C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 351 (2013) 191–196

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Équations aux dérivées partielles

Problème inverse pour une équation parabolique à coefficients périodiques non réguliers ☆

Inverse problem for a parabolic equation with periodic and nonsmooth coefficients

Isma Kaddouri [a,b], Djamel Eddine Teniou [a]

[a] *Laboratoire d'analyse topologie probabilités, CNRS UMR 7353, université d'Aix–Marseille, France*
[b] *Laboratoire d'analyse mathématique numérique des équations aux dérivées partielles, université Houari-Boumedienne, BP 32, El Allia Bab ezzouar, Alger, Algérie*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 22 novembre 2012
Accepté après révision le 2 avril 2013
Disponible sur Internet le 20 avril 2013

Présenté par Gilles Lebeau

RÉSUMÉ

On prouve un résultat de stabilité pour un problème inverse associé à une équation parabolique non linéaire périodique, en utilisant une inégalité de Carleman. Cette inégalité de stabilité concerne la reconstruction d'un coefficient L^∞ en prenant un ouvert d'observation quelconque.

ABSTRACT

We prove a stability result for an inverse problem associated with a periodic nonlinear parabolic equation, by using a Carleman inequality. This stability inequality concerns the reconstruction of L^∞ coefficient, and is obtained thanks to an observation over an arbitrary open set of observation.

Abridged English version

In this work, we study the stable reconstruction for the potential $\mu(x)$ of problem (P_μ) by using an inequality of Carleman and a localized observation of the solution $u(t,x)$. For this, we are going to carry out a special weight function. The direct problem was widely studied in the recent years, but to our knowledge, few inverse problems associated with parabolic systems with periodic conditions have been addressed (see [2]).

Generally, Carleman inequalities use Dirichlet homogeneous boundary conditions, and are associated with the linear problem. In [6], Fursikov and Imanuvilov consider a problem with the Neumann boundary condition, but they use two weight functions. In this paper, we obtain new results in three directions:

- on the one hand, by considering the case of a nonlinear parabolic operator;
- on the other hand, by proving that we can avoid the strong condition required by Choi [2], on the open of observation ω (see Proposition 3.1), we demonstrate that we can choose any subset ω of Ω;
- by requiring less regularity for the potential $\mu(x)$, i.e. taking the coefficient in $L^\infty(\Omega)$.

☆ Ce travail a été partiellement financé par le projet Tassili : 11 MDU 834.
Adresses e-mail : isma.kaddouri@gmail.com (I. Kaddouri), deteniou@usthb.dz (D.E. Teniou).

1631-073X/$ – see front matter
http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2013.04.001

1. Introduction

Ce travail porte sur l'étude d'un problème inverse pour une équation parabolique issue de modèles biologiques (voir [1]), mais aussi de modèles issus de la médecine, combustion, écologie, etc. Ils peuvent décrire l'évolution de la concentration d'une population spatialement distribuée et soumise à deux processus : un processus de réaction local et un processus de diffusion qui implique une répartition de ces populations dans un espace supposé périodique (par exemple, un espace urbain traversé par des voies de communication). Ces modèles sont représentés par des équations aux dérivées partielles paraboliques à coefficients périodiques.

On définit l'ouvert $\Omega := \prod_{j=1}^{n}(0, L_j) \subset \mathbb{R}^n$ avec $L_j > 0$, $1 \leqslant j \leqslant n$, comme cellule de référence, L_j est la période par rapport à la variable x_j, et $L = (L_1, L_2, \ldots, L_n)$. On pose : $Q = (0,T) \times \Omega$, $\Sigma = (0,T) \times \partial\Omega$, $\Gamma_j^0 = \partial\Omega \cap \{x_j = 0\}$, $\Gamma_j^1 = \partial\Omega \cap \{x_j = L_j\}$, et pour $0 < t_0 < T$, $Q_{t_0}^T = (t_0, T) \times \Omega$.

On considère le problème parabolique non linéaire et périodique suivant :

$$(P_\mu): \quad \begin{cases} u_t(t,x) = D\Delta u(t,x) + \mu(x)u(t,x) - \nu(x)u^2(t,x), & 0 < t < T,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{\Gamma_j^0} = u|_{\Gamma_j^1}, \qquad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right|_{\Gamma_j^0} = \left.\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right|_{\Gamma_j^1}, & 1 \leqslant j \leqslant n, \end{cases}$$

où le coefficient de diffusion D est un réel positif que l'on prendra égal à 1 dans toute la suite, $u_0(x)$ désigne la condition initiale supposée positive sur Ω et périodique, i.e. : $u_0(x+L) = u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. La densité de la population à un temps donné t et en un point x de l'espace est définie par $u(t,x)$, $\mu(x)$ désigne le taux de croissance de la population et $\nu(x)$ traduit la compétition pour les ressources au sein de cette dernière. Ces fonctions sont L-périodiques. Dans ce travail, on va étudier la stabilité du potentiel $\mu(x)$ en établissant une inégalité de Carleman avec une observation localisée. Dans l'étude des problèmes d'évolution, $\mu(x)$ est d'une très grande importance, car sa connaissance permet de savoir comment va se comporter la population. Il existe très peu d'études de problèmes inverses associés à des problèmes paraboliques non linéaires utilisant les inégalités de Carleman, mais on peut citer [3] et [4]. En ce qui concerne les problèmes paraboliques périodiques, il existe à notre connaissance une seule référence [2]. En général les inégalités de Carleman classiques imposent des conditions de Dirichlet homogènes au bord. Il existe un travail de Fursikov et Imanuvilov [6] associé à des conditions de Neumann, mais qui utilise deux fonctions poids. Dans [2], l'auteur exploite ce résultat et impose une condition forte sur l'ouvert d'observation. On établit un résultat sans aucune contrainte sur l'ouvert d'observation. Nos résultats principaux peuvent se résumer ainsi :

- on étudie, via une inégalité de stabilité, la reconstruction du potentiel $\mu(x)$ dans le cas d'un opérateur parabolique non linéaire ;
- on prouve que l'on peut se dispenser de la condition exigée dans [2] (Proposition 3.1) sur l'ouvert d'observation qui, dans son cas, doit contenir les arêtes de la cellule ;
- on exige peu de régularité sur le potentiel $\mu(x)$: $\mu(x) \in L^\infty(\Omega)$.

2. Existence et propriétés de la solution

On considère un potentiel $\mu(x)$ dans $L^\infty_\sharp(\mathbb{R}^n)$ avec $L^p_\sharp(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^p(\mathbb{R}^n)/u(x+L) = u(x)\ p.p \text{ dans } \mathbb{R}^n\}$, $p \in [1, +\infty]$.

Théorème 2.1 *(Existence et unicité). On suppose que $\mu, \nu \in L^\infty_\sharp(\mathbb{R}^n)$, $u_0(x)$ est continue, $u_0(x) \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}^n$ et L-périodique, $\nu(x) > 0$. Alors, le problème (P_μ) admet une unique solution périodique dans $\mathcal{C}([0,T]; L^2_\sharp(\mathbb{R}^n)) \cap L^2((0,T); H^1_\sharp(\mathbb{R}^n))$. De plus, $u \geqslant 0$ sur $(0,T) \times \mathbb{R}^n$.*

Preuve. Pour la démonstration de ce théorème, on adapte des résultats de R.G. Pinsky, J. Engländer [5], et H. Berestycki, F. Hamel, L. Roques [1]. Plus de détails seront donnés dans un article à venir [7]. □

2.1. Principes du maximum

L'étude de ce problème inverse nous amène à établir des estimations uniformes sur la solution du problème (P_μ). Puisque $\mu(x)$ est dans $L^\infty_\sharp(\mathbb{R}^n)$, cette solution ne sera pas de classe $\mathcal{C}^{2,1}((0,T) \times \mathbb{R}^n)$. On ne peut pas, par conséquent, utiliser le principe du maximum classique. Pour cela, on va énoncer un principe du maximum qui exige moins de régularité de la solution.

Proposition 2.1. *On suppose que $\mu, \nu \in L^\infty_\sharp(\mathbb{R}^n)$, et que $u_0 \geqslant 0$ continue et bornée. Alors, pour toute solution u du problème (P_μ), $u \in \mathcal{C}([0,T]; L^2_\sharp(\mathbb{R}^n)) \cap L^2((0,T); H^1_\sharp(\mathbb{R}^n))$, on a :*

il existe $C = C(\|u_0\|_\infty, \|\mu\|_\infty, \|\nu\|_\infty, \Omega, T)$, telle que $\|u\|_\infty \leqslant C$, où $\|u\|_\infty = \mathrm{supess}_{t\in(0,T), x\in\Omega}|u(t,x)|$.

Proposition 2.2. *On suppose que $u_0(x) \geqslant r_0 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, alors il existe une constante $M > 0$ telle que $u(t,x) \geqslant e^{-MT} r_0 > 0$ dans $(0,T) \times \mathbb{R}^n$.*

Dans l'inégalité (2), on a besoin d'isoler le terme $f = \mu - \tilde{\mu}$ que l'on veut reconstruire. Comme ce terme est également un facteur de u_t, cela nous amène à utiliser un principe de maximum pour u_t pour l'absorber.

Proposition 2.3. *On suppose que $u_0(x) \in W^{2,\infty}(\Omega)$, alors la solution u du problème (P_μ) est telle que $u_t \in \mathcal{C}([0,T]; L^2_\sharp(\mathbb{R}^n)) \cap L^2(0,T; H^1_\sharp(\mathbb{R}^n)) \cap L^\infty((0,T); L^\infty_\sharp(\mathbb{R}^n))$, et on a :*
il existe $C = C(\|u_0\|_{W^{2,\infty}}, \|\mu\|_\infty, \|\nu\|_\infty, \Omega, T)$, telle que $\|u_t\|_\infty \leqslant C$.

Les résultats précédents seront détaillés dans [7].

3. Inégalité de Carleman

Notre problème étant parabolique non linéaire et périodique, la preuve du théorème de stabilité nous amène à utiliser une inégalité de Carleman avec une fonction poids particulière.

$$Lz = z_t - \Delta z = f(x,z) \quad \text{dans } Q\,, \text{ avec } f(x,z) = \mu(x)z - \nu(x)z^2.$$

Le point clé de notre inégalité de Carleman réside dans le choix d'une fonction poids adaptée au problème parabolique étudié. Celle-ci va nous permettre d'une part, de simplifier les preuves du Théorème 3.2 par rapport à la démonstration faite dans [2] et, d'autre part, de choisir un ouvert d'observation quelconque.

Proposition 3.1. *Soit un ouvert $\omega \Subset \Omega$ non vide. Alors il existe une fonction $\psi \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ telle que $\psi(x) > 0$, $\forall x \in \Omega$, et $\nabla\psi(x) \neq 0$, si $x \notin \omega$, et telle que ψ L-périodique.*

Preuve. La démonstration utilisée dans [6], valable pour $n \geqslant 1$, est technique. Nous allons donner une démonstration simple dans le cas où $n = 1$.

Pour $\lambda > 0$ et $t_0 > 0$, $t \in (t_0, T)$, on définit les deux fonctions poids : $\varphi(t,x) = \frac{e^{\lambda\psi(x)}}{(t-t_0)(T-t)}$, $\alpha(t,x) = \frac{e^{\lambda\psi(x)} - e^{2\lambda\|\psi\|_\infty}}{(t-t_0)(T-t)} < 0$, et on prouve :

Théorème 3.2. *Soit un ouvert $\omega \Subset \Omega$ quelconque non vide, il existe $s_0, \lambda_0 > 1$ et une constante $C = C(\Omega, \omega, T, t_0)$, $C > 0$, tels que : $\forall s \geqslant s_0$, $\forall \lambda \geqslant \lambda_0$ la solution du problème $Lq = f$ avec les conditions périodiques (3), vérifie l'inégalité suivante :*

$$\int_{Q_{t_0}^T} \left(\frac{1}{s\varphi} \left(|q_t|^2 + |\Delta q|^2 \right) + s\lambda^2 \varphi |\nabla q|^2 + s^3 \lambda^4 \varphi^3 q^2 \right) e^{2s\alpha} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant C \left(\int_{Q_{t_0}^T} |f|^2 e^{2s\alpha} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{]t_0,T[\times\omega} s^3 \lambda^4 \varphi^3 |q|^2 e^{2s\alpha} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \right).$$

Preuve. Nous allons donner quelques étapes de la démonstration de l'inégalité de Carleman.

En posant $w(t,x) = e^{s\alpha} q(t,x)$, on obtient : $L_1 w(t,x) + L_2 w(t,x) = f_s(t,x)$, $(t,x) \in Q_{t_0}^T$, avec :

$$L_1 w = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} - s^2 \lambda^2 \varphi^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)^2 - s\alpha_t w, \quad \text{et} \quad L_2 w = w_t + 2s\lambda\varphi \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} + 2s\lambda^2 \varphi w \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)^2,$$

$$\text{et} \quad f_s = f e^{2s\alpha} - s\lambda\varphi w \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} + s\lambda^2 \varphi w \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)^2.$$

On pose : $\langle L_1 w, L_2 w \rangle_{L_2(Q_{t_0}^T)} = A_1 + A_2 + A_3$, et on va détailler le calcul pour le terme A_1 :

$$A_1 := -\int_{Q_{t_0}^T} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} + s^2 \lambda^2 \varphi^2 w |\nabla \psi|^2 + s\alpha_t w \right) \left(w_t + 2s\lambda^2 \varphi w |\nabla \psi|^2 \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Le choix d'une fonction poids périodique (voir Proposition 3.1) nous a permis de faire disparaître les termes de bord. Une intégration par parties des termes en dérivées secondes par rapport à w donne :

$$A_1=\int\limits_{Q_{t_0}^T}\left\{\sum_{i=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial t}-\frac{s^2\lambda^2\varphi^2}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial t}|\nabla\psi|^2-\frac{s}{2}\alpha_t\frac{\partial^2 w}{\partial t}+2s\lambda^2\varphi|\nabla\psi|^2|\nabla w|^2 \right.$$
$$\left.+2s\lambda^2 w\sum_{i=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\big(\varphi|\nabla\psi|^2\big)-2s^3\lambda^4\varphi^3 w^2|\nabla\psi|^4-2s^2\lambda^2\varphi\alpha_t w^2|\nabla\psi|^2\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

D'où

$$A_1=\int\limits_{Q_{t_0}^T}\left\{\frac{s^2\lambda^2}{2}\big(\varphi^2|\nabla\psi|^2\big)_t w^2-\frac{s}{2}\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}w^2+2s\lambda^2\varphi|\nabla\psi|^2|\nabla w|^2\right.$$
$$\left.+2s\lambda^2 w\sum_{i=1}^n \frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\big(\varphi|\nabla\psi|^2\big)-2s^3\lambda^4\varphi^3 w^2|\nabla\psi|^4-2s^2\lambda^2\varphi\alpha_t w^2|\nabla\psi|^2\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

On procède de la même manière pour A_2 et A_3, qui sont définis par :

$$A_2=-\int\limits_Q \big(s^2\lambda^2\varphi^2 w|\nabla\psi|^2+s\alpha_t w\big)\left(2s\lambda\varphi\sum_{j=1}^n\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$
$$A_3=-\int\limits_Q \left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}\right)\left(2s\lambda\varphi\sum_{j=1}^n\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

La fin de la preuve redevient classique [6]. □

4. Inégalité de stabilité

On va établir, en utilisant le Théorème 3.2, une inégalité de stabilité pour le potentiel $\mu(x)$. Soit $r_0>0$ fixé, $M>0$ fixé, on pose $\mathcal{I}=\{\gamma\in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^n),\ r_0\leqslant\|\gamma\|_\infty\leqslant M$, et γ L-périodique$\}$, et $\mathcal{M}=\{\alpha\in L^\infty(\mathbb{R}^n),\ \|\alpha\|_\infty\leqslant M$, et α L-périodique$\}$. Le résultat principal qu'on se propose d'établir est le suivant :

Théorème 4.1 *(Inégalité de stabilité). Soit $\omega\Subset\Omega$ tel que : $u_0\in\mathcal{I}$, $\mu,\tilde\mu\in\mathcal{M}$, pour $t_0\in(0,T)$ fixé. Alors il existe une constante $C=C(\Omega,\omega,t_0,T,r_0,M)$, $C>0$ telle que :*

$$\|\mu-\tilde\mu\|_{L^2(\Omega)}\leqslant C\big(\|u-\tilde u\|_{H^1(t_0,T;L^2(\omega))}+\big\|(u-\tilde u)(\theta,.)\big\|_{H^2(\Omega)}\big)$$

où u (resp. $\tilde u$) est la solution du problème (P_μ) (resp. $(P_{\tilde\mu})$).

Preuve. On suit l'approche proposée dans [4]. On pose $\theta=\frac{T+t_0}{2}$, $f=\mu-\tilde\mu$, $v=u-\tilde u$ et $y=v_t$. Alors y est solution du système suivant :

$$\begin{cases} y_t=\Delta y+\big(\mu-\nu(u+\tilde u)\big)y+f\tilde u_t-\nu v(u_t+\tilde u_t), & t_0\leqslant t\leqslant T,\ x\in\Omega,\\ y|_{\Gamma_j^0}=y|_{\Gamma_j^1},\qquad \left.\dfrac{\partial y}{\partial x_j}\right|_{\Gamma_j^0}=\left.\dfrac{\partial y}{\partial x_j}\right|_{\Gamma_j^1}, & t_0\leqslant t\leqslant T.\end{cases}$$

On pose $z=e^{s\alpha}y$ et $I:=\int_{t_0}^\theta\int_\Omega L_2 zz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$.

Lemma 4.1. *Soit $\lambda\geqslant\lambda_0$ et $s\geqslant s_0$, il existe une constante $C=C(\Omega,\omega,t_0,T)$ telle que, si u (resp. $\tilde u$) est la solution du problème (P_μ) (resp. $(P_{\tilde\mu})$), on a :*

$$|I|\leqslant C\left[s^{3/2}\lambda^2\int_{t_0}^{\theta}\int_\omega e^{2s\alpha}\varphi^3y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+s^{-3/2}\lambda^{-2}\int\limits_{Q_{t_0}^T}e^{2s\alpha}f^2\tilde u_t^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int\limits_\Omega\big|v(\theta,x)\big|^2\,\mathrm{d}x\right].$$

Preuve. En utilisant l'inégalité de Carleman précédente, les inégalités de Cauchy–Schwarz et de Young, on obtient :

$$I \leqslant s^{-3/2}\lambda^{-2}\left(\|L_2 z\|^2_{L^2(Q^T_{t_0})} + 2s^3\lambda^4 \int\limits_{Q^\theta_{t_0}} e^{2s\alpha}\varphi^3 y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right)$$

$$\leqslant C\left[s^{3/2}\lambda^2 \int\limits_{t_0}^{T}\int\limits_{\omega} e^{2s\alpha}\varphi^3 y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int\limits_{Q^T_{t_0}} e^{2s\alpha}\left[\left(\mu - \nu(u+\tilde{u})\right)^2 y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + f^2\tilde{u}_t^2 + \nu^2 v^2(u_t+\tilde{u}_t)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right]. \tag{1}$$

Par le principe du maximum pour u et u_t (voir Propositions 2.1 et 2.3), et le fait que :

$$\int\limits_{Q^T_{t_0}} \left|v(t,x)\right|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant \left[C\int\limits_{\Omega}\left|v(\theta,x)\right|^2\mathrm{d}x + \frac{(T-t_0)^2}{2}\int\limits_{t_0}^{T}\int\limits_{\Omega}\left|\partial_t v(s,x)\right|^2\mathrm{d}s\right],$$

et pour s suffisamment grand, on en déduit le résultat. □

Lemma 4.2. *Soit $\lambda \geqslant \lambda_0$, $s \geqslant s_0$. Il existe une constante C telle que :*

$$\int\limits_{\Omega} e^{2s\alpha(\theta,x)} f^2\tilde{u}(\theta,x)^2\,\mathrm{d}x \leqslant C\left[s^{3/2}\lambda^2\int\limits_{t_0}^{T}\int\limits_{\omega} e^{2s\alpha}\varphi^3 y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + s^{-1}\lambda^{-2}\int\limits_{Q^T_{t_0}} e^{2s\alpha} f^2\tilde{u}_t^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int\limits_{\Omega}\left|v(\theta,x)\right|^2\mathrm{d}x\right.$$
$$\left. + \int\limits_{\Omega} e^{2s\alpha(\theta,x)}\nu^2 v^2(\theta,x)(u+\tilde{u})^2\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\Omega}\left[\Delta v(\theta,x) + \nu v(\theta,x)\right]^2\mathrm{d}x\right].$$

Preuve. On déduit du système vérifié par v évalué pour $t=\theta$ que :

$$\tilde{u}^2 f^2 \leqslant C\left[y(\theta,x)^2 + \nu^2 v^2(\theta,x)(u+\tilde{u})^2 + \left[\Delta v(\theta,x) + \nu v(\theta,x)\right]^2\right], \quad \forall x \in \Omega.$$

On calcule I en utilisant la définition de L_2 et le fait que $e^{s\alpha(t_0,x)} = 0$; on obtient :

$$\int\limits_{\Omega} e^{2s\alpha(\theta,x)} y(\theta,x)^2\,\mathrm{d}x \leqslant 2|I| + Cs\lambda^2\int\limits_{t_0}^{\theta}\int\limits_{\Omega} e^{2s\alpha}\varphi y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

En utilisant le fait que $\varphi \leqslant C\varphi^3$ $(C>0)$ et l'inégalité de Carleman du Théorème 3.2, on obtient le résultat. □

Fin de la démonstration du Théorème 4.1. On utilise le principe du maximum pour u_t (Proposition 2.3) et le fait qu'il existe $C>0$, tel que :

$$s^{-1}\lambda^{-2}\int\limits_{Q^T_{t_0}} e^{2s\alpha} f^2\tilde{u}_t^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant Cs^{-1}\lambda^{-2}\int\limits_{Q^T_{t_0}} e^{2s\alpha} f^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \tag{2}$$

et également le principe du maximum pour u (Proposition 2.1) et le fait que ν soit borné, on obtient :

$$\int\limits_{\Omega} e^{2s\alpha(\theta,x)}\nu^2 v^2(\theta,x)(u+\tilde{u})^2\,\mathrm{d}x \leqslant C\int\limits_{\Omega}\left|v(\theta,x)\right|^2\mathrm{d}x.$$

D'où

$$\int\limits_{\Omega} e^{2s\alpha(\theta,x)} f^2\left(\tilde{u}(\theta,x)^2 - s^{-1}\lambda^{-2}C\right)\mathrm{d}x$$
$$\leqslant C\left[s^{3/2}\lambda^2\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\omega} e^{2s\alpha}\varphi^3 y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int\limits_{\Omega}\left|v(\theta,x)\right|^2\mathrm{d}x + \int\limits_{\Omega}\left[\Delta v(\theta,x) + \nu v(\theta,x)\right]^2\mathrm{d}x\right]. \tag{3}$$

D'après la Proposition 2.2, on sait que $\tilde{u} \geqslant e^{-MT} r_0 > 0$, alors $\tilde{u}^2 \geqslant e^{-2MT} r_0^2 > 0$, d'où : $\tilde{u}^2 - \frac{C}{s\lambda^2} > e^{-2MT} r_0^2 - \frac{C}{s\lambda^2} > r_1 > 0$ pour s assez grand. Finalement, on obtient :

$$\int_{\Omega} e^{2s\alpha(\theta,x)} f^2 \,\mathrm{d}x \leqslant \frac{C}{r_1}\left(s^{3/2}\lambda^2 \int_0^T \int_{\omega} e^{2s\alpha}\varphi^3 y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{\Omega} \left|v(\theta,x)\right|^2 \mathrm{d}x + \int_{\Omega} \left[\Delta v(\theta,x) + \nu v(\theta,x)\right]^2 \mathrm{d}x\right).$$

Il suffit alors de remplacer v par $u - \tilde{u}$, et d'utiliser le fait que : $e^{2s\alpha(\theta,x)} \geqslant C > 0$, et $0 < e^{2s\alpha} \leqslant C$, avec C indépendant de μ et $\tilde{\mu}$, pour obtenir le résultat. $\square$

Références

[1] H. Berestycki, F. Hamel, L. Roques, Analysis of the periodically fragmented environment model: 1. Influence of periodic heterogeneous environment on species persistence, J. Math. Biol. 51 (1) (2005) 75–113.

[2] J. Choi, Inverse problem for a parabolic equation with space-periodic boundary conditions by a Carleman estimate, Inverse Ill-posed Probl. 11 (2) (2003) 111–135.

[3] M. Cristofol, L. Roques, Biological invasions: deriving the regions at risk from partial measurements, Math. Biosci. 215 (2) (2008) 158–166.

[4] M. Cristofol, L. Roques, An inverse problem involving two coefficents in a nonlinear reaction–diffusion equation, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 350 (9–10) (2012) 469–473.

[5] J. Engländer, R.G. Pinsky, Uniqueness/nonuniqueness for nonegative solutions of second-order parabolic equations of the form $u_t = Lu + Vu - \gamma u^p$ in $\mathbb{R}^n$, J. Differential Equations 192 (2003) 396–428.

[6] A.V. Fursikov, O.Y. Imanuvilov, Controllability of Evolution Equations, Lecture Notes Ser., vol. 34, Seoul National University, Korea, 1996.

[7] I. Kaddouri, D.E. Teniou, Inverse problem for a parabolic nonlinear equation with periodic coefficients, in preparation.