



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com



Équations aux dérivées partielles/Analyse numérique

Calcul de l'espérance de la solution d'une EDP stochastique unidimensionnelle à l'aide d'une base réduite

Calculation of the expectation of the solution of a one-dimensional stochastic PDE using a reduced base

Jocelyne Erhel^a, Zoubida Mghazli^b, Mestapha Oumouni^{a,b}

^a SAGE-IRISA, INRIA Rennes Bretagne Atlantique, campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France

^b LIRNE-EIMA, Université Ibn Tofail, B.P. 133, 14 000 Kenitra, Maroc

INFO ARTICLE

Historique de l'article :

Reçu le 9 novembre 2010

Accepté après révision le 18 juillet 2011

Présenté par Olivier Pironneau

RÉSUMÉ

On présente dans cette Note une méthode efficace pour calculer une approximation de l'espérance de la réponse d'un problème elliptique unidimensionnel avec des entrées stochastiques. Dans les méthodes classiques, l'effort de calcul et le coût de l'approximation de la réponse, peuvent être exorbitants. La méthode présentée ici est basée sur la décomposition de Karhunen–Loève (K-L) de l'inverse du paramètre de diffusion nous permettant de construire une base de variables aléatoires en nombre réduit et de calculer un projeté de la solution. Nous montrons que l'espérance de ce projeté est une bonne approximation de celle de la réponse de notre problème, et on donne une estimation *a priori* de l'erreur. Un exemple numérique est présenté pour montrer l'efficacité de cette approche.

© 2011 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

ABSTRACT

In this Note, we present an efficient method to approximate the expectation of the response of a one-dimensional elliptic problem with stochastic inputs. In conventional methods, the computational effort and cost of the approximation of the response can be dramatic. Our method presented here is based on the Karhunen–Loève (K-L) expansion of the inverse of the diffusion parameter, allowing us to build a base of random variables in reduced numbers, from which we construct a projected solution. We show that the expectation of this projected solution is a good approximation, and give an *a priori* error estimate. A numerical example is presented to show the efficiency of this approach.

© 2011 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

In this Note, we will calculate the expectation of the solution of a one-dimensional elliptic problem (\mathcal{P}_s), where the parameters k and f are given stochastic fields. We consider the Karhunen–Loève expansion for k^{-1} the inverse of k , denoted by $k^{-1}(\omega, x) = \mathbb{E}[k^{-1}](x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\hat{\lambda}_n} b_n(x) Z_n(\omega)$, so we construct the subspace $S_{\infty} := \overline{\text{Vect}\{Z_j; j \geq 0\}}$ ($Z_0 = 1$), and project

Adresses e-mail : Jocelyne.Erhel@irisa.fr (J. Erhel), oumouni.mustapha@yahoo.fr (M. Oumouni).

the problem (\mathcal{P}_s) on S_∞ . This gives the projection $\mathcal{P}u$ of the solution u . We use a particular choice of the test function in (6) and show that $\mathbb{E}[u] = \mathbb{E}[\mathcal{P}u]$.

We truncate the space S_∞ and use the finite element method in the deterministic space to get $\mathcal{P}_{M,h}u$ as an approximation of $\mathcal{P}u$.

1. Introduction

La méthode de Monte Carlo [4] est la méthode classique utilisée pour approcher les statistiques telles que l'espérance et la variance de la réponse d'un problème stochastique. L'inconvénient principal de cette méthode est sa convergence lente, d'ordre $O(\frac{1}{\sqrt{M}})$, où M est le nombre de réalisations des paramètres. Ainsi cette approche engendre un effort de calcul généralement exorbitant. Les méthodes de Galerkin et de collocation stochastiques offrent un outil robuste pour la résolution des EDP stochastiques [6,3,2,1]. Elles approchent la réponse du modèle comme fonction stochastique, avec une convergence exponentielle. Cependant, elles exigent la résolution d'un problème déterministe de grande taille. L'effort de calcul et de stockage de mémoire engendrés limitent leur application à des faibles dimensions stochastiques.

Dans ce travail, nous considérons un problème elliptique avec des données aléatoires. Nous proposons une méthodologie de réduction de modèle qui permet d'approcher l'espérance de la solution. L'approche présentée est basée sur la décomposition de Karhunen–Loève (K-L) [7] de l'inverse du paramètre de diffusion. Une projection de la solution sur un espace à dimension réduite est construite de telle manière que l'espérance de la solution et celle du projeté de la solution coïncident. L'estimation a priori d'erreur prouve l'efficacité de l'approche considérée.

2. Formulation du problème modèle

Soit un espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{F}, d\mathbb{P})$ où Ω désigne l'espace des événements, \mathcal{F} la tribu des événements de Ω et \mathbb{P} la mesure de probabilité. Soient $I =]a, b[$ ouvert de \mathbb{R} , k et f deux champs aléatoires sur $\Omega \times I$. L'objectif est de calculer la moyenne de la solution du problème unidimensionnel suivant :

$$(\mathcal{P}_s) \begin{cases} -(k.u')' = f & \text{dans } \Omega \times I, \\ u(\cdot, a) = 0, & ku'(\cdot, b) = g(\cdot). \end{cases} \quad (1)$$

Hypothèses :

- **H1** : f, g sont du second ordre, i.e. $f \in L^2(\Omega) \otimes L^2(I)$ et $g \in L^2(\Omega)$.
- **H2** : k est uniformément borné, strictement positif sur Ω , i.e. : $\mathbb{P}(m_1 \leq k \leq m_2) = 1, m_2 > m_1 > 0$.

Sans perte de généralité, on suppose que k et f sont des bruits finis, comme dans le cas de la troncature du développement de (K-L) tels que :

$$k(x, \omega) = \bar{k}(x) + \sum_{n=1}^N k_n(x) Y_n(\omega) \quad \text{et} \quad f(x, \omega) = \bar{f}(x) + \sum_{n=1}^N f_n(x) Y_n(\omega) \quad (2)$$

où $\{Y_n\}_{n=1}^N$ sont des variables aléatoires uniformément bornées.

Le problème variationnel (\mathcal{P}_v) associé à (\mathcal{P}_s) donné par :

$$\text{Trouver } u \in L^2(\Omega) \otimes V(I) : \mathbb{E}[(k.u', \mu')_{L^2(I)}] = \mathbb{E}[(f, \mu)_{L^2(I)} + g(\cdot)\mu(\cdot, 1)] \quad \forall \mu \in L^2(\Omega) \otimes V(I) \quad (3)$$

où $V(I) := \{v \in H^1(I); v(a) = 0\}$, admet une solution unique d'après Lax–Milgram.

La méthode de Galerkin stochastique approche u dans $L^2(\Omega)$ sur la base des polynômes de chaos de cardinal $P = \frac{(p+N)!}{p!N!}$, conduisant à la résolution d'un système linéaire de très grande taille. L'effort de calcul et de stockage de mémoires engendrés limitent leur application à des faibles dimensions stochastiques.

On donne dans la suite, une méthodologie pour calculer une approximation de $\mathbb{E}[u]$. Elle consiste à projeter (\mathcal{P}_s) sur un sous-espace engendré par un nombre réduit de variables aléatoires. Ce projeté n'est pas une approximation de u , mais on montre que l'espérance de ce projeté coïncide avec $\mathbb{E}[u]$.

3. Construction d'une base stochastique réduite

Le développement de Karhunen–Loève (K-L) permet de décomposer tout champ aléatoire $\ell(\cdot, \cdot)$ en une partie déterministe (l'espérance $\mathbb{E}[\ell]$) et une partie aléatoire décomposée sur la base des valeurs et des fonctions propres de sa covariance $\text{cov}[\ell]$ définie par $\text{cov}[\ell](x, y) = \mathbb{E}[\ell(\cdot, x)\ell(\cdot, y)] - \mathbb{E}[\ell](x)\mathbb{E}[\ell](y)$.

Par l'hypothèse **(H2)**, k^{-1} , l'inverse de k , est du second ordre. On peut alors déterminer sa moyenne $\mathbb{E}[k^{-1}]$, sa covariance, et par conséquent son développement K-L, noté :

$$k^{-1}(\omega, x) = \mathbb{E}[k^{-1}](x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} b_n(x) Z_n(\omega), \tag{4}$$

où $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ et $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ sont respectivement les valeurs et les fonctions propres de $\text{cov}[k^{-1}]$, et $\{Z_j\}_{j=1}^{\infty}$ sont des variables aléatoires vérifiant $\mathbb{E}[Z_i Z_j] = \delta_{i,j}$ et données par :

$$Z_n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_I (k^{-1}(\omega, x) - \mathbb{E}[k^{-1}(x)]) b_n(x) dx. \tag{5}$$

Posons $S_{\infty} := \overline{\text{Vect}\{Z_j; j \geq 0\}}$, $Z_0 = 1$, et notons par $\mathcal{P}u$ la projection de u sur $S_{\infty} \otimes V(I)$, définie par :

$$\mathbb{E}[(k \cdot (\mathcal{P}u)', \mu')_{L^2(I)}] = \mathbb{E}[(k \cdot u', \mu')_{L^2(I)}], \quad \forall \mu \in S_{\infty} \otimes V(I). \tag{6}$$

La proposition suivante montre que les deux fonctions stochastiques u et $\mathcal{P}u$ ont la même espérance :

Proposition 1. *Soit u la solution de (\mathcal{P}_s) et $\mathcal{P}u$ donnée par (6), alors nous avons*

$$\mathbb{E}[u](x) = \mathbb{E}[\mathcal{P}u](x), \quad \forall x \in I.$$

Preuve. Pour toute $v \in V(I)$, considérons comme fonction test dans (6) la fonction $\mu = \int_a^x \frac{v'(y)}{k(\omega, y)} dy$, on obtient pour tout v dans $V(I)$: $\mathbb{E}[(\mathcal{P}u)', v']_{L^2(I)} = \mathbb{E}[(u', v')_{L^2(I)}]$, où encore $(\mathbb{E}[u'] - \mathbb{E}[(\mathcal{P}u)'], v')_{L^2(I)} = 0 \forall v \in V(I)$, ce qui donne $\mathbb{E}[u](\cdot) = \mathbb{E}[\mathcal{P}u](\cdot)$ □

Remarque 1.

- (i) Le cas où les conditions sont de type Dirichlet–Robin : $u(a) = 0$ et $u(\cdot, b) + k(\cdot, b)u'(\cdot, b) = \gamma$, où $\gamma \in \mathbb{R}$, la proposition reste vraie avec la même preuve.
- (ii) Le cas où les conditions sont de type Dirichlet, la preuve de la proposition 1 n'est pas valable, car il y a une difficulté à trouver une fonction test $\mu \in S_{\infty} \otimes H_0^1(I)$ telle que $k\mu' = v', \forall v \in H_0^1(I)$.
- (iii) Le résultat de la dernière proposition pourrait se prolonger au cas où $D \subset \mathbb{R}^n$ avec $n = 2, 3$ d'une manière analogue. La projection $\mathcal{P}u$ sera toujours définie par (6). On aurait $\mathbb{E}[u] = \mathbb{E}[\mathcal{P}u]$ si on arrive à prouver que $\mathbb{E}[(k \cdot \nabla \mathcal{P}u, q)_{L^2(D)}] = \mathbb{E}[(k \cdot \nabla u, q)_{L^2(D)}], \forall q \in S_{\infty} \otimes H(\text{div}, D)$ avec $\text{div}(q) = 0$. L'algorithme ci-dessus serait le même dans ce cas.

ALGORITHME

- (i) Calculer $\text{cov}[k^{-1}]$ la covariance de k^{-1} .
- (ii) Pour $\epsilon > 0$ donné, déterminer les M valeurs et vecteurs propres de $\text{cov}[k^{-1}]$, tels que $\|k^{-1} - k_M^{-1}\|_{L^2(\Omega, L^2(D))} \leq \epsilon$, où k_M^{-1} est donné par la série (4) tronquée à l'ordre M .
- (iii) Déterminer la matrice de rigidité et le vecteur second membre.
- (iv) Résoudre le système linéaire résultant.

Quand la dimension stochastique N est grande, l'approximation de u peut être très coûteuse. Ainsi, si on est intéressé plus par $\mathbb{E}[u]$ que par u , en tronquant la série (4), jusqu'à un ordre M «convenable», et en projetant \mathcal{P}_s dans $\text{Vect}\{Z_j; j \leq M\} \otimes V(I)$, on obtient une bonne approximation de $\mathbb{E}[u]$, nécessitant un degré de liberté stochastique petit.

Notons par $S_M := \text{Vect}\{Z_j; 0 \leq j \leq M\}$ et $V_h := \{\phi \in C^0(\bar{D}) \phi|_{T_i} \in P_1(T_i), \forall T \in \mathcal{T}_h, \phi(a) = 0\}$, l'espace d'approximation par des éléments finis de degré 1, où (\mathcal{T}_h) est une triangulation régulière du domaine I . La proposition suivante donne une estimation, dans $|\cdot|_{1,I}$ et $\|\cdot\|_{0,I}$, de l'erreur commise en approchant $\mathbb{E}[u]$ par $\mathbb{E}[\mathcal{P}_{M,h}u]$, où $\mathcal{P}_{M,h}u$ est définie par : $\mathbb{E}[(k \cdot (u' - (\mathcal{P}_{M,h}u)'), \mu'_{M,h})_{L(I)}] = 0, \forall \mu_{M,h} \in S_M \otimes V_h$:

Proposition 2. *Soit u la solution de (\mathcal{P}_s) et $\mathcal{P}_{M,h}u$ sa projection sur $S_M \otimes V_h$. Supposons que les fonctions propres $(b_n)_{n \geq 1}$ données dans (4) sont uniformément bornées, alors on a l'estimation a priori suivante :*

$$\left\{ \begin{array}{l} |\mathbb{E}[u] - \mathbb{E}[\mathcal{P}_{M,h}u]|_{1,I} \leq C_1 \left(h + \sqrt{\sum_{j \geq M+1} \lambda_j} \right) \\ \|\mathbb{E}[u] - \mathbb{E}[\mathcal{P}_{M,h}u]\|_{0,I} \leq C_0 \left(h^2 + \sqrt{\sum_{j \geq M+1} \lambda_j} \right) \end{array} \right. \tag{7}$$

où C_1 et C_0 sont des constantes positives indépendantes de h et de M .

Tableau 1

Comparaison entre l'approche proposée, la méthode de collocation et la méthode de Monte Carlo (MMC).

Méthodes	MMC (10^4)	MMC (10^5)	Collocation ($p = 3$)	Collocation ($p = 4$)	Projection
$\ \mathbb{E}[u] - \mathbb{E}[u_h]\ _{0,I}$	0,0091	0,0043	0,007	0,0004	0,0000002
Temps de calcul en s	18,04	125,56	99,53	1616,9	5,065

Preuve. L'idée de la preuve consiste à décomposer l'erreur en deux quantités, $\|\mathbb{E}[\mathcal{P}u] - \mathbb{E}[\mathcal{P}_M u]\|_{s,I}$ et $\|\mathbb{E}[\mathcal{P}_M u] - \mathbb{E}[\mathcal{P}_{M,h} u]\|_{s,I}$, où $\mathcal{P}_M u$ est la projection de u dans $\mathcal{S}_M \otimes V(I)$, et $s = 0, 1$.

Par les estimations déterministes classiques et l'inégalité de Jensen nous avons :

$$\|\mathbb{E}[\mathcal{P}_M u - \mathcal{P}_{M,h} u]\|_{s,I} \leq \mathbb{E}[\|\mathcal{P}_M u - \mathcal{P}_{M,h} u\|_{s,I}] \leq c_s h^s \mathbb{E}[\|\mathcal{P}_M u\|_{s,I}] \quad (8)$$

où $c_s > 0$ indépendante de h . La fonction $\mathcal{P}_M u$ comme projection de $\mathcal{P}u$ vérifie l'orthogonalité suivante : $\mathbb{E}[(k \cdot (\mathcal{P}u - \mathcal{P}_M u)', \mu'_M)_{L^2(I)}] = 0 \forall \mu_M \in \mathcal{S}_M \otimes V(I)$, on choisit comme fonction test dans cette relation $\mu_M = \int_a^x \mathbb{E}[(\mathcal{P}u - \mathcal{P}_M u)'] (k^{-1} - \sum_{j \geq M+1} \sqrt{\lambda_j} b_j Z_j) dy$, et du fait que $\mathbb{E}[Z_j Z_i] = \delta_{ij}$, on montre :

$$\|\mathbb{E}[(\mathcal{P}u - \mathcal{P}_M u)']\|_{0,I} \leq 2k_\infty \|b\|_\infty \|(\mathcal{P}u)'\|_{0,\Omega \otimes I} \sqrt{\sum_{j \geq M+1} \lambda_j} \quad (9)$$

Par l'inégalité de Poincaré, nous avons l'estimation de cette dernière erreur dans $L^2(I)$. En combinant (8) et (9), on déduit l'estimation de la proposition \square

Remarque 2.

(i) L'approximation $\mathcal{P}_{M,h} u$ est obtenue en résolvant le problème Eléments Finis suivant :

$$\mathbb{E}[(k \cdot (\mathcal{P}_{M,h} u)', \mu'_{M,h})_{L^2(I)}] = \mathbb{E}[(f, \mu_{M,h})_{L^2(I)} + g(\cdot) \mu_{M,h}(\cdot, 1)] \quad \forall \mu_{M,h} \in \mathcal{S}_M \otimes V_h,$$

la taille du système linéaire résultant serait $(M+1)n_x$, où n_x est la dimension de V_h . L'ordre M dépend linéairement de la dimension N , alors que le cardinal de la base des polynômes de chaos croît exponentiellement avec N .

(ii) Dans le cas où le champ de diffusion k est approché par une troncature k_N , nous devons considérer l'erreur commise par cette troncature [3,5].

4. Exemple numérique

Pour illustrer la convergence et l'efficacité de l'approche proposée, nous considérons le problème elliptique unidimensionnel suivant :

$$(\mathcal{P}_1) \begin{cases} -(k \cdot u)' = 1 & \text{dans } \Omega \times I =]0, 1[, \\ u(0, \omega) = 0, & (ku')(1, \omega) = 1. \end{cases} \quad (10)$$

Le champ k est log-normal donné par : $k(\omega, x) = \exp(G(x, \omega))$, où G est un champ gaussien de moyenne nulle et de variance σ^2 , satisfaisant une covariance gaussienne donnée par : $\text{cov}[G](x_1, x_2) = \sigma^2 \exp(-\frac{(x_1 - x_2)^2}{l^2})$, où l est la longueur de corrélation. On prend $l = \sigma = 1$, on utilise les fonctions constantes par morceaux pour approcher les valeurs et les fonctions propres des covariances $\text{cov}[k]$ et $\text{cov}[k^{-1}]$. Nous tronquons le développement de K-L à l'ordre $N = 10$ pour k et $M = 10$ pour k^{-1} . Nous utilisons pour la discrétisation spatiale une approximation par Eléments Finis P_1 avec $n_x = 40$ degrés de liberté.

La méthode de Galerkin stochastique introduit un espace d'Elément Finis \mathcal{S}_p de $L^2(\Omega)$, dont la base est construite par les polynômes de chaos. Le nombre P d'élément de cette base croît exponentiellement avec la dimension stochastique N et le degré polynomial p . Pour le même exemple, toujours avec $N = 10$, si on prend comme degré des polynômes de chaos $p = 4$, on aurait $P = 1001$, et la taille de la matrice de rigidité A serait $\dim(A) = 40040$, alors que la taille de la matrice dans notre méthode n'est que $\dim(A) = 440$. D'autre part, on doit déterminer la densité de chaque variable aléatoire Y_n pour construire les polynômes orthogonaux suivant la densité conjointe de $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_N)$ sous l'hypothèse de l'indépendance des variables Y_n (qui n'est vrai que si chaque Y_n suit une loi normale).

La méthode de collocation stochastique, étant une généralisation de Galerkin stochastique [2], elle a la même précision. Comme, de plus elle est de mise en œuvre plus aisée, nous l'avons choisie pour la comparaison de notre approche. On considère $p = 3$ et $p = 4$ points de collocation, ce qui conduit à la résolution de p^N systèmes linéaires de taille n_x . Le Tableau 1 résume une comparaison entre l'approche proposée, la méthode de collocation et la méthode de Monte Carlo (MMC) avec 10^4 et 10^5 réalisations de k ; voir la Fig. 1 pour les erreurs relatives. Les calculs sont faits sur PC avec le logiciel Scilab.

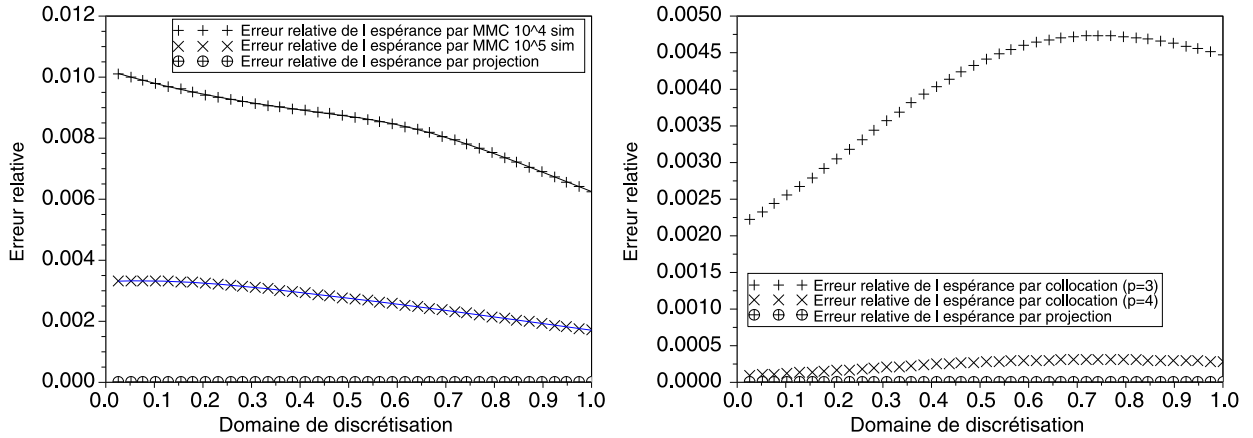


Fig. 1. L'erreur relative par MMC, collocation et par projection. L'erreur relative de l'espérance par projection est comprise entre 7×10^{-9} et 8×10^{-6} .

5. Conclusion

Nous avons proposé une méthodologie pour approcher l'espérance de la solution d'un problème elliptique unidimensionnel avec des entrées stochastiques. Elle consiste à projeter le problème sur une base de variables aléatoires bien choisies et en nombre réduit. En comparaison avec la méthode de Monte Carlo et les méthodes stochastiques spectrales, l'approximation de la moyenne sur cette base semble très efficace, même dans le cas de grande dimension stochastique. Les avantages de cette approche sont multiples, elle nous permet, d'une grande réduction du coût de stockage et du temps de calcul. Il serait intéressant de l'étendre aux problèmes de dimension supérieure avec des conditions limites quelconques.

Remerciements

Ce travail a été révisé dans le cadre des projets Hydromed et Co-advise (INRIA), et avec le soutien de l'Action Intégrée Maroc-France, No : MA/10/225.

Références

- [1] I. Babuska, P. Chatzipantelidis, On solving linear elliptic stochastic partial differential equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 191 (2002) 4093–4122.
- [2] I.M. Babuška, F. Nobile, R. Tempone, A stochastic collocation method for elliptic partial differential equations with random input data, *SIAM J. Numer. Anal.* 43 (3) (2007) 1005–1034.
- [3] I.M. Babuška, R. Tempone, G.E. Zouraris, Solving elliptic boundary value problems with uncertain coefficients by the finite element method, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 194 (12–16) (2005) 1251–1294.
- [4] G. Fishman, *Monte Carlo: Concepts, Algorithms, and Applications*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [5] J. Charrier, Strong and weak error estimates for elliptic partial differential equations with random coefficients, 2010, submitted for publication.
- [6] R.G. Ghanem, P.D. Spanos, *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [7] M. Love, *Probability Theory I*, fourth edition, Graduate Texts in Mathematics, vol. 45, Springer-Verlag, New York, 1977 ;
M. Love, *Probability Theory II*, fourth edition, Graduate Texts in Mathematics, vol. 46, Springer-Verlag, New York, 1978.