forall K \in \mathcal{M}, \quad \operatorname{Div}_K + \nu \sum_{J \in V(K)} \sup \left\{ \frac{|\operatorname{Div}_K|}{\sum_{L \in V(K)} \frac{1}{2}(|u_L| + |u_J|)}, \frac{|\operatorname{Div}_J|}{\sum_{L \in V(J)} \frac{1}{2}(|u_L| + |u_J|)} \right\} (u_J - u_K) = -|K|f_K$$

Pour ces 2 derniers algorithmes, nous présentons également le nombre d'itérations *nit* effectuées dans l'algorithme du point fixe pour atteindre la convergence. Nous observons que le Schéma 2 n'oscille plus et qu'il est d'ordre 1. Quant au Schéma 3, il tend vers l'ordre 2, reste positif et améliore de manière significative la précision du schéma initial. Pour les deux méthodes, le nombre d'itérations *nit* reste inférieur à 15. S'il semble trop important pour certaines applications, rappelons qu'il existe alors des schémas linéaires proposés dans [13] pour résoudre des problèmes diffusifs.

## Remerciements

L'auteur remercie Jérôme Droniou pour sa relecture, ses commentaires et ses suggestions.

## Références

- [1] I. Aavatsmark, T. Barkve, O. Boe, T. Mannseth, Discretization on unstructured grids for inhomogeneous, anisotropic media. Part I: Derivation of the methods, *SIAM J. Sci. Comput.* 19 (5) (September 1998) 1700–1716.
- [2] L. Agelas, R. Masson, Convergence of the finite volume MPFA O scheme for heterogeneous anisotropic diffusion problems on general meshes, *Comptes Rendus Mathématique* 346 (17–18) (September 2008) 1007–1012.
- [3] L. Agelas, R. Eymard, R. Herbin, A nine-point finite volume scheme for the simulation of diffusion in heterogeneous media, *Comptes Rendus Mathématique* 347 (11–12) (June 2009) 673–676.
- [4] L. Agelas, D. Di Pietro, J. Droniou, The G method for heterogeneous anisotropic diffusion on general meshes, *ESAIM: M2AN* (2010), doi:10.1051/m2an/2010021.
- [5] E. Bertolazzi, G. Manzini, A second-order maximum principle preserving volume method for steady convection–diffusion problems, *SIAM Journal on Numerical Analysis* 43 (5) (2006) 2172–2199.
- [6] E. Burman, A. Ern, Discrete maximum principle for Galerkin approximations of the Laplace operator on arbitrary meshes, *Comptes Rendus Mathématiques* 338 (8) (15 April 2004) 641–646.
- [7] Y. Coudière, J.P. Vila, P. Villedieu, Convergence rate of a finite scheme for a two dimensional convection–diffusion problem, *Mathematical Modelling and Numerical Analysis (M2AN)* 33 (3) (1999) 493–516.
- [8] J. Droniou, C. Le Potier, Construction and convergence study of local-maximum-principle preserving schemes for elliptic equations, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, submitted for publication.
- [9] R. Eymard, T. Gallouët, R. Herbin, A cell-centred finite-volume approximation for anisotropic diffusion operators on unstructured meshes in any space dimension, *IMA Journal of Numerical Analysis* 26 (2006) 326–353.
- [10] R. Herbin, F. Hubert, Benchmark on discretization schemes for anisotropic diffusion problems on general grids, in: 5th International Symposium on Finite Volumes for Complex Applications, June 8–13, <http://www.latp.univ-mrs.fr/fvca5>, 2008.
- [11] C. Le Potier, Schéma volumes finis pour des opérateurs de diffusion fortement anisotropes sur des maillages non structurés, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 340 (2005) 921–926.
- [12] C. Le Potier, A nonlinear finite volume scheme satisfying maximum and minimum principles for diffusion operators, *Int. J. Finite* 6 (2009) 2.
- [13] C. Le Potier, Un schéma linéaire vérifiant le principe du maximum pour des opérateurs de diffusion très anisotropes sur des maillages déformés, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 347 (2009) 105–110.
- [14] K. Lipnikov, M. Shashkov, I. Yotov, Local flux mimetic finite difference methods, *Numer. Math.* 112 (2009) 115–152.