



Probabilités

Convergence du processus de sommes partielles vers un processus de Lévy pour les suites associées

Convergence of partial sum processes to Lévy processes for associated sequences

Sana Louhichi^{a,1}, Emmanuel Rio^b^a UMR 5525 CNRS, université Joseph-Fourier, laboratoire Jean-Kuntzmann, tour I.R.M.A., 51, rue des mathématiques, BP 53, 38041 Saint Martin d'Hères cedex, France^b UMR 8100 CNRS, université de Versailles Saint-Quentin en Yvelines, laboratoire de mathématiques, bâtiment Fermat, 45, avenue des Etats-Unis, 78035 Versailles cedex, France

I N F O A R T I C L E

Historique de l'article :

Reçu le 12 juillet 2010

Accepté après révision le 6 décembre 2010

Disponible sur Internet le 23 décembre

2010

Présenté par Michel Talagrand

R É S U M É

Dans cette Note, nous montrons que pour les suites de variables aléatoires réelles, associées et strictement stationnaires, la convergence des marginales de dimensions finies du processus des sommes partielles convenablement normalisé vers celles d'un processus de Lévy stable implique sa convergence vers ce processus de Lévy stable, sous la M_1 -topologie de Skorohod.

© 2010 Publié par Elsevier Masson SAS pour l'Académie des sciences.

A B S T R A C T

In this Note we prove that, if for a suitably normalized version of the partial-sum process associated to a strictly stationary and associated sequence of real-valued random variables, the finite dimensional convergence to a Lévy stable motion holds, then the partial-sum process converges to this Lévy stable motion in the M_1 -topology of Skorohod.

© 2010 Publié par Elsevier Masson SAS pour l'Académie des sciences.

1. Introduction et résultat principal

Soit X_1, X_2, \dots une suite de variables aléatoires réelles. La suite X_1, X_2, \dots est dite associée si, pour tout n , le vecteur $X^{(n)} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ satisfait la condition suivante : pour toute paire f, g de fonctions bornées de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} croissantes coordonnée par coordonnée, $\text{Cov}(f(X^{(n)}), g(X^{(n)})) \geq 0$. En particulier les suites de variables aléatoires indépendantes sont associées, ainsi que les processus linéaires à coefficients positifs, et certaines chaînes de Markov, dites stochastiquement monotones.

On pose $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Le processus de sommes partielles $\{S_n(t) : t \in [0, 1]\}$ est défini par $S_n(t) = S_{[nt]}$, les crochets désignant la partie entière. [2] ont montré que pour les suites strictement stationnaires de variables aléatoires réelles de moyenne nulle et de variance finie, associées, le processus $\{n^{-1/2}S_n(t) : t \in [0, 1]\}$ converge dans $D([0, 1])$ vers un mouvement brownien dès que la série de covariances $\text{Var}(X_1) + 2 \sum_{i>1} \text{Cov}(X_1, X_i)$ converge. Il n'existe pas d'analogue de ce résultat pour la convergence vers les processus de Lévy d'indice $\alpha < 2$. Une des raisons semble en être que, pour les suites dépendantes, la convergence sous la J_1 -topologie de Skorohod n'est pas toujours vraie (voir [5] à ce sujet). En effet la J_1 -topologie de Skorohod n'autorise pas l'accumulation de petits sauts près d'un saut du processus limite, contrairement

Adresses e-mail : Sana.Louhichi@imag.fr (S. Louhichi), Emmanuel.Rio@math.uvsq.fr (E. Rio).

¹ Partiellement supporté par ANR grant ANR-08-BLAN-0314-02.

à la M_1 -topologie de Skorohod, qui semble donc plus adaptée au cas des processus dépendants. Donnons maintenant le critère de tension de Skorohod pour la convergence en M_1 -topologie.

Dans ce qui suit, on pose pour y_1, y_2 et y_3 réels, $\|y_2 - [y_1, y_3]\| = \inf_{t \in [y_1, y_3]} |y_2 - t|$. Pour ξ fonction dans l'espace de Skorohod $D([0, 1])$, soit

$$\omega(\xi, \delta) = \sup_{t \in [0, 1]} \sup \{ \|\xi(t_2) - [\xi(t_1), \xi(t_3)]\| : (t - \delta) \vee 0 \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq (t + \delta) \wedge 1 \}.$$

Un théorème de Skorohod ([4], nous renvoyons à [6, Chap. 12], pour un exposé clair) affirme que si, pour une suite (ξ_n) de processus à valeurs dans $D([0, 1])$,

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\omega(\xi_n, \delta) > \varepsilon) = 0 \tag{1}$$

pour tout $\varepsilon > 0$, alors la suite (ξ_n) est tendue dans l'espace de Skorohod muni de la M_1 -topologie de Skorohod.

Le théorème ci-dessous montre que, pour les suites associées, la tension en M_1 -topologie pour une version convenablement normalisée de $S_n(\cdot)$ vers un processus de Lévy d'indice $\alpha < 2$ a lieu dès que la convergence des marginales de dimension finie est satisfaite.

Théorème 1.1. Soit X_1, X_2, \dots une suite strictement stationnaire de variables aléatoires réelles, associée, α réel dans $]0, 2[$ et $(a_n)_{n>0}$ une suite croissante de réels strictement positifs, à variation régulière d'indice $1/\alpha$, telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. Supposons qu'il existe une suite $(b_n)_n$ de réels telle que $C := \sup\{|b_k - b_n| : 0 < n \leq k \leq 2n < \infty\} < \infty$, et que $a_n^{-1}(S_n - nb_n)$ converge en loi vers Y_α , variable satisfaisant la condition

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\alpha/2} \mathbb{P}(|Y_\alpha| \geq x) = 0. \tag{2}$$

Soit ξ_n le processus défini sur $[0, 1]$ par $\xi_n(t) = a_n^{-1}(S_n(t) - [nt]b_n)$. Supposons que $\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n/n) > 0$ ou $C = 0$. Alors (1) est satisfaite pour tout $\varepsilon > 0$.

Remarque 1. Ce résultat concerne la tension. Pour établir la convergence du processus vers un processus de Lévy, il faut de plus que la convergence des marginales ait lieu. C'est connu pour les processus linéaires strictement stationnaires à coefficients positifs dont les innovations sont dans le domaine d'attraction d'une loi stable d'indice α dans $]1, 2[$. Dans ce cas $a_n^{-1}S_n(\cdot)$ converge vers un processus de Lévy α -stable en M_1 -topologie dès que les coefficients du processus linéaire sont positifs et sommables, ce qui améliore un peu le théorème 2 de [1]. Par contre il n'y a pas convergence en J_1 -topologie dès que deux coefficients au moins sont non nuls (voir leur théorème 1). Dans un article en préparation, nous donnerons de nouveaux exemples, pris dans les chaînes de Markov stochastiquement monotones.

2. Preuve du théorème

Nous allons donner les grandes étapes de la preuve. Certains détails seront omis. Pour n_1, n_2 et n_3 entiers, on pose

$$M(n_1, n_2, n_3) = \|S_{n_2} - [S_{n_1}, S_{n_3}]\| \text{ et } M_n^* = \sup_{0 \leq n_1 < n_2 < n_3 \leq n} M(n_1, n_2, n_3).$$

L'inégalité essentielle est la suivante : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(M_n^* \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}^2\left(\max_{0 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon/2\right). \tag{3}$$

La probabilité au carré dans ce majorant est spécifique à la M_1 -topologie. Pour montrer (3), on note d'abord que

$$M_n^* \leq \min\left(\sup_{0 \leq l \leq m \leq n} (S_m - S_l), \sup_{0 \leq l \leq m \leq n} (S_l - S_m)\right). \tag{4}$$

En effet, supposons par exemple que $S_{n_2} > S_{n_1}$ et $S_{n_2} > S_{n_3}$, de deux choses l'une : $S_{n_3} \leq S_{n_1}$ ou $S_{n_3} > S_{n_1}$. Dans le premier cas, $M(n_1, n_2, n_3) = S_{n_2} - S_{n_1} = \min(S_{n_2} - S_{n_1}, S_{n_2} - S_{n_3})$ et dans le second $M(n_1, n_2, n_3) = S_{n_2} - S_{n_3} = \min(S_{n_2} - S_{n_3}, S_{n_2} - S_{n_1})$. Donc $M(n_1, n_2, n_3)$ est toujours majoré par la partie droite de (4). Ceci montre (4) si $S_{n_2} > S_{n_1}$ et $S_{n_2} > S_{n_3}$. Les autres cas sont similaires.

Soit maintenant $W_n^+ = \sup_{0 \leq l \leq m \leq n} (S_m - S_l)$ et $W_n^- = \sup_{0 \leq l \leq m \leq n} (S_l - S_m)$. Comme W_n^+ et W_n^- sont respectivement des fonctions croissantes et décroissantes de (X_1, \dots, X_n) , l'association donne

$$\mathbb{P}(W_n^+ \geq \varepsilon, W_n^- \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(W_n^+ \geq \varepsilon)\mathbb{P}(W_n^- \geq \varepsilon).$$

Or $W_n^+ \leq 2 \max_{0 \leq l \leq n} |S_l|$ et $W_n^- \leq 2 \max_{0 \leq l \leq n} |S_l|$. Donc, en réunissant les inégalités ci-dessus

$$\mathbb{P}(M_n^* \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(W_n^+ \geq \varepsilon)\mathbb{P}(W_n^- \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}^2\left(\max_{0 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon/2\right),$$

ce qui complète la preuve de (3).

La seconde étape est de borner la médiane de $S_n^* = \max(0, S_1, S_2, \dots, S_n)$. Cette majoration se fait au moyen de l'inégalité (5) suivante. Pour X variable aléatoire réelle, on note Q_X la fonction de quantile de X , qui est l'inverse continue à droite de $H_X(x) = \mathbb{P}(X > x)$. Soit $Z_N = S_{2^N}^* - \min(0, S_{2^N})$. Alors, pour tout u dans $[0, 1[$,

$$Q_{Z_N}(u) \leq Q_{|X_1|}(u) + 2 \sum_{L=0}^{N-1} Q_{|S_{2^L}|}(u(1-u)/2). \tag{5}$$

Cette inégalité (5) permet alors d'obtenir l'inégalité de type Ottaviani suivante pour les suites stationnaires et associées. Soit $\beta_N = a_{2^N}^{-1} Q_{Z_N}(1/2)$. Alors

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \beta_N \leq 2(2^{1/\alpha} - 1)^{-1} Q_{|Y_\alpha|}((1/8) - 0) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(S_{2^N}^* \geq x + a_{2^N} \beta_N) \leq 2\mathbb{P}(S_{2^N} \geq x) \tag{6}$$

pour tout $x > 0$. Les preuves de (5) et (6), omises ici, sont fondées sur les inégalités (21) et (22) dans [3].

En partant de (3), (5) et (6), on peut alors montrer le théorème 1 comme suit. Pour n fixé, soit $X'_i = X_i - b_n$. On pose $S'_m = X'_1 + X'_2 + \dots + X'_m$ et $S'_n(t) = S'_{[nt]}$. Alors $\xi_n(t) = a_n^{-1} S'_{[nt]}$. Soit, pour tout $k \geq 3$ entier, $\delta_k = 1/k$. Il suffit de montrer (1) pour $\delta = \delta_k$. On montre d'abord, en partant de (3), que

$$\mathbb{P}(w(\xi_n, \delta_k) > \varepsilon) \leq (k-2)\mathbb{P}^2\left(\max_{0 \leq j \leq 1+[3n/k]} |S'_j| > a_n \varepsilon / 2\right). \tag{7}$$

Pour $n \geq k$, soit $N > 0$ l'entier tel que $2^{N-1} \leq [3n/k] < 2^N$. On pose

$$Z'_L = \max(0, S'_1, \dots, S'_{2^L}) - \min(0, S'_{2^L}) \quad \text{et} \quad Z''_L = \max(0, -S'_1, \dots, -S'_{2^L}) - \min(0, -S'_{2^L}).$$

En appliquant (6) aux suites $(X_i)_i$ et $(-X_i)_i$, on obtient

$$\mathbb{P}\left(\max_{0 \leq j \leq 1+[3n/k]} |S'_j| > a_n \varepsilon / 2\right) \leq 2\mathbb{P}(|S'_{2^N}| \geq a_n \varepsilon / 2 - \max(Q_{Z'_N}(1/2), Q_{Z''_N}(1/2))).$$

On montre alors, en se servant de (4), que pour k assez grand,

$$A_N := \max(Q_{Z'_N}(1/2), Q_{Z''_N}(1/2)) \leq a_n \varepsilon / 4.$$

Ainsi pour $k \geq k_0$ et n assez grand, puisque $(a_n)_{n>0}$ est croissante et à variation régulière d'indice $1/\alpha$,

$$\mathbb{P}\left(\max_{0 \leq j \leq 1+[3n/k]} |S'_j| > a_n \varepsilon / 2\right) \leq 2\mathbb{P}(|S'_{2^N}| > a_n \varepsilon / 4) \leq 2\mathbb{P}(|S'_{2^N}| > a_{2^N} (k/6)^{1/\alpha} \varepsilon / 6),$$

car $k2^N \leq 6n$. Donc, en partant de (7), pour $k \geq k_0$ et $n \geq k$,

$$\mathbb{P}(w(\xi_n, \delta_k) > \varepsilon) \leq 4k\mathbb{P}^2(a_{2^N}^{-1} |S'_{2^N}| > (k/6)^{1/\alpha} \varepsilon / 6). \tag{8}$$

Soit $\tilde{S}_m = S_m - mb_m$. Alors

$$|S'_{2^N}| \leq |\tilde{S}_{2^N}| + 2^N |b_n - b_{2^N}| \leq |\tilde{S}_{2^N}| + C2^N \log_2(k),$$

puisque $n2^{-N} \leq k/3$. Or, pour $k_1 (\geq k_0)$ assez grand, on a $C2^N \log_2(k) \leq a_{2^N} (k/6)^{1/\alpha} \varepsilon / 12$, pour tout $k \geq k_1$, pourvu que n soit assez grand. Alors (8) donne

$$\mathbb{P}(w(\xi_n, \delta_k) > \varepsilon) \leq 4k\mathbb{P}^2(a_{2^N}^{-1} |\tilde{S}_{2^N}| > (k/6)^{1/\alpha} \varepsilon / 12). \tag{9}$$

Or $a_{2^N}^{-1} \tilde{S}_{2^N}$ converge en loi vers Y_α , et donc, pour $k \geq k_1$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(a_{2^N}^{-1} |\tilde{S}_{2^N}| > (k/6)^{1/\alpha} \varepsilon / 12) \leq \mathbb{P}(|Y_\alpha| \geq (k/6)^{1/\alpha} \varepsilon / 12),$$

ce qui, combiné avec (9), implique que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(w(\xi_n, \delta_k) > \varepsilon) \leq 4k\mathbb{P}^2(|Y_\alpha| \geq (k/6)^{1/\alpha} \varepsilon / 12). \tag{10}$$

Le critère de tension (1) découle maintenant de (10) via (2). Le théorème 1 est montré.

Références

[1] F. Avram, M.S. Taqqu, Weak convergence of sums of moving averages in the α -stable domain of attraction, *Annals of Probability* 20 (1992) 483–503.
 [2] C.M. Newman, A.L. Wright, An invariance principle for certain dependent sequences, *Annals of Probability* 9 (1981) 671–675.
 [3] C.M. Newman, A.L. Wright, Associated random variables and martingale inequalities, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* 59 (1982) 361–371.
 [4] A.V. Skorohod, Limit theorems for stochastic processes, *Theory Probab. Appl.* 1 (1956) 261–290.
 [5] M. Tyran-Kamińska, Weak convergence to Lévy stable processes in dynamical systems, *Stochastics and Dynamics* 10 (2010) 263–269.
 [6] W. Whitt, *Stochastic-Process Limits*, Springer Series in Operations Research, Springer-Verlag, New-York, 2002.