C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 348 (2010) 727–729

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Algèbre

Sur la lissification de type Płoski–Popescu

About the Płoski–Popescu smoothing theorem

Guillaume Rond

Institut de mathématiques de Luminy, campus de Luminy, case 907, 13288 Marseille cedex 9

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 3 juin 2009
Accepté après révision le 15 juin 2010

Présenté par Michel Raynaud

RÉSUMÉ

Nous démontrons une version du théorème de lissification de D. Popescu pour les W-systèmes au sens de J. Denef et L. Lipschitz. Ceci généralise la version pour les équations analytiques en caractéristique nulle due à A. Płoski.

ABSTRACT

We prove a version of the Popescu's smoothing theorem for W-systems defined by J. Denef and L. Lipschitz. This generalizes Płoski's version for analytic equations in characteristic zero.

1. Introduction

Dans [2] Michael Artin a montré le théorème d'approximation suivant en caractéristique nulle (étendu à la caractéristique positive par Michel André [1]) :

Théorème 1.1. *(Voir [2,1].) Soient $f_1, \dots, f_p \in \mathbb{k}\{x, y\}$ (où $\mathbb{k}$ est un corps valué complet et où $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_m)$). Pour tous $\overline{y}_i(x) \in (x)\mathbb{k}[\![x]\!]$, $1 \leqslant i \leqslant m$, tels que $f_j(x, \overline{y}(x)) = 0$, $1 \leqslant j \leqslant p$, et pour tout $c \in \mathbb{N}$, il existe $\widetilde{y}_i(x) \in (x)\mathbb{k}\{x\}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, tels que $f_j(x, \widetilde{y}(x)) = 0$, $1 \leqslant j \leqslant p$, et $\widetilde{y}_i(x) - \overline{y}_i(x) \in (x)^c$, $1 \leqslant i \leqslant m$.*

Ce résultat a été généralisé dans deux directions. La première généralisation, due à Jan Denef et Leonard Lipshitz, est la suivante (la définition précise d'un W-système est donnée plus loin ; notons néanmoins que les anneaux de séries algébriques, convergentes ou Gevrey forment des W-systèmes) :

Théorème 1.2. *(Voir [4].) Soit $\mathbb{k}$ un corps ou un anneau de valuation discrète d'idéal maximal $\mathfrak{p}$. Soit $\mathbb{k}\lceil u \rceil$ un W-système sur $\mathbb{k}$ ($u = (u_1, \dots, u_l)$). Alors pour tous $f_1, \dots, f_p \in \mathbb{k}\lceil x, y \rceil$, pour tout $c \in \mathbb{N}$ et pour tous $\overline{y} \in (\mathfrak{p}, x)\widehat{\mathbb{k}}[\![x]\!]^m$ tels que $f_j(\overline{y}) = 0$, $1 \leqslant j \leqslant p$, il existe $\widetilde{y}_i(x) \in (\mathfrak{p}, x)\mathbb{k}\lceil x \rceil^m$, $1 \leqslant i \leqslant n$, tels que $f(\widetilde{y}(x)) = 0$ and $\widetilde{y}(x)_i - \overline{y}_i(x) \in (\mathfrak{p}, x)^c$.*

La seconde généralisation, faites en plusieurs étapes par plusieurs auteurs (voir en particulier [3]), est que les équations algébriques à coefficients dans un anneau local nœthérien hensélien excellent satisfont la propriété d'approximation de Artin. La version la plus générale est la suivante :

Adresse e-mail : rond@iml.univ-mrs.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2010.06.018

Théorème 1.3. *(Voir [7].) Soit $(A,\mathfrak{m})$ un anneau local nœthérien hensélien excellent et soient $f_1,\dots,f_p\in A[y]$. Pour tous $\overline{y}_i\in\widehat{A}$, $1\leqslant i\leqslant m$, tels que $f_j(\overline{y})=0$, $1\leqslant j\leqslant p$, et pour tout $c\in\mathbb{N}$, il existe $\widetilde{y}_i\in A$, $1\leqslant i\leqslant m$, tels que $f_j(\widetilde{y})=0$, $1\leqslant j\leqslant p$, et $\widetilde{y}_i-\overline{y}\in\mathfrak{m}^c$, $1\leqslant i\leqslant m$.*

Celle-ci découle du théorème de lissification suivant démontré en toute généralité par Dorin Popescu [7], répondant ainsi à une conjecture de Artin, analogue d'un théorème d'Arkadiusz Płoski pour les équations analytiques [6] :

Théorème 1.4. *(Voir [7].) Sous les hypothèses du Théorème 1.3, soient $\overline{y}_i\in\widehat{A}$, $1\leqslant i\leqslant m$, tels que $f_j(\overline{y})=0$, $1\leqslant j\leqslant p$. Ceci définit un morphisme de A-algèbres $\widehat{\varphi}_C : C:=A[y_1,\dots,y_m]/(f_1,\dots,f_p)\to\widehat{A}$. Alors il existe une A-algèbre lisse de type fini, notée D et des morphismes de A-algèbres $\psi : C\to D$ et $\widehat{\varphi}_D : D\to\widehat{A}$ tels que $\widehat{\varphi}_C=\widehat{\varphi}_D\circ\psi$.*

En effet, pour montrer le Théorème 1.3, il nous faut trouver un morphisme $C\to A$ qui coïncide avec $C\to\widehat{A}$ modulo $\mathfrak{m}^c$. On peut remplacer C par D, et comme D est lisse sur A, localement $A\to D$ est la composition d'un morphisme de la forme $A\to A[t_1,\dots,t_s]$ et d'un morphisme étale $A[t_1,\dots,t_s]\to D$. On choisit alors des éléments $\widetilde{t}_k\in A$ tels que $\widetilde{t}_k-\bar{t}_k\in\mathfrak{m}^c$, $1\leqslant k\leqslant s$. Puis, comme le morphisme $A\to D':=D/(t_1-\widetilde{t}_1,\dots,t_s-\widetilde{t}_s)$ est étale et que A est hensélien, ce morphisme admet une section. Cette section composée avec le morphisme $D\to D'$ coïncide avec $D\to\widehat{A}$ modulo $\mathfrak{m}^c$.

La version pour les équations analytiques de A. Płoski de ce résultat est le suivant :

Théorème 1.5. *(Voir [6].) Soit $\mathbb{k}$ un corps valué non discret de caractéristique nulle. Soient $f_1,\dots,f_p\in\mathbb{k}\{x,y\}$ (comme dans le Théorème 1.1). Soient $\overline{y}_i(x)\in(x)\mathbb{k}[\![x]\!]$, $1\leqslant i\leqslant m$, tels que $f_j(x,\overline{y}(x))=0$, $1\leqslant j\leqslant p$. Alors il existe $y_i(t)\in(t)\mathbb{k}\{t\}$ $(t=(t_1,\dots,t_s))$, $1\leqslant i\leqslant m$, et $\bar{t}_k\in(x)\mathbb{k}[\![x]\!]$, $1\leqslant k\leqslant s$, tels que $f_j(y(t))=0$, $1\leqslant j\leqslant p$, et $\overline{y}_i=y_i(\bar{t})$, $1\leqslant i\leqslant m$.*

Le but de cette note est de donner une version du théorème de lissification de D. Popescu dans le cadre des W-systèmes (en particulier en caractéristique positive ou en inégale caractéristique où la preuve de A. Płoski ne s'adapte pas directement), généralisant ainsi la version analytique de A. Płoski. Pour cela nous utilisons le Théorème 1.3 de D. Popescu et le théorème des fonctions implicites valable dans le cas des W-systèmes. Ceci montre, en quelque sorte, que le théorème de lissification de D. Popescu est la généralisation la plus "forte" du théorème d'approximation de Artin puisque ses autres avatars s'en déduisent. Le résultat que nous montrons ici est le suivant :

Théorème 1.6. *Soit $\mathbb{k}$ un corps ou un anneau de valuation discrète d'idéal maximal $\mathfrak{p}$. Soit $\mathbb{k}\lceil\!\lceil u\rceil\!\rceil$ un W-système sur $\mathbb{k}$ $(u=(u_1,\dots,u_l))$. Soient $f_1,\dots,f_p\in\mathbb{k}\lceil\!\lceil x,y\rceil\!\rceil$ et soit $\overline{y}\in(\mathfrak{p},x)\widehat{\mathbb{k}}[\![x]\!]^m$ tels que $f_j(\overline{y})=0$, $1\leqslant j\leqslant p$. Alors il existe $y_i(t)\in(\mathfrak{p},t)\mathbb{k}\lceil\!\lceil t\rceil\!\rceil$ $(t=(t_1,\dots,t_s))$, $1\leqslant i\leqslant m$, et $\bar{t}_k\in(\mathfrak{p},x)\widehat{\mathbb{k}}[\![x]\!]$, $1\leqslant k\leqslant s$, tels que $f_j(y(t))=0$, $1\leqslant j\leqslant p$, et $\overline{y}_i=y_i(\bar{t})$, $1\leqslant i\leqslant m$.*

2. Rappels sur les W-systèmes

Dans la suite $\mathbb{k}$ sera un corps ou un anneau de valuation discrète d'idéal maximal $\mathfrak{p}$.

Définition 2.1. (Voir [4].) Un *système de Weierstrass de $\mathbb{k}$-algèbres*, ou un *W-système* sur $\mathbb{k}$, est la donnée d'une famille de $\mathbb{k}$-algèbres $\mathbb{k}\lceil\!\lceil x_1,\dots,x_n\rceil\!\rceil$, $n\in\mathbb{N}$ telle que :

i) Pour $n=0$, la $\mathbb{k}$-algèbre est $\mathbb{k}$; pour $n\geqslant 1$, $\mathbb{k}[x_1,\dots,x_n]_{(x_1,\dots,x_n)}\subset\mathbb{k}\lceil\!\lceil x_1,\dots,x_n\rceil\!\rceil\subset\mathbb{k}[\![x_1,\dots,x_n]\!]$ et $\mathbb{k}\lceil\!\lceil x_1,\dots,x_{n+m}\rceil\!\rceil\cap\mathbb{k}[\![x_1,\dots,x_n]\!]=\mathbb{k}\lceil\!\lceil x_1,\dots,x_n\rceil\!\rceil$ pour $m\in\mathbb{N}$. Pour toute permutation de $\{1,\dots,n\}$, notée σ, $\mathbb{k}\lceil\!\lceil x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}\rceil\!\rceil=\mathbb{k}\lceil\!\lceil x_1,\dots,x_n\rceil\!\rceil$.
ii) Tout élément de $\mathbb{k}\lceil\!\lceil x\rceil\!\rceil$, $x=(x_1,\dots,x_n)$, inversible dans $\mathbb{k}[\![x]\!]$, est inversible dans $\mathbb{k}\lceil\!\lceil x\rceil\!\rceil$.
iii) Soit $f\in(x)\mathbb{k}\lceil\!\lceil x\rceil\!\rceil$ tel que $f(0,\dots,0,x_n)\neq 0$. Notons $d:=\mathrm{ord}_{x_n}f(0,\dots,0,x_n)$. Alors pour tout $g\in\mathbb{k}\lceil\!\lceil x\rceil\!\rceil$ il existe $q\in\mathbb{k}\lceil\!\lceil x\rceil\!\rceil$ et $r\in\mathbb{k}\lceil\!\lceil x_1,\dots,x_{n-1}\rceil\!\rceil[x_n]$ uniques avec $\deg_{x_n}r<d$ tels que $g=qf+r$.
iv) (si $car(\mathbb{k})>0$) Soient $h\in(y_1,\dots,y_m)\mathbb{k}[\![y_1,\dots,y_m]\!]$ et $f\in\mathbb{k}\lceil\!\lceil x_1,\dots,x_n\rceil\!\rceil$ tels que $f\neq 0$ et $f(h)=0$. Alors il existe $g\in\mathbb{k}\lceil\!\lceil x\rceil\!\rceil$ irréductible dans $\mathbb{k}\lceil\!\lceil x\rceil\!\rceil$ tel que $g(h)=0$ et tel qu'il n'existe aucun élément inversible $u(x)\in\mathbb{k}\lceil\!\lceil x\rceil\!\rceil$ avec $u(x)g(x)=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}a_\alpha x^{p\alpha}$ $(a_\alpha\in\mathbb{k})$.

Remarque 1. Soit $\mathbb{k}\lceil\!\lceil x\rceil\!\rceil$ un W-système sur $\mathbb{k}$.

i) L'anneau $\mathbb{k}\lceil\!\lceil x_1,\dots,x_n\rceil\!\rceil$ $(n\in\mathbb{N})$ est un anneau local régulier nœthérien d'idéal maximal $(x_1,\dots,x_n)$ et de complété $\mathbb{k}[\![x]\!]$. De plus ces anneaux vérifient le théorème des fonctions implicites (cf. [4]).
ii) D'après [4], pour tous $f\in\mathbb{k}\lceil\!\lceil x_1,\dots,x_{n+m}\rceil\!\rceil$ et $g_1,\dots,g_m\in(x)\mathbb{k}\lceil\!\lceil x_1,\dots,x_n\rceil\!\rceil$,

$$f\big(x_1,\dots,x_n,g_1(x),\dots,g_m(x)\big)\in\mathbb{k}\lceil\!\lceil x_1,\dots,x_n\rceil\!\rceil.$$

iii) Pour tout $f\in\mathbb{k}\lceil\!\lceil x\rceil\!\rceil$, si il existe $g\in\mathbb{k}[\![x]\!]$ tel que $f=x_1g$, alors $g\in\mathbb{k}\lceil\!\lceil x\rceil\!\rceil$ [4].
iv) D'après le théorème 44.4 de [5], la condition iii) implique que $\mathbb{k}\lceil\!\lceil x\rceil\!\rceil$ est local hensélien.

v) Il est prouvé dans [4] que $k[\![x]\!]$ vérifie la propriété d'approximation de Artin, et d'après [8] (où il est montré qu'un anneau local nœthérien qui vérifie la propriété d'approximation de Artin est excellent), on voit que $\Bbbk[\![x]\!]$ est excellent. Dans [4] (Remark 10) il est montré que si une famille d'anneaux excellents satisfait i), ii) and iii), alors elle satisfait iv).

3. Preuve du Théorème 1.6

On peut remarquer que $f_1 = f_2 = 0$ si et seulement si $f_1^2 + x_1 f_2^2 = 0$ car $-x_1$ n'est pas un carré. On peut donc remplacer $f_1, f_2, \dots, f_p$ par $f_1^2 + x_1 f_2^2, f_3, \dots, f_p$. Par induction, on peut supposer que $p = 1$ en remplaçant $(f_1, \dots, f_p)$ par

$$f := f_1^2 + x_1\bigl(f_2^2 + x_1\bigl(f_3^2 + x_1\bigl(\cdots + x_1 f_p^2\bigr)^2\bigr)^2 \cdots\bigr)^2.$$

Par hypothèse il existe $\bar{h}_i(x, y) \in \widehat{\Bbbk}[\![x, y]\!]$, $1 \leqslant i \leqslant m$, tels que $f(y) + \sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y}_i(x))\bar{h}_i(x, y) = 0$. Notons $P(z, h) := f(y) + \sum_{i=1}^m (y_i - z_i)h_i \in \Bbbk[\![x, y]\!][z, h]$ et $C := \Bbbk[\![x, y]\!][z, h]/(P)$. On a donc un morphisme de $\Bbbk[\![x, y]\!]$-algèbres $C \to \Bbbk[\![x, y]\!]$. Comme l'anneau $\Bbbk[\![x, y]\!]$ est hensélien et excellent, il satisfait le Théorème 1.4, et il existe donc une $\Bbbk[\![x, y]\!]$-algèbre lisse de type finie $D := \Bbbk[\![x, y]\!][t_1, \dots, t_s]/I$ et un morphisme $D \to \Bbbk[\![x, y]\!]$ qui factorise le morphisme $C \to \Bbbk[\![x, y]\!]$. Ce morphisme induit un morphisme de $D' := \Bbbk[\![x, y, t]\!]/I$ vers $\Bbbk[\![x, y]\!]$. Comme D est lisse, si $I = (g_1, \dots, g_k)$, alors $(\frac{\partial g_i}{\partial t_j})_{i,j}$ est de rang maximal modulo $(\mathfrak{p}, x, y)$, et comme $\Bbbk[\![x, y, t]\!]$ satisfait le théorème des fonctions implicites, on peut supposer que $I = (0)$. Donc il existe $z_i(x, y, t), h_i(x, y, t) \in \Bbbk[\![x, y, t]\!]$, $1 \leqslant i \leqslant m$, et $\bar{t}_k \in \widehat{\Bbbk}[\![x, y]\!]$, $1 \leqslant k \leqslant s$, tels que $(*)$ $\bar{y}_i(x) = z_i(x, y, \bar{t}(x, y))$ et $\bar{h}_i(x, y) = h_i(x, y, \bar{t}(x, y))$, $1 \leqslant i \leqslant n$, et

$$f(y) + \sum_{i=1}^m \bigl(y_i - z_i(x, y, t)\bigr)h_i(x, y, t) = 0.$$

On peut écrire $\bar{t}_k := t_{k,1} + \bar{t}_{k,2}$ avec $t_{k,1} \in \Bbbk[\![x, y]\!]$ et $\bar{t}_{k,2} \in (\mathfrak{p}, x, y)^2\widehat{\Bbbk}[\![x, y]\!]$, $1 \leqslant k \leqslant s$. En remplaçant alors $z_i(x, y, t)$ par $z_i(x, y, t_{1,1} + t_1, \dots, t_{s,1} + t_s)$ et, de la même manière, $h_i(x, y, t)$ par $h_i(x, y, t_{1,1} + t_1, \dots, t_{s,1} + t_s)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, on peut supposer que $\bar{t}_k \in (\mathfrak{p}, x, y)^2\widehat{\Bbbk}[\![x, y]\!]$, $1 \leqslant k \leqslant s$.

Montrons que le déterminant de la matrice des dérivées partielles des $y_i - z_i(x, y, t)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, par rapport aux variables $y_1, \dots, y_m$ vaut 1 modulo $(\mathfrak{p}, x, y, t)$: fixons i et j et supposons que $\frac{\partial z_j}{\partial y_i} \neq 0$ modulo $(\mathfrak{p}, x, y, t)$. Alors il existe $\lambda_{j,i}$ inversible tel que

$$z_j - \lambda_{j,i} y_i \in (y_i)^2 + (\mathfrak{p}, x, y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_m, t).$$

Donc $\bar{y}_j(x) = z_j(x, y, \bar{t}(x, y)) = \lambda_{j,i} y_i + \varepsilon_i$ avec $\varepsilon_i \in (y_i)^2 + (\mathfrak{p}, x, y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_m, t)$ car $\bar{t}_k \in (\mathfrak{p}, x, y)^2\widehat{\Bbbk}[\![x, y]\!]$, $1 \leqslant k \leqslant s$. Ceci est impossible car $\bar{y}_j(x)$ ne dépend pas de y_i, donc $\frac{\partial z_j}{\partial y_i} = 0$ modulo $(\mathfrak{p}, x, y, t)$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$, et le déterminant de la matrice des dérivées partielles des $y_i - z_i(x, y, t)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, par rapport aux variables $y_1, \dots, y_m$ vaut 1 modulo $(\mathfrak{p}, x, y, t)$. L'anneau $\Bbbk[\![x, y, t]\!]$ vérifiant le théorème des fonctions implicites, il existe $y_i(x, t) \in \Bbbk[\![x, t]\!]$, $1 \leqslant i \leqslant m$, tels que

$$y_i(x, t) - z_i\bigl(x, y(x, t), t\bigr) = 0 \quad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{$**$}$$

Donc $f(y(x, t)) = 0$.

Notons $\bar{t}_k^{(0)}(x) := \bar{t}_k(x, 0)$, et pour $l \geqslant 0$, $\bar{t}_k^{(l+1)}(x) := \bar{t}_k(x, y(x, \bar{t}^{(l)}(x)))$, pour $1 \leqslant k \leqslant s$. Alors $\bar{t}_k^{(1)}(x) - \bar{t}_k^{(0)}(x) \in (\mathfrak{p}, x)^2\widehat{\Bbbk}[\![x]\!]$, $1 \leqslant k \leqslant s$, et

$$\bar{t}_k^{(l+1)}(x) - \bar{t}_k^{(l)}(x) \in \bigl(\bar{t}^{(l)}(x) - \bar{t}^{(l-1)}(x)\bigr)^2\widehat{\Bbbk}[\![x]\!], \quad 1 \leqslant k \leqslant s,\ l \geqslant 1$$

car $\bar{t}_k \in (\mathfrak{p}, x, y)^2\widehat{\Bbbk}[\![x, y]\!]$, $1 \leqslant k \leqslant s$. Donc $(\bar{t}_k^{(l)}(x))_{l\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy qui converge vers un élément $\bar{t}_k(x)$, pour $1 \leqslant k \leqslant s$. Donc en remplaçant t par $\bar{t}^{(l)}(x)$ dans $(**)$ et en utilisant $(*)$, on obtient $\bar{y}_i(x) = y_i(x, \bar{t}(x))$, $1 \leqslant i \leqslant m$, en passant à la limite, ce qui prouve le résultat.

Références

[1] M. André, Artin's theorem on the solutions of analytic equations in positive characteristic, Manuscripta Math. 15 (4) (1975) 341–347.
[2] M. Artin, On the solutions of analytic equations, Invent. Math. 5 (1968) 177–291.
[3] M. Artin, Algebraic approximation of structures over complete local rings, Publ. Math. IHES 36 (1969) 23–58.
[4] J. Denef, L. Lipshitz, Ultraproducts and approximation in local rings. II, Math. Ann. 253 (1) (1980) 1–28.
[5] M. Nagata, Local Rings, Interscience, New York, 1962.
[6] A. Płoski, Note on a theorem of M. Artin, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 22 (1974) 1107–1109.
[7] D. Popescu, General Néron desingularization, Nagoya Math. J. 100 (1985) 97–126.
[8] C. Rotthaus, Rings with approximation property, Math. Ann. 287 (3) (1990) 455–466.