



Analyse mathématique/Géométrie algébrique

Faisceaux pervers sur les variétés toriques lisses

Perverse sheaves on smooth toric varieties

Delphine Dupont

Laboratoire J.A. Dieudonné, UMR CNRS 6621, université de Nice–Sophia Antipolis, parc Valrose, 06108 Nice cedex 2, France

I N F O A R T I C L E

Historique de l'article :

Reçu le 3 mars 2010

Accepté après révision le 16 juin 2010

Disponible sur Internet le 21 juillet 2010

Présenté par Gérard Laumon

R É S U M É

Soit X une variété torique lisse stratifiée par l'action du tore. À partir de l'éventail associée à X nous définissons une catégorie de représentations de carquois équivalente à la catégorie des faisceaux pervers sur X relativement à cette stratification.

© 2010 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

A B S T R A C T

Let X be a smooth toric variety stratified by the torus action. From the fan associated to X we define a category of quiver representations equivalent to the category of perverse sheaves on X relatively to the fixed stratification.

© 2010 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

Depuis la définition dans [2] de la catégorie \mathcal{Perv}_X des faisceaux pervers sur un espace topologique X , de nombreuses méthodes ont été développées pour en donner une description élémentaire dans le cas où la stratification est fixée. Plusieurs descriptions par des catégories de représentations de carquois se font sur des espaces topologiques particuliers munis d'une stratification fixée. Rappelons qu'un carquois est un graphe orienté et qu'une représentation de ce carquois est un foncteur de ce graphe dans la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie. Un premier exemple de cette approche est donné par A. Galligo, M. Granger et Ph. Maisonobe qui, dans [6], démontrent l'équivalence de la catégorie des faisceaux pervers sur \mathbb{C}^n relativement à un croisement normal avec une sous-catégorie pleine de la catégorie notée \mathcal{C}_n des représentations du carquois associés à un hypercube. Dans ce qui suit on appellera cette équivalence, équivalence de GGM. Il existe plusieurs autres descriptions, citons notamment [9,3] et [7]. Dans [8], R. MacPherson et K. Vilonen s'intéressent à la catégorie \mathcal{Perv}_X sur un espace de Thom–Mather quelconque. Leur résultat permet de décrire localement \mathcal{Perv}_X mais la description n'est pas explicite.

Les résultats que nous venons de citer ne tiennent pas compte du caractère local des faisceaux pervers. Rappelons, en effet, que les faisceaux pervers sur un espace stratifié forment un champ. Autrement dit connaître un faisceau pervers à isomorphisme près sur un ouvert U revient à le connaître sur un recouvrement ouvert. On peut donc s'attendre à ce qu'une caractérisation locale de la catégorie des faisceaux pervers par des catégories explicites de représentations de carquois puisse se recoller sur X en une description simple de la catégorie globale des faisceaux pervers. Dans [10] et [11], D. Treumann utilise ce genre de méthodes pour généraliser le procédé défini dans [8].

Dans le cas des variétés toriques, une approche combinatoire de tels objets est naturelle. Par exemple, la cohomologie d'intersection d'une variété torique X peut être calculée via les sections globales d'un faisceau pervers, lui même décrit

Adresse e-mail : ddupont@unice.fr.

comme le faisceau simple d'une catégorie de faisceaux de modules définis sur l'éventail associé à X . Partant de ce constat P. Bressler, V.-A. Lunts d'une part et G. Barthel, L. Kaup, J.-P. Brasselet, K.-H. Fieseler d'autre part définissent combinatoirement, dans respectivement [4] et [1], la cohomologie d'intersection d'un éventail non rationnel et obtiennent ainsi de nouveaux résultats combinatoires.

De plus les variété toriques stratifiées par l'action du tore sont localement isomorphes à des produits de \mathbb{C}^k et de \mathbb{C}^{*l} stratifiés par le croisement normal. En utilisant la notion de champ et notamment de champ constructible on peut recoller les descriptions de A. Galligo, M. Granger et Ph. Maisonobe. Nous exposons ici le résultat de cette méthode. À partir de la donnée d'un éventail nous définissons une sous-catégorie pleine de la catégorie des représentations d'un certain carquois équivalente à la catégorie \mathcal{Perv}_X .

2. Catégorie des faisceaux pervers sur les variétés toriques lisses

Soient Δ un éventail de \mathbb{C}^n , v_1, \dots, v_k les vecteurs primitifs qui engendrent les cônes de dimension un appartenant à Δ , et \mathcal{I} l'ensemble des parties I de $\{1, \dots, k\}$ telles que l'enveloppe positive des vecteurs $\{v_i\}_{i \in I}$ soit un cône de Δ . On note X_I la variété associée au cône σ_I et \mathcal{Perv}_I la catégorie des faisceaux pervers sur X_I relativement à la stratification donnée par l'action du tore. On suppose de plus que Δ est un éventail régulier de \mathbb{R}^n , la variété X_Δ est donc lisse.

Définition 2.1. Soit I un élément de \mathcal{I} , on dit que I et σ_I sont maximaux s'ils sont maximaux pour l'inclusion dans respectivement \mathcal{I} et Δ .

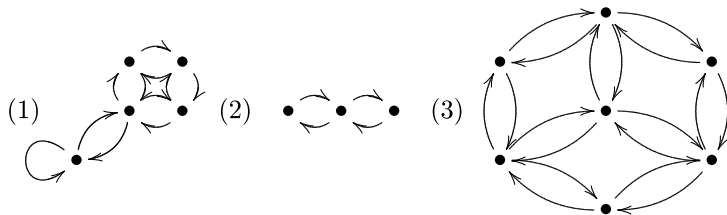
Pour tout cône maximal σ_I de Δ , on se fixe une base \mathcal{B}_I de \mathbb{Z}^n qui contient les vecteurs $\{v_i\}_{i \in I}$ (l'existence de \mathcal{B}_I est assurée par le fait que Δ est régulier). De même pour tout élément J de \mathcal{I} on fixe un élément K_J de \mathcal{I} contenant J et de cardinal maximal.

Définition 2.2. On note c_Δ le carquois défini par la donnée :

- pour tout cône σ_I de Δ , d'un sommet s_I muni de $n - l$ boucles, l étant le cardinal maximal des éléments de \mathcal{I} contenant I ,
- pour tout couple $(\sigma_I, \sigma_{I'})$ de cônes de Δ tels que $\sigma_{I'}$ soit une face de codimension un de σ_I , de deux flèches de sens inverse entre s_I et $s_{I'}$.

Exemples.

- Le carquois associé à la variété torique \mathbb{C}^n est un hypercube de dimension n . De même le carquois associé à $\mathbb{C}^l \times \mathbb{C}^{*n-l}$ est un hypercube de dimension l dont les sommets sont munis de $n - l$ boucles.
- Si $\Delta \in \mathbb{C}^2$ est la réunion des faces des cônes respectivement engendrés par les vecteurs $\{e_1, e_2\}$ et $\{-e_1 - e_2\}$ où (e_1, e_2) est la base canonique de \mathbb{C}^2 , le carquois associé est le carquois (1). De même les carquois associés à \mathbb{P}^1 et \mathbb{P}^2 sont respectivement les carquois (2) et (3) :



Un objet de la catégorie des représentations du carquois c_Δ est donc la donnée d'une famille :

$$(\{E_I\}_{I \in \mathcal{I}}, \{u_{Ip}, v_{Ip}\}_{I \cup \{p\} \in \mathcal{I}}, \{iM_I\})$$

où E_I est un espace vectoriel de dimension finie, u_{Ip} et v_{Ip} sont des applications linéaires de respectivement E_I dans $E_{I \cup \{p\}}$ et de $E_{I \cup \{p\}}$ dans E_I et où iM_I est un endomorphisme de E_I où i varie de 1 à $n - l$, l étant le cardinal maximal des éléments de \mathcal{I} contenant I .

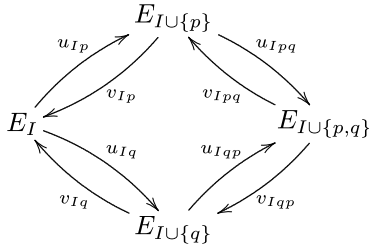
Définition 2.3. On note \mathcal{C}_Δ la sous-catégorie pleine de la catégorie des représentations du carquois c_Δ formée des objets tels que :

- (i) Pour tout élément I de \mathcal{I} l'application linéaire iM_I est inversible.

(ii) Pour tout couple $(I \cup \{p\}, I)$ appartenant à \mathcal{I}^2 l'application linéaire M_{Ip} suivante est inversible :

$$M_{Ip} = v_{Ip}u_{Ip} + Id.$$

(iii) Pour tout quadruplet $(I, I \cup \{p\}, I \cup \{q\}, I \cup \{p, q\})$ d'éléments de \mathcal{I} les applications linéaires $u_{Ip}, u_{Iq}, u_{Ipq}, u_{Iqp}$ et $v_{Ip}, v_{Iq}, v_{Ipq}, v_{Iqp}$ données par le diagramme



vérifient les conditions de commutations suivantes :

$$u_{Ip}u_{Ipq} = u_{Iq}u_{Iqp}, \quad v_{Ipq}v_{Ip} = v_{Iqp}v_{Iq}, \quad v_{Ipq}u_{Iqp} = u_{Ip}v_{Iq}.$$

(iv) Pour tout J appartenant à \mathcal{I} on note (v_1, \dots, v_n) la base \mathcal{B}_{K_J} fixée plus haut et on suppose que, pour tout $i \in \{1, \dots, j\}$ v_i appartient à σ_J , pour tout $i \in \{j+1, \dots, l\}$, v_i appartient à σ_{K_J} . Pour tout élément p de $\{1, \dots, k\} \setminus J$ tel que $J \cup \{p\} \in \mathcal{I}$ on note (p_1, \dots, p_n) les coordonnées de v_p dans \mathcal{B}_{K_J} . Alors l'application linéaire M_{Jp} s'écrit comme suit :

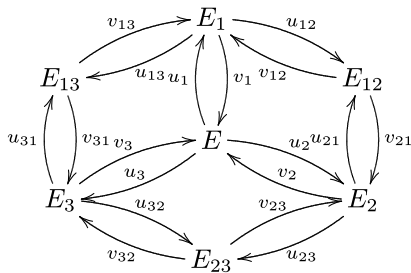
$$M_{Jp} = M_{Jv_{j+1}}^{p_{j+1}} \dots M_{Jv_l}^{p_l} (1M_J)^{p_{l+1}} \dots (n-1M_J)^{p_n}$$

notons que si $p \in K_J$ on obtient l'égalité $M_{Jp} = M_{Jp}$.

Remarquons que les catégories \mathcal{C}_Δ dépendent du choix des parties K_J et des bases \mathcal{B}_{K_J} . Cela étant des choix différents définissent des catégories équivalentes.

Pour mieux comprendre cette définition donnons quelques exemples :

- Quand la variété torique est \mathbb{C}^n on retrouve la catégorie $\mathcal{C}_{\mathbb{C}^n}$ définie par G. Galligo, M. Granger et Ph. Maisonobe dans [6].
- Soit (e_1, e_2) la base canonique de \mathbb{Z}^2 , $e_3 = -e_1 - e_2$ et Δ l'éventail formé des faces des cônes engendrés par $\{e_1, e_2\}$, $\{e_1, e_3\}$ et $\{e_2, e_3\}$. La variété torique associée à Δ est \mathbb{P}^2 . La catégorie $\mathcal{C}_{\mathbb{P}^2}$ est la catégorie formée des objets :



tels que, pour $(i, j) \in \{1, 2\}$ avec $i \neq j$ on ait $u_i u_{ij} = u_j u_{ji}$, $v_{ij} v_i = v_{ji} v_j$, $v_{ji} u_{ij} = u_j v_i$, et tels que $M_{\emptyset i} = v_i \circ u_i + Id$ et $M_{ij} = v_{ij} \circ u_{ij} + Id$ soient inversibles. Explicitons maintenant la condition (iv) :

- Considérons $M_{\emptyset 3}$, ici $J = \emptyset$, $p = \{3\}$, $K = \{1, 2\}$ et $\mathcal{B}_K = (e_1, e_2)$ ainsi on a : $M_{\emptyset 3} = M_{\emptyset 1}^{-1} M_{\emptyset 2}^{-1}$.
- Intéressons nous maintenant à l'endomorphisme M_{13} , cette fois $J = \{1\}$, $p = \{3\}$ et $K = \{1, 2\}$ et $\mathcal{B}_K = (e_1, e_2)$ on a ainsi : $M_{13} = M_{12}^{-1}$. De même, pour tout $(i, j, k) \in \{1, 2, 3\}^3$, tous les trois différents on a : $M_{ij} = M_{ik}^{-1}$.

Théorème 1. Les catégories \mathcal{C}_Δ et Perv_Δ sont équivalentes.

En utilisant la notion de champ constructible, nous étendons l'équivalence de GGM en une équivalence de champs sur \mathbb{C}^n . Puis nous recollons des exemplaires de ces champs le long des isomorphismes toriques pour définir, pour toute variété torique lisse X , un champ \mathcal{C}_X équivalent au champ des faisceaux pervers sur X . En explicitant les sections globales de \mathcal{C}_X on obtient l'équivalence cherchée. Les conditions (i) à (iii) sont données par l'équivalence de GGM, la condition (iv) vient des morphismes toriques de recollement.

Remerciements

Cette note est issue de ma thèse [5]. Je remercie mon directeur Ph. Maisonobe pour sa disponibilité et I. Waschkes pour les nombreuses discussions, ainsi que P. Abbrugiati pour un certain lemme d'algèbre linéaire.

Références

- [1] G. Barthel, L. Kaup, J.-P. Brasselet, K.-H. Fieseler, Hodge–Riemann relations for polytopes: a geometric approach, *Singularity Theory* (2007) 379–410.
- [2] A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne, Faisceaux pervers, *Astérisque* 100 (1982) 5–171.
- [3] T. Braden, M. Grinberg, Perverse sheaves on rank stratifications, *Duke Math. J.* 96 (1999) 317–361.
- [4] P. Bressler, V.-A. Lunts, Intersection cohomology on nonrational polytopes, *Compositio Math.* 135 (2003) 245–278.
- [5] D. Dupont, Exemples de classifications du champ des faisceaux pervers, Nice, Université de Nice–Sophia Antipolis, arXiv:0903.4689v1, 2008.
- [6] A. Galligo, M. Granger, Ph. Maisonobe, \mathcal{D} -modules et faisceaux pervers dont le support singulier est un croisement normal, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* (1985).
- [7] F. Gudiol Rodríguez, L. Narváez Macarro, Explicit models for perverse sheaves, in: *Proceedings of the International Conference on Algebraic Geometry and Singularities*, Sevilla, 2001, *Rev. Mat. Iberoamericana* 19 (2003) 425–454.
- [8] R. MacPherson, K. Vilonen, Elementary construction of perverse sheaves, *Invent. Math.* 84 (1986) 403–435.
- [9] Ph. Maisonobe, Faisceaux pervers dont le support singulier est une courbe plane, *Compositio Math.* 62 (1987) 215–261.
- [10] D. Treumann, Exit paths and constructible stacks, *Compositio Math.* 145 (2009) 1504–1532.
- [11] D. Treumann, Stacks similar to the stack of perverse sheaves, arXiv:0801.3016v1, 2008.