



Géométrie

## Détermination géométrique de la systole des groupes de triangles

*Geometric determination of the systole of triangle groups*

Emmanuel Philippe

Lycée Les Iscles, 116 boulevard Ryckebusch, 04100 Manosque, France

## I N F O A R T I C L E

*Historique de l'article :*

Reçu le 20 mai 2011

Accepté le 18 octobre 2011

Disponible sur Internet le 6 novembre 2011

Présenté par le Comité de rédaction

## R É S U M É

On donne dans cette Note une formule explicite simple pour la systole d'une sphère hyperbolique avec trois points coniques d'ordres  $\geq 3$  et on détermine la courbe associée. La preuve est élémentaire et complète les travaux précédents de l'auteur sur le bas du spectre des groupes de triangles.

© 2011 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

## A B S T R A C T

In this Note we give an explicit formula for the length of the shortest geodesic loop for hyperbolic spheres with three singularities of order greater than 3.

© 2011 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

La détermination de la systole d'une surface hyperbolique est une question difficile abordée parfois numériquement [6, 10,1]. L'obtention d'une formule exacte constitue donc un fait remarquable comme on pourra s'en convaincre en parcourant les références dans lesquelles les auteurs s'attachent à décrire le bas du spectre des longueurs [5,3,4] pour obtenir la plupart du temps un des (rares) résultats de rigidité spectrale.

On se propose donc de résoudre ici entièrement ce problème dans le cas des sphères possédant trois points coniques en établissant une formule très simple permettant de calculer la systole en fonction des angles du triangle :

$$\cosh\left(\frac{\text{syst}}{2}\right) = 2 \cos \frac{\pi}{r} \cos \frac{\pi}{p} + \cos \frac{\pi}{q}$$

De manière complémentaire, et notamment pour le cas  $r = 2$  non traité ici, on pourra parcourir les références [7] et [8]. L'étude du bas du spectre reposant dans ces articles sur une approche combinatoire très calculatoire, nous proposons dans ce papier une démonstration purement géométrique pouvant s'étendre à la description des trois premières valeurs du spectre, suffisantes pour démontrer la rigidité spectrale des surfaces considérées [9].

**1. Généralités**

Dans le demi-plan de Poincaré  $\mathbf{H}$  on considère un triangle  $T$  ayant pour angles  $\pi/r$ ,  $\pi/p$  et  $\pi/q$  avec  $3 \leq r \leq p \leq q$  des entiers dont la somme des inverses est strictement inférieure à un. Dans le groupe engendré par les réflexions associées aux côtés de  $T$  l'ensemble  $\Gamma$  des isométries directes est un sous-groupe d'indice deux : c'est le *groupe de triangle* associé à  $T$ .

Adresses e-mail : [philippe@ihes.fr](mailto:philippe@ihes.fr), [emmanuel.philippe@ac-aix-marseille.fr](mailto:emmanuel.philippe@ac-aix-marseille.fr).

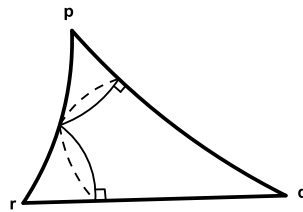


Fig. 1. La systole  $l_1$ .

Le quotient  $S$  du demi-plan par le groupe  $\Gamma$  est muni de la métrique induite par la distance hyperbolique, ce qui en fait une surface à trois points coniques de genre nul. On note  $S^*$  le quotient  $S$  privé des trois points singuliers. Pour toutes considérations élémentaires on renvoie à [2].

Deux courbes  $\alpha, \beta$  de  $S$  paramétrées par  $[0, 1]$  sont *homotopes* s'il existe une fonction  $F$  continue sur  $[0, 1]^2$  et à valeur dans  $S^*$  telle que

$$F(0, s) = \alpha(s) \quad \text{et} \quad F(1, s) = \beta(s)$$

Une courbe de  $S$  est *homotopiquement triviale* si elle est homotope à un point (au besoin un point conique). La longueur minimale de toutes les géodésiques fermées non homotopiquement triviales de  $S$  est la *systole* de  $S$ .

Afin d'étudier la nature géométrique des géodésiques fermées de  $S$ , introduisons  $a = rp, b = pq$  et  $c = qr$  les segments géodésiques sur  $S$  reliant les trois points coniques (notés  $r, p$  et  $q$ ).

Commençons également par remarquer qu'un lacet de  $S$  non homotopiquement trivial possède une intersection non vide avec chacun des trois segments géodésiques  $a, b$  et  $c$  : en effet, si le lacet ne possède aucune intersection il est contenu dans une copie de  $T$ , s'il possède une seule intersection il est contenu dans l'intérieur de deux copies de  $T$  recollées et s'il possède deux intersections il est homotope à un des points coniques.

Par abus de notation nous noterons parfois de manière identique un segment géodésique et sa longueur.

## 2. Une formule exacte pour la systole

Nous démontrons maintenant le résultat annoncé en début d'article :

**Théorème 1.** La systole de  $S = \Gamma \backslash \mathbf{H}$  où  $\Gamma$  est le groupe de triangle associé au triangle hyperbolique d'angles  $\pi/r, \pi/p, \pi/q$  avec  $3 \leq r \leq p \leq q$  est

$$l_1 = 2 \operatorname{Argch} \left[ 2 \cos \frac{\pi}{r} \cos \frac{\pi}{p} + \cos \frac{\pi}{q} \right]$$

**Démonstration.** Remarquons avant toute chose que la systole ne peut pas être atteinte par un lacet géodésique correspondant à un côté du triangle parcouru deux fois : un argument géométrique évident montre en effet que  $\operatorname{Min}\{a, b\} \geq \frac{1}{2}$ .

Considérons donc  $\gamma$  un lacet géodésique orienté non homotopiquement trivial de  $S$ , paramétré par  $[0, 1]$  dont le support est distinct de  $a, b$  ou  $c$ . Les intersections de  $\gamma$  avec  $a$  et  $b$  sont transverses et  $\gamma$  ne recoupe pas deux fois successivement le même type de côté. En listant les temps d'intersection successifs de  $\gamma$  avec les segments  $a$  et  $b$  on partitionne le lacet en arcs de six types différents (cf. Fig. 2).

On peut donc écrire  $\gamma = \alpha_1, \dots, \alpha_k$  avec  $\alpha_i \in \{c_1, \dots, c_6\}$ . Dans la suite  $n_i$  désignera le nombre d'arcs de type  $c_i$  dans une telle décomposition. Si on se donne un domaine fondamental fourni en découpant  $S$  le long de  $a$  et de  $b$  (on notera de manière identique un arc de  $S$  et son relevé) on relève isométriquement  $\gamma$  pour obtenir un lacet continu par morceaux, union d'arcs de type  $c_i$ . Les discontinuités du relevé correspondent précisément aux temps d'intersection utilisés pour découper  $\gamma$ .

Nous allons maintenant minorer la longueur de  $\gamma$  par au moins une des valeurs remarquables suivantes à l'aide de considérations géométriques élémentaires :

$$l_1 = l(\bar{r}_r q \bar{r}'_p) = l(e_r^{-1} e_p); \quad l_2 = l(\bar{r}_{pq} \bar{r}'_{rp'}) = l(e_q^{-1} e_r); \quad l_3 = l(\bar{r}_{rq} \bar{r}'_p) = l(e_q e_p^{-1})$$

où  $e_r$  est l'isométrie elliptique centrée en  $r$  et d'angle  $2\pi/r$  et les notations sont empruntées à la figure ci-dessous (Fig. 2).

Le cas où  $n_5 + n_6 \geq 2$

La longueur de  $\gamma$  est clairement supérieure à  $l_2$  qui correspond à la situation où les arcs sont confondus avec la perpendiculaire commune entre  $rp'$  et  $pq$ .

Le cas où  $n_5 + n_6 = 1$

Par symétrie, nous supposons que  $n_5 = 1$  et  $n_6 = 0$ .

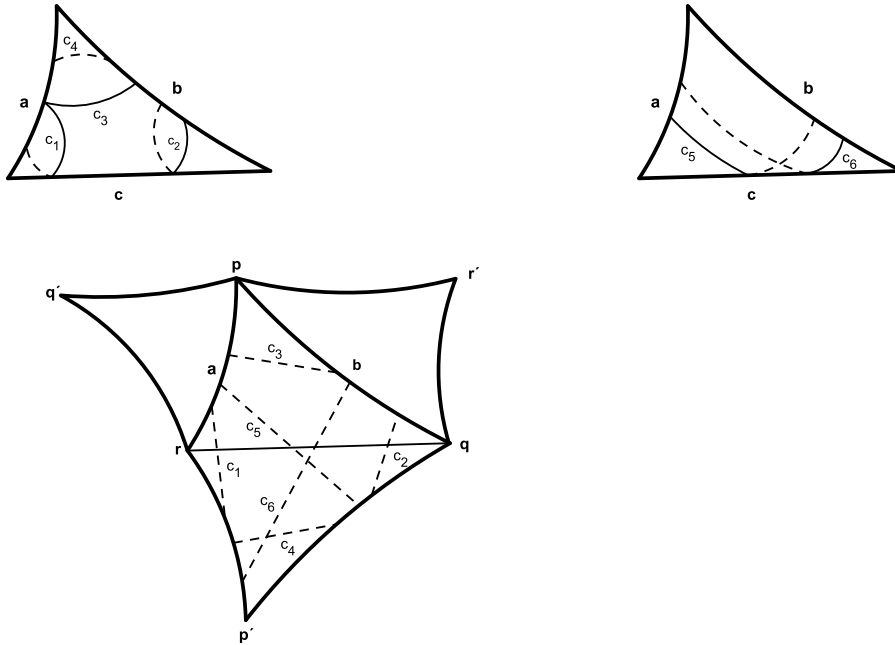


Fig. 2. Découpe de  $\gamma$  en arcs élémentaires.

Si  $n_2 = n_1 = 0$  nous observons que nécessairement  $n_3 \geq 1$  et  $n_4 \geq 1$  : on peut alors extraire de la courbe une séquence du type  $c_3c_5c_4$  où les arcs sont connectés deux à deux. En dépliant convenablement cette séquence *via* les réflexions dans le domaine fondamental choisi, on montre que sa longueur est supérieure ou égale à  $(l_1 + l_3)/2$  et donc minorée par le minimum entre  $l_1$  et  $l_3$ .

Si  $n_1 \geq 1$  ou  $n_2 \geq 1$  on constate nécessairement que  $n_3 + n_4 \geq 1$  et une inégalité triangulaire triviale permet de majorer la longueur de  $\gamma$  par  $l_2$ .

Le cas où  $n_5 + n_6 = 0$

L'apparence d'un arc de type  $c_3$  implique alors celle d'au moins un arc de type  $c_4$  et réciproquement. Le seul cas non trivial à examiner est celui où  $n_1 \geq 1$  et  $n_3 + n_4 \geq 2$  (la situation similaire où  $n_2 \geq 1$  s'en déduit immédiatement).

Si  $n_2 = 0$  on minore la longueur de  $\gamma$  par celle d'une courbe de type  $c_3c_1c_4$  où les arcs sont connectés deux à deux (la longueur est alors supérieure ou égale à  $l_1$ ) et, si  $n_2 \geq 1$ , une double inégalité triangulaire permet d'aboutir à la même conclusion.

### 3. Conclusion

Cette présentation met donc à jour trois candidats systoliques : les longueurs  $l_i$  des géodésiques fermées se trouvant dans la classe d'homotopie des arcs  $c_5c_6$  et des arcs correspondants en permutant les sommets  $r, p, q$  (voir Fig. 1). Reste à constater que ces longueurs s'ordonnent trivialement si  $r \leq p \leq q$  à l'aide des formules suivantes, ce qui termine la preuve.

$$\begin{aligned}
 l_1 &= 2 \operatorname{Argch} \left[ 2 \cos \frac{\pi}{r} \cos \frac{\pi}{p} + \cos \frac{\pi}{q} \right] \\
 l_2 &= 2 \operatorname{Argch} \left[ 2 \cos \frac{\pi}{r} \cos \frac{\pi}{q} + \cos \frac{\pi}{p} \right] \\
 l_3 &= 2 \operatorname{Argch} \left[ 2 \cos \frac{\pi}{p} \cos \frac{\pi}{q} + \cos \frac{\pi}{r} \right]
 \end{aligned}$$

### Références

- [1] H. Akrouf, Un processus effectif de détermination des systoles pour les surfaces hyperboliques, *Geom. Dedicata* 121 (2006) 1–8.
- [2] A.F. Beardon, *The Geometry of Discrete Groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 91, Springer-Verlag, 1983.
- [3] P. Buser, K.-D. Semmler, The geometry and spectrum of the one holed torus, *Comment. Math. Helv.* 63 (1988) 259–274.
- [4] R. Dianu, *Sur le spectre des tores pointés*, Thèse, EPFL, Lausanne, 2000.
- [5] A. Haas, Length spectra as moduli for hyperbolic surfaces, *Duke Math. J.* 5 (1985) 922–935.

- [6] U. Hamenstädt, R. Koch, Systoles of a family of triangles surfaces, *Experimental Math.* 11 (2) (2002) 249–270.
- [7] E. Philippe, *Géométrie des surfaces hyperboliques*, Thèse, Université Paul Sabatier, Toulouse, 2008.
- [8] E. Philippe, Les groupes de triangles  $(2, p, q)$  sont déterminés par leur spectre des longueurs, *Ann. Inst. Fourier* 58 (7) (2008) 2659–2693.
- [9] E. Philippe, Sur la rigidité des groupes de triangles  $(r, p, q)$ , *Geom. Dedicata* 149 (2010) 155–160.
- [10] R. Vogeler, *On the geometry of Hurwitz surfaces*, Thesis, Univ. Florida, 2003.