C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 350 (2012) 71–76

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Géométrie différentielle/Systèmes dynamiques

Espace de configuration d'un système mécanique et tours de fibrés associées à un multi-drapeau spécial

Configuration space of some mechanical system and towers of bundles associated to a special multi-flag

Fernand Pelletier

Université de Savoie, laboratoire de mathématiques (LAMA), campus scientifique, 73376 Le Bourget-du-Lac cedex, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 12 octobre 2011
Accepté après révision le 12 décembre 2011
Disponible sur Internet le 10 janvier 2012

Présenté par Étienne Ghys

RÉSUMÉ

Dans cette Note, nous montrons que les espaces de configuration d'un bras articulé de longueur k sur $\mathbb{R}^{m+1}$ donnent naissance à une tour naturelle de fibrés en sphères. De plus, nous établissons que, pour chaque tour de fibrés projectifs associée à un multi-drapeau spécial, on peut lui associer une telle tour de fibrés en sphères qui est un revêtement à deux feuillets de cette dernière.

ABSTRACT

In this Note we show that the configuration spaces of an articulated arm of length k in $\mathbb{R}^{m+1}$ gives rise to a natural tower of sphere bundles. Moreover, we prove that, each tower of projective bundles associated to special multi-flags, we can associate such a tower of sphere bundles which is a two-fold covering of the previous one.

Abridged English version

A **special multi-flag** of step $m \geqslant 1$ and length $k \geqslant 1$ is a sequence (see [5]):

$$\mathcal{F} : D = D_k \subset D_{k-1} \subset \cdots \subset D_j \subset \cdots \subset D_1 \subset D_0 = TM$$

of distributions of constant rank on a manifold M of dimension $(k+1)m+1$ which satisfies the following conditions:

(i) $D_{j-1} = [D_j, D_j]$ is the distribution generated by all Lie bracket of sections of D_j.
(ii) D_j is a distribution of constant rank $(k-j+1)m+1$.
(iii) Each Cauchy characteristic subdistribution $L(D_j)$ of D_j is a subdistribution of constant corank one in each D_{j+1}, for $j = 1, \dots, k-1$, and $L(D_k) = 0$.
(iv) There exists a completely integrable subdistribution $F \subset D_1$ of corank one in D_1.

When $m = 1$ a special multi-flag is a Goursat flag, and, in this case, the conditions (iii) and (iv) are automatically satisfied but for such a distribution F is not unique. One fundamental result on Goursat flags is the existence of locally

Adresse e-mail : pelletier@univ-savoie.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2011.12.007

universal Goursat distributions proved by R. Montgomery and M. Zhitomirskii in [4]: the "monster Goursat manifold" which is constructed by applying Cartan prolongations k times. On the other hand, the kinematic system of a car with $k-1$ trailers can be described by an appropriate Goursat distribution Δ_k on $\mathbb{R}^2 \times (\mathbb{S}^1)^k$ and moreover, this configuration space is diffeomorphic to the Cartan prolongation of the distribution Δ_{k-1} on $\mathbb{R}^2 \times (\mathbb{S}^1)^{k-1}$ (see Appendix D of [4]).

The purpose of this Note is to prove a generalization of this last result for special multi-flags of step $m \geqslant 2$.

For $m \geqslant 2$, the notion of special multi-flags can be considered as a generalization of the notion of Goursat flags. Furthermore, it is proved in [1] and [9] that the existence of a completely integrable subdistribution F of D_1 implies property (iii), and when such a distribution F exists, it is then unique. This fundamental result of [1] and [9] is again obtained by Cartan prolongation (see also [6]). So, in this situation, we can also define a "monster tower" by successive Cartan prolongations of $T\mathbb{R}^{m+1}$ (see for instance [1,9,2]). So we get a tower of projective bundles:

$$\cdots \to P^k(m) \to P^{k-1}(m) \to \cdots \to P^1(m) \to P^0(m) := \mathbb{R}^{m+1}. \tag{1}$$

In this Note, we define a natural notion of "spherical prolongation" which also gives rise to a tower of sphere bundles:

$$\cdots \to \hat{P}^k(m) \to \hat{P}^{k-1}(m) \to \cdots \to \hat{P}^1(m) \to \hat{P}^0(m) := \mathbb{R}^{m+1}. \tag{2}$$

Note that we have a canonical 2-fold covering

$$\hat{P}^k(m) \to P^k(m)$$

for any $k \geqslant 1$ and $m \geqslant 2$.

On the other hand, we can construct a kinematic system (called articulated arm in [10], and system of rigid bars in [3]) in the following way: consider a series of k segments $[M_i; M_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, k-1$, in $\mathbb{R}^{m+1}$, with $m \geqslant 2$, keeping a constant length $l_i = 1$ between M_i and M_{i+1}, and the articulation occurs at points M_i, for $i = 1, \ldots, k-1$; we look for the kinematic evolution of this mechanical system *under the constraint that the velocity of each point M_i, $i = 0, \ldots, k-1$, is collinear with the segment* $[M_i, M_{i+1}]$.

The configuration space $\mathcal{C}^k(m)$ of such a kinematic system is diffeomorphic to $\mathbb{R}^{m+1} \times (\mathbb{S}^m)^k$, and this system is characterized by a distribution $\mathcal{D}_k$ which generates a special multi-flags of length k (see [3] and [10]).

The essential result of this Note is:

Theorem 1. *Let be $\hat{\Delta}_k$ the canonical distribution obtained on $\hat{P}^k(m)$ after k-fold "spherical prolongation". Then we have*:

For each $k \geqslant 1$ and $m \geqslant 2$, there exists a diffeomorphism Φ^k from $\hat{P}^k(m)$ to $\mathcal{C}^k(m)$ such that:

(i) *if $\hat{\pi}^k : \hat{P}^k(m) \to \hat{P}^{k-1}(m)$ and $p^k : \mathcal{C}^k(m) \to \mathcal{C}^{k-1}(m)$ are the canonical projections, we have*:

$$p^k \circ \Phi^k = \Phi^{k-1} \circ \hat{\pi}^k.$$

(ii) $\Phi^k_*(\hat{\Delta}_k) = \mathcal{D}_k$.

In particular, this result gives a positive answer to a conjecture proposed in Section 6 of [2].

1. Introduction et résultats

Un *multi-drapeau spécial* de pas $m \geqslant 1$ et de longueur $k \geqslant 1$ est une suite (voir [5]) :

$$\mathcal{F} : D = D_k \subset D_{k-1} \subset \cdots \subset D_j \subset \cdots \subset D_1 \subset D_0 = TM$$

de distributions de rang constant sur une variété M de dimension $(k+1)m+1$ qui vérifie les conditions suivantes :

(i) $D_{j-1} = [D_j, D_j]$ est la distribution engendrée par les crochets de Lie de section de D_j.
(ii) D_j est une distribution de rang constant $(k-j+1)m+1$.
(iii) Chaque distribution caractéristique de Cauchy[1] $L(D_j)$ of D_j est une sous distribution de corang (constant) un dans chaque distribution D_{j+1}, pour $j = 1, \ldots, k-1$, et $L(D_k) = 0$.
(iv) Il existe une sous distribution complètement intégrable $F \subset D_1$ de corang un dans D_1.

On dit que D engendre le multi-drapeau $\mathcal{F}$.

La notion de multi-drapeau spécial a été introduite dans [7] et [6]. Pour $m \geqslant 2$, indépendamment dans [1] et [9], cette notion a été précisée, et il est démontré que l'existence d'une sous distribution complètement intégrable $F \subset D_1$ de corang

[1] La distribution caractéristique de Cauchy $L(\Delta)$ d'une distribution Δ est la distribution engendrée par l'ensemble champs de vecteurs X tangents à Δ tel que $[X, Y]$ soit tangent à Δ, pour tout champ de vecteurs Y tangent à Δ.

un dans D_1 implique la propriété (iii). Quand une telle distribution F existe, elle est unique. Lorsque $m = 1$, un multi-drapeau spécial est un drapeau de Goursat, et, dans ce cas, les conditions (iii) et (iv) sont automatiquement satisfaites, mais une telle distribution F n'est pas unique. L'un des résultats fondamentaux sur les drapeaux de Goursat établis par R. Montgomery et M. Zhitomirskii dans [4] est la construction d'un « monster Goursat manifold », fondé sur les « prolongations de Cartan » sucessives de l'epace tangent $T\mathbb{R}^2$. D'autre part, le système mécanique de la voiture avec $k-1$ remorques peut être décrit par une distribution de Goursat appropriée $\mathcal{D}_k$ sur $\mathbb{R}^2 \times (\mathbb{S}^1)^k$. De plus, l'espace de configuration de ce système mécanique avec k remorques est difféomorphique à la variété obtenue par prolongation de Cartan de la distribution $\mathcal{D}_{k-1}$ sur $\mathbb{R}^2 \times (\mathbb{S}^1)^{k-1}$ et la distribution $\mathcal{D}_k$ associée est difféomorphe à la prolongation de Cartan de $\mathcal{D}_{k-1}$ (voir Appendix D de [4]).

L'objectif essentiel de cette Note est d'établir une généralisation (Théorème 3.2) de ce dernier résultat dans le cadre des multi-drapeaux spéciaux de pas $m \geqslant 2$. En particulier, ce résultat donne une réponse positive à une conjecture proposée dans [2], Section 6.

2. Tours de fibrés projectifs et sphériques associées à un multi-drapeau spécial

2.1. Prolongation de Cartan et tour de fibrés projectifs

Un couple (M, D) formé d'une distribution de rang constant sur une variété M, sera appelé un *système différentiel* (voir [1] et [9]). Etant donné deux systèmes différentiels (M, D) et (N, Δ), on dira que (M, D, x) est *localement équivalent* à (N, Δ, y) s'il existe un voisinage ouvert U de x dans M et un difféomorphisme ϕ de U sur un voisinage V de $y = \phi(x)$ dans N tel que $\phi_*(D_{|U}) = \Delta_{|V}$.

Soit D une distribution de rang constant $m+1$ sur une variété M de dimension n. De manière classique, le fibré projectif $P(D, M)$ sur M, associé à D, est l'ensemble

$$P(D, M) := \bigcup_{x \in M} P\big(D(x)\big) \tag{3}$$

où $P(D(x))$ est l'espace projectif de l'espace vectoriel $D(x)$. On obtient ainsi un fibré $\pi : P(D, M) \to M$ dont la fibre $\pi^{-1}(x)$ est difféomorphique à l'espace projectif $\mathbb{R}P^m$. La **prolongation de Cartan de rang un** de D est la distribution $D^{(1)}$ définie de la manière suivante : étant donné un point $(x, \lambda) \in G(D, 1)$ alors

$$D^{(1)}_{(x,\lambda)} := \mathrm{d}\pi^{-1}(\lambda) \subset T_{(x,\lambda)} P(D, M) \tag{4}$$

où λ est une direction dans $D(x)$. Par suite, $D^{(1)}$ est une distribution sur $P(D, M)$ de rang constant $m+1$. Pour tout $m \geqslant 2$ et $k \geqslant 1$, en appliquant k fois cette « procédure » à $(\mathbb{R}^{m+1}, T\mathbb{R}^{m+1})$, par induction, on obtient une tour de fibrés projectifs [9] :

$$\cdots \to P^k(m) \to P^{k-1}(m) \to \cdots \to P^1(m) \to P^0(m) := \mathbb{R}^{m+1} \tag{5}$$

où, pour tout $j = 0, \ldots, k$, $P^j(m)$ est une variété de dimension $(j+1)m+1$, et sur chaque $P^j(m)$, Δ_j est une distribution canonique définie inductivement par :

$$P^j(k) = P\big(\Delta_{j-1}, P^{j-1}(m)\big) \quad \text{et} \quad \Delta_j = (\Delta_{j-1})^{(1)} \quad \text{pour } j = 1, \ldots, k \quad \text{et} \quad \Delta_0 = T\mathbb{R}^{m+1}.$$

On a alors le résultat fondamental suivant :

Théorème 2.1. *(Voir [9].)*

(1) *Sur $P^k(m)$, la distribution Δ_k engendre un multi-drapeau spécial de pas m et de longueur k.*
(2) *Soit $\mathcal{F} : D = D_k \subset D_{k-1} \subset \cdots \subset D_j \subset \cdots \subset D_1 \subset D_0 = TM$ un multi-drapeau spécial de pas $m \geqslant 2$ et de longueur $k \geqslant 1$. Alors, pour tout $x \in M$, il existe $y \in P^k(m)$ tels que les systèmes différentiels (M, D, x) et $(P^k(m), \Delta_k, y)$ soient localement équivalents.*

2.2. Prolongation sphérique et tour de fibrés en sphères

Soit D une distribution de rang constant $m+1$ sur une variété M de dimension n. On fixe une métrique riemanniennne g sur M, et on désigne par $\hat{\pi} : S(D, M, g) \to M$ le fibré en sphères associé à D relativement à la métrique induite par g sur D. Sur $S(D, M, g)$, on considère l'action antipodale de $\mathbb{Z}_2$. Le quotient de $S(D, M, g)$ par cette action s'identifie naturellement avec $P(D, M)$. La projection associée $\tau : S(D, M, g) \to P(D, M)$ est un morphisme de fibrés sur M et aussi un revêtement à deux feuillets ; en particulier τ est un difféomorphisme local. Sur $S(D, M, g)$ on considère la distribution $D^{[1]}$ définie de la manière suivante :

$$D^{[1]}_{(x,\nu)} := \big\{ v \in T_{(x,\nu)} S(D, M, g) \text{ tel que } \mathrm{d}\hat{\pi}(v) = \lambda \nu \ \text{ pour un certain } \lambda \in \mathbb{R} \big\} \tag{6}$$

où ν est un vecteur de norme 1 dans $D(x)$.

La distribution $D^{[1]}$ est appelée **la prolongation sphérique** de rang un de (M, D, g).

Remarque 2.1. En fait, le fibré $S(D, M)$ est défini dès que l'on se donne une métrique riemannienne sur D. Dans ce cas, la distribution $D^{[1]}$ est aussi bien définie.

Lemme 2.1. *(Voir [8].) Avec les considérations précédentes on a :*

(i) $\tau_* D^{[1]} = D^{(1)}$.
(ii) *Il existe une métrique riemannienne canonique $\hat{g}$ sur $S(D, M, g)$ qui ne dépend que du choix de g sur M.*

Soient g_0 et g_1 deux métriques riemanniennes sur M. On note $S_i(D, M)$ le fibré en sphères de D associé à la métrique g_i et $D_i^{[1]}$ la prolongation sphérique de (M, D, g_i) pour $i = 0, 1$. On a alors :

Lemme 2.2. *(Voir [8].) Il existe un isomorphisme canonique de fibrés $\psi : S_0(D, M) \to S_1(D, M)$ tel que $\psi_*(D_0^{[1]}) = D_1^{[1]}$.*

On considère une distribution D' de rang constant sur une variété M', et $\phi : M \to M'$ une immersion injective telle que $\phi_*(D_x) \subset D'_{\phi(x)}$ pour tout $x \in M$. Etant donné une métrique riemannienne g' sur M', la métrique riemannienne $g = \phi^* g$ est bien définie sur M et on peut considérer la prolongation sphérique associée. Alors on a :

Lemme 2.3. *(Voir [8].) Dans le contexte précédent, soit $\hat{\phi} : S(D, M, g) \to S(D', M', g')$ l'application définie par $\hat{\phi}(x, \nu) = (\phi(x), d_x\phi(\nu))$. Alors $\hat{\phi}$ est un morphisme de fibrés au-dessus de ϕ qui est une immersion injective, et telle que :*

(i) $\hat{\phi}(S(D, M, g)) = S(\phi_*(D), \phi(M), g')$.
(ii) $\hat{\phi}_*(D^{[1]}) = (\phi_*(D))^{[1]} \subset (D')^{[1]}$.

De plus, si ϕ est un difféomorphisme tel que $\phi_*(D) = D'$, alors $\hat{\phi}$ est aussi un difféomorphisme et on a $\hat{\phi}_*(D^{[1]}) = (D')^{[1]}$. De plus, la métrique riemannienne $\hat{\phi}_* \hat{g}'$ est la métrique canonique $\hat{g}$ associée g (cf. Lemme 2.1).

Comme dans le paragraphe précédent, pour tout $m \geqslant 2$ et $k \geqslant 1$ on peut définir par induction une tour de fibrés en sphères (pour un choix fixé de métrique g sur M) :

$$\cdots \to \hat{P}^k(M) \to \hat{P}^{k-1}(M) \to \cdots \to \hat{P}^1(M) \to \hat{P}^0(M) := M \tag{7}$$

où, pour tout $j = 0, \ldots, k$, $\hat{P}^j(M)$ est une variété de dimension $(j+1)m+1$, et sur chaque $\hat{P}^j(M)$, on a une distribution canonique $\hat{\Delta}_j$ et une métrique riemannienne canonique g_j, définies par induction :

$$\hat{P}^j(M) = S\big(\hat{\Delta}_{j-1}, \hat{P}^{j-1}(M), g_{j-1}\big), \qquad \hat{\Delta}_j = (\hat{\Delta}_{j-1})^{[1]} \quad \text{pour } j = 1, \ldots, k \quad \text{et} \quad \hat{\Delta}_0 = TM$$

g_j est la métrique riemannienne canonique $\hat{g}_{j-1}$ sur $S(\hat{\Delta}_{j-1}, \hat{P}^{j-1}(M), g_{j-1})$ associée à g_{j-1} pour $j = 1, \ldots, k$ et $g_0 = g$. Remarquons que si g' est une autre métrique riemannienne sur M, en appliquant le Lemme 2.2 et le Lemme 2.3, par induction, on construit une famille de difféomorphismes ψ^j, ayant la propriété d'envoyer la tour fibrés en sphères (7) associée à g, sur la tour de fibrés en sphères associée à g' :

$$\cdots \to \hat{P}'^k(M) \to \hat{P}'^{k-1}(M) \to \cdots \to \hat{P}'^1(M) \to \hat{P}'^0(M) := M$$

telle que, pour tout $j = 0, \ldots, k$, on ait :

$$\psi^j\big(\hat{P}^j(M)\big) = \hat{P}'^j(M),$$

ψ^j préserve chaque fibre $\psi^j_*(\hat{\Delta}_j) = \hat{\Delta}'_j$.

Ainsi *les propriétés de la tour* (7) *sont indépendantes du choix de la métrique riemannienne g sur M.*

On notera simplement $\hat{P}^j(m) := \hat{P}^j(\mathbb{R}^{m+1})$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. A partir du Théorème 2.1, et du Lemme 2.1, on obtient :

Théorème 2.2. *Considérons*

$$\cdots \to \hat{P}^k(m) \to \hat{P}^{k-1}(m) \to \cdots \to \hat{P}^1(m) \to \hat{P}^0(m) := \mathbb{R}^{m+1} \tag{8}$$

la tour de fibrés en sphères associée à la métrique canonique de $\mathbb{R}^{m+1}$.

(i) *On a un revêtement à deux feuillets $\tau_k : \hat{P}^k(m) \to P^k(m)$ tel que $(\tau_k)_*(\hat{\Delta}_k) = \Delta_k$.*
(ii) *Sur chaque variété $\hat{P}^k(m)$, la distribution $\hat{\Delta}_k$ engendre un multi-drapeau spécial de pas m et de longueur k.*
(iii) *Soit $\mathcal{F} : D = D_k \subset D_{k-1} \subset \cdots \subset D_j \subset \cdots \subset D_1 \subset D_0 = TM$ un multi-drapeau spécial de pas m et de longueur $k \geqslant 1$. Alors, pour tout $x \in M$, il existe un point $y \in \hat{P}^k(m)$ pour lequel les systèmes différentiels (M, D, x) et $(\hat{P}^k(m), \hat{\Delta}_k, y)$ soient localement équivalents.*

3. Tour de fibrés en sphères associée à un système mécanique

3.1. Système mécanique et multi-drapeau spécial

On se place dans le contexte de [3] et [10]. Considérons une série de k segments $[M_i; M_{i+1}]$, $i = 0, \dots, k-1$, dans $\mathbb{R}^{m+1}$, avec $m \geqslant 2$, qui gardent une longueur constante $l_i = 1$ entre M_i et M_{i+1}, et l'articulation a lieu en M_i, pour $i = 1, \dots, k-1$. Ce système mécanique est appelé « un bras articulé de longueur k sur $\mathbb{R}^{m+1}$ » dans [10] et un système de « k barres rigides » dans [3].

On s'intéresse à l'évolution cinématique de ce système mécanique, *sous la contrainte que la vitesse de chaque point M_i est colinéaire avec le segment $[M_i, M_{i+1}]$ pour $i = 0, \dots, k-1$*. Ce problème est complètement décrit dans [3] et [10]. Notons que, comme pour la voiture avec remorques, l'évolution cinématique de ce système peut se décrire en termes de coordonnées hypersphériques (voir [10]) et aussi on a des résultats de platitude et de controllabilité d'un tel système mécanique (voir [3]). On peut associer à ce système un multi-drapeau spécial de pas $m \geqslant 2$ et de longueur $k \geqslant 1$ comme suit : l'espace $(\mathbb{R}^{m+1})^{k+1}$, étant écrit comme le produit cartésien $\mathbb{R}_0^{m+1} \times \dots \times \mathbb{R}_i^{m+1} \times \dots \times \mathbb{R}_k^{m+1}$ de k copies de $\mathbb{R}^{m+1}$, soit $x_i = (x_i^1, \dots, x_i^{m+1})$ les coordonnées canoniques de $\mathbb{R}_i^{m+1}$ que l'on munit de son produit scalaire canonique. Sur $(\mathbb{R}^{m+1})^{k+1}$, considérons le champ de vecteurs

$$\mathcal{Z}_i = \sum_{r=1}^{m+1} \left(x_{i+1}^r - x_i^r\right) \frac{\partial}{\partial x_i^r} \quad \text{pour } i = 0, \dots, k-1. \tag{9}$$

Compte tenu des hypothèses, l'évolution cinématique d'un bras articulé $(M_0, \dots, M_k)$ est décrite par le système controlé :

$$\dot{q} = \sum_{i=0}^{k-1} u_i \mathcal{Z}_i + \sum_{r=1}^{m+1} u_{n+r} \frac{\partial}{\partial x_k^r} \tag{10}$$

avec les contraintes suivantes : $\|x_i - x_{i+1}\| = 1$ pour $i = 0 \cdots k-1$ (voir [3] ou [10]).

Considérons l'application $\Psi_i(x_0, \dots, x_k) = \|x_i - x_{i+1}\|^2 - 1$. Alors, l'espace de configuration $\mathcal{C}^k(m)$ de ce système mécanique est l'ensemble $\{(x_0, \dots, x_k),\ \text{tel que } \Psi_i(x_0, \dots, x_k) = 0 \text{ pour } i = 0, \dots, k-1\}$.

Soit $\mathcal{E}_k$ la distribution engendrée par les champs de vecteurs

$$\left\{\mathcal{Z}_0, \dots, \mathcal{Z}_{k-1}, \frac{\partial}{\partial x_k^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k^{m+1}}\right\}.$$

On note $\mathcal{D}_k$ la distribution sur $\mathcal{C}^k(m)$ définie par $\mathcal{D}_k(q) = T_q\mathcal{C}^k(m) \cap \mathcal{E}_k$. Les propriétés de $\mathcal{D}_k$ sont résumées dans le résultat suivant :

Théorème 3.1. *(Voir [3,10].) Sur $\mathcal{C}^k(m)$, la distribution $\mathcal{D}_k$ possède les propriétés suivantes :*

(i) *$\mathcal{D}_k$ est une distribution de rang constant $m+1$.*
(ii) *La distribution $\mathcal{D}_k$ engendre un multi drapeau spécial sur $\mathcal{C}^k(m)$ de pas m et de longueur k.*

3.2. Bras articulé et prolongation sphérique

A un bras articulé sur $\mathbb{R}^{m+1}$ ($m \geqslant 2$) de longueur $k \geqslant 1$ on peut associer la tour de fibrés sphériques :

$$\dots \to \mathcal{C}^k(m) \to \mathcal{C}^{k-1}(m) \to \dots \to \mathcal{C}^1(m) \to \mathcal{C}^0(m) := \mathbb{R}^{m+1}. \tag{11}$$

Il résulte du Théorème 3.1, et du Théorème 2.2, que le système différentiel $(\mathcal{C}^k(m), \mathcal{D}_k))$ associé à un bras articulé de longueur k sur $\mathbb{R}^{m+1}$ est localement isomorphe au système différentiel canonique $(\hat{P}^k(m), \hat{\Delta}_k)$ en un point approprié. En fait le théorème suivant donne un résultat bien plus fort :

Théorème 3.2. *Soit $\hat{\Delta}_k$ la distribution canonique obtenue sur $\hat{P}^k(m)$ après k « prolongations sphériques » successives de $T\mathbb{R}^{m+1}$. Alors, pour chaque $k \geqslant 1$ et $m \geqslant 2$, il existe un difféomorphisme Φ^k de $\hat{P}^k(m)$ sur $\mathcal{C}^k(m)$ tel que :*

(i) *$p^k \circ \Phi^k = \Phi^{k-1} \circ \hat{\pi}^k$ où $\hat{\pi}^k : \hat{P}^k(m) \to \hat{P}^{k-1}(m)$ et $p^k : \mathcal{C}^k(m) \to \mathcal{C}_{k-1}(m)$ sont les projections canoniques.*
(ii) *$\Phi_*^k(\hat{\Delta}_k) = \mathcal{D}_k$.*

De plus, on a le diagramme suivant dont chaque projection verticale est un revêtement à deux feuillets, pour $k \geqslant 1$:

$$\begin{array}{cccccc}
\cdots & \to \mathcal{C}^k(m) & \to \mathcal{C}^{k-1}(m) & \to \cdots & \to \mathcal{C}^1(m) & \to \mathcal{C}^0(m) := \mathbb{R}^{m+1} \\
\cdots & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \downarrow \\
\cdots & \to P^k(m) & \to P^{k-1}(m) & \to \cdots & \to P^1(m) & \to P^0(m) := \mathbb{R}^{m+1}
\end{array}$$

Il résulte alors du Théorème 2.2 et du Théorème 3.2 le corollaire suivant :

Corollaire 3.1. *Soit $\mathcal{F} : D = D_k \subset D_{k-1} \subset \cdots \subset D_j \subset \cdots \subset D_1 \subset D_0 = TM$ un multi-drapeau spécial de pas $m \geqslant 2$ et de longueur $k \geqslant 1$. Alors, pour tout $x \in M$, il existe $y \in \mathcal{C}^k(m)$ pour lequel les systèmes différentiels (M, D, x) et $(\mathcal{C}^k(m), \mathcal{D}_k, y)$ sont localement équivalents.*

La preuve du Théorème 3.2 repose sur la proposition suivante :

Proposition 3.1. *(Voir [8].)*

(1) *Il existe un isomorphisme de fibrés sur $\mathbb{R}^{m+1}$ $\hat{\Psi} : \mathcal{D}_k \to \mathcal{C}^k(m) \times \mathbb{R}^{m+1}$.*
(2) *Chaque fibre du fibré trivial $\mathcal{C}^k(m) \times \mathbb{R}^{m+1}$ étant munie du produit euclidien canonique sur $\mathbb{R}^{m+1}$, soit γ_k la métrique riemannienne sur $\mathcal{D}_k$, tel que le morphisme $\hat{\Psi}$ soit une isométrie entre chaque fibre. Alors $\hat{\Psi}$ induit un difféomorphisme $\Psi : S(\mathcal{D}_k, \mathcal{C}^k(m), \gamma_k) \to \mathcal{C}^{k+1}(m)$ qui vérifie les propriété suivantes :*
  (i) *Ψ commute avec les projections canoniques $S(\mathcal{D}_k, \mathcal{C}^k(m), \gamma_k) \to \mathcal{C}^k(m)$ et $\mathcal{C}^{k+1}(m) \to \mathcal{C}^k(m)$.*
  (ii) *$\Psi_*[(\mathcal{D}_k)^{[1]}] = \mathcal{D}_{k+1}$.*

Esquisse de preuve du Théorème 3.2 :
Supposons que l'on ait un difféomorphisme $\Phi^k : \hat{P}^k(m) \to \mathcal{C}^k(m)$ qui vérifie les proprétés (i) et (ii) du Théorème 1.

Selon la Proposition 3.1, on a un difféomorphisme $\Psi : S(\mathcal{D}_k, \mathcal{C}^k(m), \gamma_k) \to \mathcal{C}^{k+1}(m)$ tel que : $\Psi_*[(\mathcal{D}_k)^{[1]}] = \mathcal{D}_{k+1}$, et qui commute avec les projections naturelles $S(\mathcal{D}_k, \mathcal{C}^k(m), \gamma_k) \to \mathcal{C}^k(m)$ et $\mathcal{C}^{k+1}(m) \to \mathcal{C}^k(m)$. Prenant en compte notre hypothèse de récurrence, on peut munir $\hat{P}^k(m)$ de la métrique riemannienne $\bar{\gamma}_k = (\Psi^k)^*(\gamma_k)$. Selon le Lemme 2.3, on peut étendre $\Phi^k : \hat{P}^k(m) \to \mathcal{C}^k(m)$ en un difféomorphisme $\hat{\Phi}^k : S(\hat{\Delta}_k, \hat{P}^k(m), \bar{\gamma}_k) \to S(\mathcal{D}_k, \mathcal{C}_k, \gamma_k)$ tel que $\hat{\Phi}^k_*[(\hat{\Delta}_k)^{[1]}] = (\mathcal{D}_k)^{[1]}$ et qui commute avec les projections naturelles

$$S\big(\hat{\Delta}_k, \hat{P}^k(m), \bar{\gamma}_k\big) \to \hat{P}^k(m) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}^{k+1}(m) \to \mathcal{C}^k(m).$$

Finalement, selon le Lemme 2.2, on peut munir $\hat{P}^k(m)$ de la métrique riemannienne construite par induction sur la tour de fibrés sphères (7), et on a alors un difféomorphisme $\Phi : \hat{P}^{k+1}(m) \to S(\hat{\Delta}_k, \hat{P}^k(m), \bar{\gamma}_k)$ qui commute avec les projections naturelles

$$\hat{P}^{k+1}(m) \to \hat{P}^k(m) \quad \text{et} \quad S\big(\hat{\Delta}_k, \hat{P}^k(m), \bar{\gamma}_k\big) \to \hat{P}^k(m)$$

et tel que $\Phi_*(\hat{\Delta}_{k+1}) = \hat{\Delta}_k^{[1]}$.
Alors $\Phi^{k+1} = \Psi \circ \hat{\Phi}^k \circ \Phi$ vérifie les propriétés du Théorème 3.2 au niveau $k+1$. La dernière partie est alors une conséquence du Théorème 2.2.

Références

[1] J. Adachi, Global stability of special multi-flags, Israel J. Math. 179 (2010) 29–56.
[2] A.L. Castro, W.C. Howard, A Monster approach to Goursat multi-flags, http://arxiv.org/abs/1107.4145, July 2011.
[3] S. Li, W. Respondek, The geometry, controllability, and flatness property of the n-bar system, J. Control 84 (5) (2011) 834–850.
[4] R. Montgomery, M. Zhitomirskii, Geometric approach to Goursat flags, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 18 (2001) 459–493.
[5] P. Mormul, Geometric singularity classes for special k-flags, $k \geqslant 2$, of arbitrary length, in: S. Janeczko (Ed.), Singularity Theory Seminar, vol. 8, Warsaw Univ. of Technology, 2003, pp. 87–100, preprint.
[6] P. Mormul, Multi-dimensional Cartan prolongation and special k-flags, in: H. Hironaka, et al. (Eds.), Geometric Singularity Theory, in: Banach Center Publications of Math., vol. 65, Polish Acad. Sci., Warsaw, 2004, pp. 157–178.
[7] W. Pasillas-Lépine, W. Respondek, Contact systems and corank one involutive subdistributions, Acta Appl. Math. 69 (2001) 105–128.
[8] F. Pelletier, Configuration spaces of a kinematic system and Monster tower of special multi-flags, http://arxiv.org/abs/1109.4788.
[9] K. Shibuya, K. Yamaguchi, Drapeau theorem for differential systems, Differential Geom. Appl. 27 (6) (2009) 793–808.
[10] M. Slayman, F. Pelletier, Articulated arm and special multi-flags, JMSAA 8 (1) (March 2011) 9–41.