C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 350 (2012) 411–412

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Géométrie algébrique/Géométrie analytique

Exemples de faisceaux cohérents sans résolution localement libre en dimension 3

Examples of coherent sheaves with no resolution by locally free sheaves in dimension 3

Victor Vuletescu [a,b]

[a] *Universitatea Bucureşti, Facultatea de Matematică şi Informatică, St. Academiei 14, Bucharest, Roumanie*
[b] *"Simion Stoilow" Institute of Mathematics of the Romanian Academy,* [1] *Romania*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 21 mars 2012
Accepté après révision le 30 mars 2012
Disponible sur Internet le 21 avril 2012

Présenté par Claire Voisin

RÉSUMÉ

En 1982, Schuster a prouvé que pour toutes les surfaces complexes compactes lisses, tous les faisceaux cohérents $\mathcal{F}$ sur X admettent des résolutions

$$\cdots \to E_n \to E_{n-1} \to \cdots \to E_1 \to E_0 \to \mathcal{F} \to 0$$

avec les E_i's localement libres (fibrés vectoriels). En 2002, Voisin a prouvé que ceci est faux pour certaines variétés kähleriennes de dimension $\geqslant 3$. Dans cette Note, on donne de nouveaux exemples de variétés complexes compactes lisses X de dimension 3 non-kähleriennes et de faisceaux cohérents $\mathcal{F}$ sur X n'admettant pas globalement une résolution localement libre. La preuve que ces faisceaux n'admettent pas de résolution localement libre est très différente des arguments de Voisin.

ABSTRACT

In 1982, Schuster proved that for any compact complex surface X, every coherent sheaf $\mathcal{F}$ on X has global resolutions

$$\cdots \to E_n \to E_{n-1} \to \cdots \to E_1 \to E_0 \to \mathcal{F} \to 0$$

such that the E_i's are locally free (vector bundles). In 2002, Voisin proved that this is false for some Kähler compact complex manifolds of dimension $\geqslant 3$. In this Note, we give some new examples of non-Kähler compact complex manifolds of dimension 3 and coherent sheaves $\mathcal{F}$ on X having no global resolution by vector bundles. The proof that these sheaves do not admit a locally free resolution is very different from Voisin's argument.

Soit X une variété complexe compacte lisse et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. Par la définition même d'un faisceau cohérent, $\mathcal{F}$ a, autour de chaque point $x \in X$, une résolution par des faisceaux de $\mathcal{O}_U$-modules libres

$$\cdots \to \mathcal{O}_U^{\oplus m_n} \to \mathcal{O}_U^{\oplus m_{n-1}} \to \cdots \to \mathcal{O}_U^{\oplus m_1} \to \mathcal{O}_U^{\oplus m_0} \to \mathcal{F}_U \to 0.$$

Adresse e-mail : vuli@fmi.unibuc.ro.
[1] Research group of the project ID-3-0288.

1631-073X/$ – see front matter
http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2012.03.020

Ceci soulève naturellement la question de savoir si l'on peut trouver une résolution globale du $\mathcal{F}$ sur tout X par des faisceaux localement libres (fibrés vectoriels)

$$\cdots \to E_n \to E_{n-1} \to \cdots \to E_1 \to E_0 \to \mathcal{F} \to 0.$$

Ceci est vrai dans le cas $\dim(X) \leqslant 2$ (Schuster, [5]), tandis qu'il existe des contre-exemples en dimension $\geqslant 3$. (Voisin, [6].)

Nous allons montrer qu'il existe des variétés complexes compactes X de dimension 3 non-kähleriennes et des faisceaux cohérents $\mathcal{F}$ sur X n'admettant pas de résolutions globales par des faisceaux localement libres.

La variété X sera une variété de Calabi–Eckmann, plus précisément une structure complexe sur un produit de deux sphères de dimension 3. Pour construire cette structure, rappelons d'abord que les classes d'isomorphisme de fibrés elliptiques principaux sur une variété complexe lisse fixée B et dont la fibre est une courbe elliptique lisse fixée F sont en correspondence bijective naturelle avec le premier groupe de cohomologie de Čech $H^1(B, \mathcal{O}_B(F))$, où $\mathcal{O}_B(F)$ est le faisceau de germes de fonctions holomorphes définies sur B à valeurs dans F. Dans le cas où B est le produit de deux droites projectives complexes, $B = \mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$, on voit que le groupe ci-dessus est isomorphe à $H^2(\mathbf{P}^1(\mathbb{C}), \mathbb{Z})^{\oplus 4} \simeq \mathbb{Z}^{\oplus 4}$. Fixons une courbe elliptique lisse F arbitraire ; en choisissant l'élément $(1,1,1,1) \in H^2(\mathbf{P}^1(\mathbb{C}), \mathbb{Z})^{\oplus 4}$ on obtient une variété X de dimension trois, ayant une structure de fibré elliptique principal $\pi : X \to \mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ et qui est difféomorphe avec $S^3 \times S^3$ (pour plus de détails sur les fibrés elliptiques principaux, voir, par exemple, [2–4]). Il nous paraît intéressant de rappeler que les variétés de Calabi–Eckmann ont des propriétés très intéressantes, parmi lesquelles : elles sont non-käleriennes, tout en étant simplement-connexes (ce qui est impossible en dimension deux), et elles ont des nombres de Hodge $h^{i,i}$ non-nuls, bien que tous les nombres de Betti b_{2i} soient nuls (sauf b_0 et b_6, évidemment).

Soit $Y \subset X$ l'image réciproque d'une droite projective dans $\mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$; alors Y est une surface de Hopf (primaire). Choisissons un fibré vectoriel E de rang deux sur Y tel que $c_2(E) = 1$ (où $c_2(E)$ est la seconde classe de Chern) ; un tel choix est possible par [1]. Soit ensuite $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(X)$ défini comme $\mathcal{F} = i_*(E)$ où i est l'inclusion de Y en X. On a alors le résultat suivant :

Théorème 1. *Le faisceau $\mathcal{F}$ défini ci-dessus n'admet pas de résolutions par des faisceaux localement libres sur X.*

Démonstration. Supposons qu'il existe une telle résolution

$$\cdots \to E_n \to E_{n-1} \to \cdots \to E_1 \to E_0 \to \mathcal{F} \to 0.$$

En particulier, il existe un faisceau localement libre E_0 sur X et une surjection $E_0 \to \mathcal{F} \to 0$. Par restriction à Y on obtient une nouvelle surjection $E_{0|Y} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}_{|Y} \to 0$. Par ailleurs, $\mathcal{F}_{|Y}$ est isomorphe à E, donc le noyau de α, $K = \ker(\alpha)$ est aussi localement libre sur Y. On a donc la suite exacte de faisceaux localement libres sur Y

$$0 \to K \to E_{0|Y} \to E \to 0.$$

Puisque $c_2(E_{0|Y}) = i^*(c_2(E_0)) = 0$, il s'ensuit par le choix de E que $c_2(K) = -1$, ce qui contredit l'inégalité de Bănică–Le Potier $c_1^2(K) - 4c_2(K) \leqslant 0$ (voir [1]). $\square$

Remarque 1. On peut étendre l'exemple ci-dessus en prenant $X =$ fibré elliptique principal au-dessus d'une surface de Hirzebruch Σ_n arbitraire, correspondant à un couple $(a_1, a_2) \in H^2(\Sigma_n, \mathbb{Z}) \times H^2(\Sigma_n, \mathbb{Z})$ tels que a_1, a_2 soient amples sur Σ_n et indépendants sur $\mathbb{Z}$, en prenant pour Y l'image réciproque d'une courbe lisse projective arbitraire dans Σ_n et un fibré vectoriel E sur Y avec $c_2(E) > 0$.

Remerciements

L'auteur remercie le rapporteur inconnu pour avoir signalé une imprécision dans la version originale. Le travail a eu le soutien partiel du projet « Vector Bundle Techniques in the Geometry of Complex Varieties », PN-II-ID-PCE-2011-3-0288, Contract 132/05.10.2011.

Références

[1] C. Bănică, J. Le Potier, Sur l'existence des fibrés vectoriels holomorphes sur les surfaces non-algèbriques, J. Reine Angew. Math. 378 (1987) 1–31.
[2] A. Blanchard, Espaces fibrés kählériens compacts, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 238 (1954) 2281–2283.
[3] V. Brînzănescu, The Neron–Severi group for nonalgebraic surfaces I. Elliptic bundle case, Manuscripta Math. 79 (2) (1993) 187–195.
[4] T. Höfer, Remarks on torus principal bundles, J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ) 33 (1) (1993) 227–259.
[5] H.W. Schuster, Locally free resolutions of coherent sheaves on surfaces, J. Reine Angew. Math. 337 (1982) 159–165.
[6] C. Voisin, A counterexample to the Hodge conjecture extended to Kähler varieties, Int. Math. Res. Not. 20 (2002) 1057–1075.