C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 349 (2011) 1037–1039

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Équations différentielles

Classification analytique et théorie de Galois locales des modules aux q-différences à pentes non entières

Local analytic classification and local Galois theory of q-difference modules with non integral slopes

Virginie Bugeaud

Université Paul-Sabatier, institut de mathématiques de Toulouse, 118, route de Narbonne, F31062 Toulouse cedex 9, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 19 avril 2011
Accepté le 6 septembre 2011
Disponible sur Internet le 21 septembre 2011

Présenté par Jean-Pierre Ramis

RÉSUMÉ

Van der Put et Reversat ont décrit la forme d'un module aux q-différences pur à pente non entière. Nous en déduisons des descriptions matricielles explicites des classes analytiques isoformelles et du groupe de Galois formel des modules aux q-différences purs dont les pentes ne sont pas supposées entières.

ABSTRACT

Van der Put and Reversat described the form of a pure q-difference module with non integral slopes. We deduce from this explicit matricial descriptions of the isoformal analytic classes and of the Galois group of pure q-difference modules with non integral slopes.

Notations

Le corps des séries de Laurent convergentes sera noté $K = \mathbb{C}(\{z\}) = \mathbb{C}\{z\}[z^{-1}]$ et $\hat{K}$ désignera le corps des séries formelles $\mathbb{C}((z)) = \mathbb{C}[[z]][z^{-1}]$. Soit $q \in \mathbb{C}^*$ tel que $|q| > 1$, on définit l'opérateur σ, automorphisme de K (ou $\hat{K}$) par $\sigma(f(z)) = f(qz)$.

Un module aux q-différences sera un couple $M = (K^n, \Phi_A)$ où Φ_A est un automorphisme σ-linéaire de K^n défini par $\Phi_A(X) = A^{-1}\sigma(X)$, $A \in GL_n(K)$. Un morphisme de modules aux q-différences de (K^n, Φ_A) dans (K^p, Φ_B) est une matrice $F \in M_{p,n}(K)$ telle que $\sigma(F)A = BF$.

1. Introduction

A un module aux q-différences, on peut associer un polygone de Newton (cf. [5]), et les pentes de ce polygone, qui sont rationnelles, sont les pentes du module aux q-différences. Un module pur isocline (c'est à dire qui n'a qu'une seule pente), à pente entière $\mu \in \mathbb{Z}$, admet une forme normale où la matrice A est du type $z^{\mu}C$, $C \in GL_n(\mathbb{C})$. M. van der Put et M. Reversat dans [2], ont donné une forme normale pour les modules purs à pente non entière. Ils montrent qu'un module irréductible

Adresse e-mail : virginie.bugeaud@math.univ-toulouse.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2011.09.002

(qui n'admet pas de sous-modules aux q-différences autre que $\{0\}$ et lui-même) de pente d/r, $pgcd(d,r)=1$, est de la forme

$$E(r,d,b)=\left(K^r,\Phi_B\right) \quad \text{où} \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & \ddots & & 1 \\ c & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad c=q^{\frac{d(r-1)}{2}}bz^d, \quad b\in\mathbb{C}^*.$$

Un module indécomposable (qui ne peut être somme directe non triviale de deux sous-modules aux q-différences) pur isocline de pente d/r, $pgcd(d,r)=1$, est de la forme $E(r,d,b)\otimes U_m$ où U_m est le module aux q-différences unipotent associé à la matrice de Jordan unipotente de taille m. Ainsi, un module pur isocline de pente non entière est somme directe de modules indécomposables. Ces résultats sont notre point de départ pour étendre une partie des résultats de Ramis, Sauloy et Zhang [4], concernant les modules aux q-différences à pentes entières aux pentes non entières, en ayant le souci de donner des descriptions matricielles explicites.

Cette Note est construite en trois temps. Nous commencerons par étudier la classification analytique isoformelle à deux pentes non entières en cherchant une forme normale de Birkhoff-Guenther. Dans une deuxième partie, nous calculerons les opérateurs de Stokes associés à un module irréductible. Dans la troisième partie, nous donnerons une description matricielle explicite du groupe de Galois formel (déjà décrit par van der Put et Reversat). Ces résultats ouvrent la voie à une description complète explicite du groupe de Galois des équations aux q-différences.

2. Classification analytique isoformelle à deux pentes

Dans [4], les auteurs étudient l'ensemble des classes analytiques isoformelles et les décrivent dans le cas où les pentes sont entières. L'une de leurs approches, que l'on reprend dans cette partie, est de donner la forme normale de Birkhoff-Guenther pour les matrices représentant une classe analytique isoformelle. Ici, on traite le cas à deux pentes, l'une non entière et l'autre entière puis les deux non entières. L'ensemble des classes isoformelles analytiques à deux pentes est noté $\mathcal{F}(P_1,P_2)$ où sont fixés les modules $P_i=(K^{r_i},\Phi_{B_i})$ pour $i=1,2$ de pentes $\mu_1<\mu_2$. D'après [5], toute classe de $\mathcal{F}(P_1,P_2)$ peut être représentée par un module aux q-différences $M_U=(K^n,\Phi_{A_U})$ où $A_U=\left(\begin{smallmatrix} B_1 & U \\ 0 & B_2\end{smallmatrix}\right)$, le bloc U est dans $M_{r_1,r_2}(K)$.

Dans le cas des pentes entières, grâce à la transformée de q-Borel, (voir [4]), une classe admet un unique représentant dont les coefficients du bloc U sont polynomiaux, c'est la forme normale de Birkhoff-Guenther. Notons $E=E(r,-d,b)$ un module aux q-différences irréductible de pente $\mu=-d/r<0$, de rang r et $\underline{1}=(K,\sigma)$. Ici aussi, on utilise la transformée de q-Borel pour avoir des représentants à coefficients polynomiaux, mais ce n'est pas suffisant pour obtenir une forme normale. Le théorème suivant traite $\mathcal{F}(E,\underline{1})$ et s'étend facilement au cas de $\mathcal{F}(M,\underline{1})$ où M est arbitraire de pente non entière (que l'on n'énoncera pas pour éviter d'introduire des notations trop lourdes).

Théorème 2.1. *Soit $k\in\mathbb{Z}$ et $V_{E,\underline{1}}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $(\sum_{l=k}^{k+d-1}\mathbb{C}z^l)^r$ de dimension rd alors l'application φ de $V_{E,\underline{1}}$ dans $\sum_{l=k}^{k+d-1}\mathbb{C}z^l$ définie par $\varphi((u_1,\dots,u_r))=\sum_{j=1}^r\sigma^{r-j}(u_j)$ induit un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels : $\mathcal{F}(E,\underline{1})\cong\frac{V_{E,\underline{1}}}{Ker\varphi}\cong Im\varphi\cong\sum_{l=k}^{k+d-1}\mathbb{C}z^l$.*

L'étude du cas à deux pentes non entières, $\mathcal{F}(E_1,E_2)$, où $E_1=E(r_1,d_1,b_1)$ et $E_2=E(r_2,d_2,b_2)$ avec $\frac{d_1}{r_1}<\frac{d_2}{r_2}$, se ramène au théorème précédent par l'isomorphisme entre $\mathcal{F}(E_1,E_2)$ et $\mathcal{F}(E_1\otimes E_2^\vee,\underline{1})$, qui est dû au fait que la catégorie est tannakienne (cf. [5] et [4]).

On peut de nouveau avoir des représentants des classes analytiques isoformelles à coefficients polynomiaux, décrits selon leur position sur la diagonale de U. Un nouvel isomorphisme φ apparait, $\varphi:\mathcal{F}(E_1,E_2)\to(\sum_{l=k}^{k+u_1d_2-u_2d_1-1}\mathbb{C}z^l)^p$ où $p=pgcd(r_1,r_2)$, $r_1=pu_1$ et $r_2=pu_2$.

Dans la seconde partie, dans l'esprit de [4] (et [6]), on adopte un point de vue plus géométrique pour décrire $\mathcal{F}(E,1)$, en calculant les opérateurs de Stokes.

3. Opérateurs de Stokes

A un module aux q-différences $M=(K^n,\Phi_A)$ où, sans perte de généralité, la matrice A est peut-être prise dans $GL_n(\mathbb{C}[z,z^{-1}])$, on associe un fibré vectoriel holomorphe $\mathcal{F}_M$ sur la courbe elliptique $E_q=\mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$, défini par $\mathcal{F}_M=\frac{\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^n}{(z,X)\sim(qz,A(z)X)}$ (cf. [8]). Dans [6] ou [8], si M est pur isocline de pente entière négative, on a un isomorphisme du type $\mathcal{F}(M,1)\cong H^1(E_q,\mathcal{F}_M)$, obtenu grâce à la construction de « cocycles privilégiés ».

Dans cette partie, la même démarche est adoptée pour le cas où $M=E=E(r,-d,b)$ est un module aux q-différences irréductible de pente non entière négative. Le théorème suivant est analogue au théorème 3.1 de [8]. Nous noterons $\bar{c}$ la classe de $c\in\mathbb{C}^*$ dans E_q et $\bar{\bar{c}}$ sa classe dans E_{q^r}.

Théorème 3.1. *Pour tout $U\in(\mathbb{C}[z]_{d-1})^r$, pour tout $\bar{\bar{c}}\in E_{q^r}\setminus\Sigma_E$, il existe un unique vecteur de fonctions méromorphes F_c sur $\mathbb{C}^*$, $F_c={}^t(f_1,\dots,f_r)$, dont les f_i ont pour pôles la q^r-spirale $[-cq^{-i+1},q^r]=-cq^{-i+1}q^{r\mathbb{Z}}$, de multiplicité $\leqslant d$ et tel que $\sigma(F_c)-BF_c=U$.*

L'ensemble Σ_E est égal à $\{c \in \mathbb{C}^*/c^d = bq^{-d(r-1)/2}q^{rn}, n \in \mathbb{Z}\}$ modulo q^r et il est fini.

Il est important de remarquer qu'ici les pôles sont paramétrés par la courbe elliptique E_{q^r}, ces fonctions proviennent en fait de fonctions associées au fibré image réciproque $p^*\mathcal{F}_E$ où p est le revêtement $p : E_{q^r} \to E_q$ induit par $q^{r\mathbb{Z}} \subset q^{\mathbb{Z}}$.

Posons $F_{c,d} = F_d - F_c = {}^t(f_{c,d}, \sigma(f_{c,d}), \ldots, \sigma^{r-1}(f_{c,d}))$ où $f_{c,d} = f_d - f_c$ vérifient l'équation $\sigma^r(f_c) - bq^{-d(r-1)/2}z^{-d}f_c = \varphi(U)$, φ étant l'application définie au théorème 2.1. Les fonctions $F_{c,d}$ sont holomorphes sur $E_q \setminus \{\bar{-c}, \bar{-d}\}$ et vérifient $\sigma(F_{c,d}) - BF_{c,d} = 0$. Ce sont des sections du fibré $\mathcal{F}_E$ et elles constituent des « cocycles privilégiés » induisant un isomorphisme entre $\mathcal{F}(E, 1)$ et $H^1(E_q, \mathcal{F}_E)$.

Ces opérateurs de Stokes ont vocation à être des opérateurs galoisiens et former un sous-groupe du groupe de Galois des équations aux q-différences (cf. [3]).

4. Groupe de Galois formel

Van der Put et Reversat ont décrit dans [2] le groupe de Galois formel des équations aux q-différences sur $\hat{K}$ du point de vue algébrique, en tant qu'extension de Picard–Vessiot. Nous donnons ici, une description matricielle explicite de ce groupe dans le but d'avoir une description explicite de son effet sur les Stokes (sur lesquels il opère par conjugaison).

Le groupe de Galois des équations aux q-différences $G^{(0)}$ est défini dans [7], et plus généralement dans [3], par voie tannakienne (cf. [1]), comme l'ensemble des automorphismes tenseur-compatibles d'un foncteur fibre ω_{z_0}, $z_0 \in \mathbb{C}^*$. Dans [3], le groupe de Galois pur (ou formel) $G^{(0)}_{p,1}$ des équations aux q-différences à pentes entières est décrit explicitement : $G^{(0)}_{p,1} = \mathbb{C}^* \times Hom_{gr}(E_q, \mathbb{C}^*) \times \mathbb{C}$.

Ici, on fixe $r \in \mathbb{N}^*$ le dénominateur des pentes des modules aux q-différences sur $\hat{K}$ et on note $G^{(0)}_{p,r}$ le groupe de Galois associé. Un objet de cette catégorie est somme directe de modules du type $E(s,t,b) \otimes U_m$ de pente $\frac{k}{r} = \frac{s}{t}$ $(pgcd(t,s) = 1)$. Le théorème suivant décrit l'action de $G^{(0)}_{p,r}$ sur les modules irréductibles $E(r,d,b^r)$ de matrice B associée (définie dans 1). On fixe donc $r \in \mathbb{N}^*$, également $z_0 \in \mathbb{C}^*$, une racine r^{e} de z_0 notée $z_0^{1/r}$, $\xi_r = e^{2i\pi/r}$ racine primitive r^{e} de l'unité et q_r une racine r^{e} de q. Pour tout groupe abélien E, on note $E^\vee$ le groupe proalgébrique $Hom(E, \mathbb{C}^*)$. On note également *diag* pour matrice diagonale.

Théorème 4.1. *Soit $\varphi \in G^{(0)}_{p,r}$. Alors $\varphi = (t, \gamma, \lambda)$ où $t \in \mathbb{C}^*$, $\gamma \in E_q^\vee$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ et on a*

$$\varphi(B) = G^{-1}_{b,d}\big(z_0^{1/r}\big)t^d\gamma(b)\gamma(T_r)\,diag\big(1, \gamma(q_r), \ldots, \gamma(q_r)^{r-1}\big)^d G_{b,d}\big(z_0^{1/r}\big),$$

où

$$G_{b,d}\big(z_0^{1/r}\big) = diag(1, \alpha_0, \alpha_0\alpha_1, \ldots, \alpha_0 \cdots \alpha_{r-2}), \qquad \alpha_j = b^{-1}q_r^{-jd}z_0^{-d/r} \quad et \quad T_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 \ldots & & 0 \end{pmatrix} \in GL_r(\mathbb{C}).$$

La loi de groupe est alors : $(t,\gamma,\lambda)(t',\gamma',\lambda') = (tt'\varepsilon(\gamma,\gamma'), \gamma\gamma', \lambda+\lambda')$ où $\varepsilon(\gamma,\gamma') = \frac{1}{\gamma'(\gamma(q_r))} = \xi_r^{-lk'}$ si $\gamma(q_r) = \xi_r^l$ et $\gamma'(\xi_r) = \xi_r^{k'}$.

Le groupe de Galois $G^{(0)}_{p,r}$ est alors égal à $H_r \times \mathbb{C}$ où $1 \to \mathbb{C}^* \to H_r \to E_q^\vee \to 1$ est une extension centrale. On retrouve de manière explicite le résultat de van der Put et Reversat qui affirme que le groupe de Galois formel des équations aux q-différences $G^{(0)}_p$ est égal à $H \times \mathbb{C}$ où $1 \to \mathbb{Q}^\vee \to H \to E_q^\vee \to 1$ est une extension centrale.

Références

[1] Pierre Deligne, James Milne, Tannakian Categories, in: Lecture Notes in Mathematics, vol. 900, Springer, Berlin/Heidelberg, 1981, pp. 101–228.

[2] Marius van der Put, Marc Reversat, Galois theory of q-difference equations, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) 16 (3) (2007) 665–718.

[3] Jean-Pierre Ramis, Jacques Sauloy, The q-analogue of the wild fundamental group. I, in: Algebraic, Analytic and Geometric Aspects of Complex Differential Equations and Their Deformations, Painlevé Hierarchies, in: RIMS Kôkyûroku Bessatsu, vol. B2, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2007, pp. 167–193.

[4] Jean-Pierre Ramis, Jacques Sauloy, Changgui Zhang, Local analytic classification of q-difference equations, 2009, submitted for publication, arXiv: 0903.0853v2 [math.QA].

[5] Jacques Sauloy, La filtration canonique par les pentes d'un module aux q-différences et le gradué associé, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 54 (1) (2004) 181–210.

[6] Jacques Sauloy, Algebraic construction of the Stokes sheaf for irregular linear q-difference equations, Astérisque 296 (2004) 227–251, Analyse complexe, systèmes dynamiques, sommabilité des séries divergentes et théories galoisiennes. I.

[7] Jacques Sauloy, Galois theory of Fuchsian q-difference equations, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 36 (6) (2004) 925–968.

[8] Jacques Sauloy, Equations aux q-différences et fibrés vectoriels sur une courbe elliptique, Differential Equations and Singularities, 60th years of J.M. Aroca, vol. 323, Société Mathématique de France, 2009.