C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 349 (2011) 629–632

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Analyse mathématique

Une remarque sur la valeur absolue dans certains espaces de Sobolev ou de Besov

Remark on the absolute value in Sobolev spaces

Pierre Gilles Lemarié-Rieusset

Laboratoire analyse et probabilités, EA2172, Université d'Évry Val d'Essonne, 91025 Évry cedex, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 27 avril 2011
Accepté après révision le 9 mai 2011
Disponible sur Internet le 31 mai 2011

Présenté par Yves Meyer

RÉSUMÉ

Nous démontrons, pour $1/2 < s < 1$, l'équivalence entre la norme H^s de f et celle de $|f|$.

© 2011 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

ABSTRACT

We show, for $1/2 < s < 1$, the equivalence between the H^s norm of f and the norm of $|f|$.

© 2011 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Énoncé des théorèmes

Définition 1. Si $0 < s < 1$, l'espace $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions f localement de carré intégrable qui vérifient

$$\|f\|_{\dot{H}^s}^2 = \iint\limits_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < +\infty$$

Nous allons démontrer le résultat suivant :

Théorème 1. *Si $1/2 < s < 1$, si f est une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$, alors $f \in \dot{H}^s$ si et seulement si $|f| \in \dot{H}^s$ et il existe une constante $C_{s,n} > 0$ qui ne dépend que de s et de n telle que*

$$\big\||f|\big\|_{\dot{H}^s} \leqslant \|f\|_{\dot{H}^s} \leqslant C_{s,n}\big\||f|\big\|_{\dot{H}^s}$$

Le théorème s'étend au cas des espaces de Besov $\dot{B}_p^{s,p}$:

Définition 2. Si $0 < s < 1$ et $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, l'espace $\dot{B}_p^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions f mesurables pour la mesure de Lebesgue qui vérifient

$$\|f\|_{\dot{B}_p^{s,p}} = \left\| \frac{\|f(x)-f(x+h)\|_p}{|h|^s} \right\|_{L^p(\frac{\mathrm{d}h}{|h|^n})} < +\infty$$

Adresse e-mail : plemarie@univ-evry.fr.

1631-073X/$ – see front matter © 2011 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2011.05.003

On a alors le résultat suivant :

Théorème 2. *Si $1 < p \leqslant +\infty$ et $1/p < s < 1$, si f est une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$, alors $f \in \dot{B}^{s,p}_p(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $|f| \in \dot{B}^{s,p}_p(\mathbb{R}^n)$ et il existe une constante $C_{s,p,n} > 0$ qui ne dépend que de s, de p et de n telle que*

$$\big\||f|\big\|_{\dot{B}^{s,p}_p} \leqslant \|f\|_{\dot{B}^{s,p}_p} \leqslant C_{s,p,n}\big\||f|\big\|_{\dot{B}^{s,p}_p}$$

2. Le cas $p = +\infty$

Le cas $p = +\infty$ est trivial. L'espace $\dot{B}^{s,\infty}_\infty$ est l'espace des fonctions höldériennes. Pour vérifier que f est höldérienne si $|f|$ l'est, il suffit de remarquer que si $f(x)f(y) < 0$ et si f est continue, alors (théorème des valeurs intermédiaires) il existe $z \in [x, y]$ tel que $f(z) = 0$. On écrit alors

$$\big|f(x) - f(y)\big| \leqslant \big|\big|f(x)\big| - \big|f(z)\big|\big| + \big|\big|f(z)\big| - \big|f(y)\big|\big| \leqslant 2\big\||f|\big\|_{\dot{B}^{s,\infty}_\infty}|x - y|^s$$

3. Le cas $n = 1$ et $p < +\infty$

Dans le cas de la dimension 1, l'espace $\dot{B}^{s,p}_p$ pour $1/p < s < 1$ est composé de fonctions continues et nous allons montrer une version précisée de l'inégalité de Hardy [2,6] :

Lemme 1. *Si $1/p < s < 1$ et $1 < p < +\infty$, il existe une constante $C_{s,p} > 0$ telle que, pour tous $a < b \leqslant +\infty$*

$$\int_a^b \frac{|f(x) - f(a)|^p}{|x - a|^{ps}}\,\mathrm{d}x \leqslant C_{s,p} \iint\limits_{[a,b]\times[a,b]} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{1+ps}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Preuve. Par convergence monotone, il suffit de traiter le cas $b < +\infty$. Par invariance par translation ou par dilatation, on peut supposer $a = 0$ et $b = 1$. Quitte à régulariser f en $\omega * f$ avec $\omega \in \mathcal{D}$, on peut supposer que f est $\mathcal{C}^\infty$ et donc que le membre de gauche de l'inégalité est fini. On pose $N(f) = \iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{1+ps}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ et $A(f) = \int_0^1 \frac{|f(x)-f(0)|^p}{|x|^{ps}}\,\mathrm{d}x$.

Pour estimer $A(f)$, on écrit

$$A(f) = \frac{ps}{2^{ps} - (\frac{3}{2})^{ps}} \int_0^1 \big|f(x) - f(0)\big|^p \int_{x/3}^{x/2} \frac{\mathrm{d}y}{|x - y|^{1+ps}}\,\mathrm{d}x$$

et donc

$$\big(A(f)\big)^{1/p} \leqslant \left(\frac{ps}{2^{ps} - (\frac{3}{2})^{ps}} N(f)\right)^{1/p} + \left(\frac{ps}{2^{ps} - (\frac{3}{2})^{ps}} \int_0^1 \int_{x/3}^{x/2} \frac{|f(y) - f(0)|^p}{|x - y|^{1+ps}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

et finalement

$$\big(A(f)\big)^{1/p} \leqslant \left(\frac{ps}{2^{ps} - (\frac{3}{2})^{ps}} N(f)\right)^{1/p} + \left(\frac{1 - 2^{-ps}}{2^{ps} - (\frac{3}{2})^{s}} A(f)\right)^{1/p}$$

Appliquant les accroissements finis à $2^{ps} - 1^{ps}$ et à $4^{ps} - 3^{ps}$, et puisque $ps > 1$, on voit que $\frac{1-2^{-ps}}{2^{ps}-(\frac{3}{2})^{ps}} < 1$, ce qui permet de contrôler $A(f)$ par $N(f)$. $\square$

Cette inégalité a pour corollaires les lemmes suivants :

Lemme 2. *Si $1/p < s < 1$ et $1 < p < +\infty$, il existe une constante $C_{s,p} > 0$ telle que, pour tout $f \in \dot{B}^{s,p}_p(\mathbb{R})$ et tout intervalle ouvert I tels que $f(x) = 0$ aux extrémités de I, on a*

$$\|f 1_I\|_{\dot{B}^{s,p}_p} \leqslant C_{s,p}\|f\|_{\dot{B}^{s,p}_p}$$

Lemme 3. *Si $1/p < s < 1$ et $1 < p < +\infty$, il existe une constante $C_{s,p} > 0$ telle que, pour tout $f \in \dot{B}^{\dot{s},p}_p(\mathbb{R})$ et tout intervalle ouvert I tels que $f(x) = 0$ pour tout $x \notin I$, on a*

$$\iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{1+ps}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant C_{s,p} \iint\limits_{I\times I} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{1+ps}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Preuve. On écrit $I =]a,b[$. On pose $N(f) = \iint_{I\times I} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{1+ps}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $A(f) = \int_I \frac{|f(x)-f(a)|^p}{|x-a|^{ps}}\,\mathrm{d}x$ (si $a=-\infty$, on pose $A=0$) et $B(f) = \int_I \frac{|f(x)-f(b)|^p}{|b-x|^{ps}}\,\mathrm{d}x$ (si $b=+\infty$, on pose $B=0$). Si f est nulle en dehors de I, on vérifie facilement $\|f\|^p_{\dot{B}^{s,p}_p} = N(f) + \frac{2}{ps}(A(f)+B(f))$ et on applique le lemme 1. $\square$

Nous pouvons alors énoncer le lemme principal :

Lemme 4. *Si $1/p < s < 1$ et $1 < p < +\infty$, il existe une constante $C_{s,p} > 0$ telle que, pour tout $f \in \dot{B}^{s,p}_p(\mathbb{R})$, si $\Omega_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$ et si $\Omega_f = \sum_{k\in K} I_k$, $K \subset \mathbb{N}$, est la décomposition de Ω_f en intervalles ouverts disjoints, on a*

$$\sum_{k\in K} \iint\limits_{I_k\times I_k} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{1+ps}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant \iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{1+ps}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leqslant C_s \sum_{k\in K} \iint\limits_{I_k\times I_k} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{1+ps}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Preuve. On pose $f_k = 1_{I_k} f$, $I_k =]a_k, b_k[$. Enfin, on note $\Delta = \sum_{k\in K} I_k \times I_k$. En remarquant que $|f(x)|^p = \sum_{k\in K} |f_k(x)|^p$, on écrit (avec la convention $\frac{1}{|c-x|^{ps}} = 0$ si $c=-\infty$ ou $c=+\infty$) :

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{1+ps}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint\limits_{\Delta} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{1+ps}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}-\Delta} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{1+ps}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&\leqslant \sum_{k\in K} \iint\limits_{I_k\times I_k} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{1+ps}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 2^p \sum_{k\in K} \iint\limits_{x\in I_k,\ y\notin I_k} \frac{|f(x)|^p}{|x-y|^{1+ps}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&\leqslant \sum_{k\in K} \iint\limits_{I_k\times I_k} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{1+ps}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + C_s \sum_{k\in K} \int\limits_{I_k} \big|f(x)\big|^p \left(\frac{1}{|x-a_k|^{ps}} + \frac{1}{|b_k-x|^{ps}}\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

On conclut alors en appliquant à f_k les lemmes 2 et 3. $\square$

Le théorème 1 dans le cas $n=1$ est alors une conséquence directe du lemme 4.

4. Le cas $n > 1$

Pour traiter le cas général, on utilise les coordonnées sphériques : on a

$$\|f\|^p_{\dot{B}^{s,p}_p} = \frac{1}{2} \int\limits_{S^{n-1}} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x+\rho\sigma)-f(x)|^p}{|\rho|^{1+sp}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\sigma$$

puis en écrivant $x = y + t\sigma$ avec $y \in \sigma^\perp$

$$\|f\|^p_{\dot{B}^{s,p}_p} = \frac{1}{2} \int\limits_{S^{n-1}} \left(\int\limits_{\sigma^\perp} \left(\int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \frac{|f(y+(\rho+t)\sigma)-f(y+t\sigma)|^p}{|\rho|^{1+sp}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}\sigma$$

La démonstration des Théorèmes 1 et 2 dans le cas général se ramène donc au cas $n=1$.

5. Un exemple d'application

Comme exemple d'application, nous allons considérer le problème de la régularité des solutions faibles de l'équation quasi-géostrophique dissipative. Notons $\Lambda = \sqrt{-\Delta}$ l'opérateur de Calderón. Pour $0 < \alpha \leqslant 1$, l'équation quasi-géostrophique dissipative (QG_α) est l'équation :

$$\begin{cases} \partial_t\theta + \vec{u}.\vec{\nabla}\theta = -\Lambda^{2\alpha}\theta \\ \vec{u} = (-R_2\theta, R_1\theta) \\ \theta(0,.) = \theta_0 \end{cases}$$

où R_j est la transformation de Riesz $R_j = \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\partial_j$. Le terme d'advection $\vec{u}.\vec{\nabla}\theta$ peut se réécrire $\operatorname{div}(\theta\vec{u})$ et on peut donc considérer les solutions peu régulières de l'équation modifiée :

$$\begin{cases} \partial_t\theta + \operatorname{div}(\theta\vec{u}) = -\Lambda^{2\alpha}\theta \\ \vec{u} = (-R_2\theta, R_1\theta) \\ \theta(0,.) = \theta_0 \end{cases}$$

En 2008, Marchand [5] a étudié le cas d'une donnée initiale $\theta_0 \in L^p$; pour $2 \leqslant p < +\infty$, il a établi l'existence de solutions faibles qui vérifient de plus

$$\text{pour } t > 0, \quad \left\|\theta(t,.)\right\|_p^p + p\int_0^t \int \theta|\theta|^{p-2}\Lambda^{2\alpha}\theta\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s \leqslant \|\theta_0\|_p^p$$

où l'intégrale double donne une contribution positive, comme le montre l'inégalité de Córdoba [4]

$$2\int \left|\Lambda^\alpha\left(|\theta|^{p/2}\right)\right|^2 \mathrm{d}x \leqslant p\int \theta|\theta|^{p-2}\Lambda^{2\alpha}\theta\,\mathrm{d}x$$

Cette inégalité montre que $|\theta|^{p/2}$ appartient à $L^2_t\dot{H}^\alpha$, ce qui entraîne que $|\theta|$ appartient à $L^p\dot{B}_p^{2\alpha/p,p}$. Cependant, la régularité de la fonction θ elle-même restait obscure.

En collaboration avec D. Chamorro, nous avons montré dans [3] une inégalité plus précise, pour $0 < \alpha < 1$,

$$\|\theta\|^p_{\dot{B}_p^{2\alpha/p,p}} \leqslant C_{p,\alpha}\left\|\theta|\theta|^{\frac{p-2}{2}}\right\|^2_{\dot{H}^\alpha} \leqslant C'_{p,\alpha}\int \theta|\theta|^{p-2}\Lambda^{2\alpha}\theta\,\mathrm{d}x$$

La démonstration utilisait des propriétés élémentaires des semi-groupes de diffusion [1]. Dans le cas $1/2 < \alpha < 1$, le théorème 1 permet une autre démonstration de cette inégalité.

6. Remarques finales

Le théorème 2 est faux si f est à valeurs complexes ou si $0 < s < 1/p$, comme le montrent les contre-exemples suivants :

a) fonction à valeurs complexes : prendre $f(x) = \varphi(x)e^{\frac{i}{\ln|x|}}$ où $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(x) = 0$ pour $|x| \geqslant 1/2$;
b) cas $0 < s < 1/p$: prendre $g(x) = 1_{]0,1[}(x)$; on a $g \in \dot{B}_p^{s,p}(\mathbb{R})$ pour $0 < s < 1/p$ (et g peut être approximée en norme $\dot{B}_p^{s,p}$ par des fonctions continues) ; si $f_N = \sum_{k=0}^{2N-1}(-1)^k g(x-k)$, on a

$$\left\||f_N|\right\|_{\dot{B}_p^{s,p}} = \left\|g\left(\frac{x}{2N}\right)\right\|_{\dot{B}_p^{s,p}} = (2N)^{1/p-s}\|g\|_{\dot{B}_p^{s,p}} \text{ et } \|f_N\|_{\dot{B}_p^{s,p}} \geqslant N^{1/p}\left(\int_0^1\int_1^2 \frac{1}{|x-y|^{1+2s}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)^{1/p}$$

de sorte que $\lim_{N\to+\infty} \frac{\||f_N|\|_{\dot{B}_p^{s,p}}}{\|f_N\|_{\dot{B}_p^{s,p}}} = 0$.

Remerciements

Pour élémentaires que ces calculs soient, ils m'ont résisté deux ans durant. L'étincelle de compréhension est venue dans la salle de réveil de l'hôpital de jour de l'Hôpital Robert Debré, au chevet de ma fille au sortir de son opération. Merci à l'équipe soignante de cet hôpital pour savoir créer dans des circonstances difficiles une atmosphère sereine pour les jeunes opéré(e)s et leur famille !

Références

[1] D. Bakry, Functional inequalities for Markov semigroups, in: Probability Measures on Groups: Recent Directions and Trends, Tata Inst. Fund. Res., Mumbai, 2006, pp. 91–147.
[2] G. Bourdaud, Localisation et multiplicateurs des espaces de Sobolev homogènes, Manuscripta Math. 60 (1988) 93–130.
[3] D. Chamorro, P.G. Lemarié-Rieusset, Quasi-geostrophic equations, nonlinear Bernstein inequalities and α-stable processes, à paraître in Revista Matematica Iberoamer.
[4] A. Córdoba, D. Córdoba, A maximum principle applied to Quasi-Geostrophic equations, Commun. Math. Phys. 249 (2004) 511–528.
[5] F. Marchand, Existence and regularity of weak solutions to the quasi-geostrophic equations in the spaces L^p or $\dot{H}^{-1/2}$, Commun. Math. Phys. 277 (2008) 45–67.
[6] A. Youssfi, Localisation des espaces de Lizorkin–Triebel homogènes, Math. Nach. 147 (1990) 107–121.