



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com



Logic/Combinatorics

 $\{-1\}$ -self dual finite prechains and applicationsPréchaînes finies  $\{-1\}$ -auto duales et applicationsHoucine Bouchaala<sup>a</sup>, Youssef Boudabbous<sup>b</sup>, Gérard Lopez<sup>c</sup><sup>a</sup> Département de math-physique, Institut préparatoire aux études d'ingénieurs de Sfax, Université de Sfax, B.P. 1172, 3000 Sfax, Tunisia<sup>b</sup> King Saud University, Department of Mathematics, College of Sciences, P. Box 2455, Riyadh 11451, Saudi Arabia<sup>c</sup> Institut de mathématiques de Luminy, CNRS–UPR 9016, 163 avenue de Luminy, case 907, 13288, Marseille cedex 09, France

## ARTICLE INFO

## Article history:

Received 10 August 2013

Accepted after revision 25 October 2013

Presented by the Editorial Board

## ABSTRACT

Given a digraph  $D = (V, A)$ , a pair  $\{x, y\}$  of distinct vertices of  $D$  is *neutral* if  $(x, y) \in A \Leftrightarrow (y, x) \in A$ . A  $k$ -*subdigraph* of  $D$  is an induced subdigraph of  $D$  with  $k$  vertices. The *dual* of  $D$  is the digraph  $D^* = (V, A^*)$ , where  $A^* = \{(x, y); (y, x) \in A\}$ .  $D$  is *self dual* if it is isomorphic to its dual. It is *hereditarily self dual* if each one of its induced subdigraphs is self dual. A digraph is a *prechain* if it has neither any non self dual 3-subdigraph with exactly one neutral pair, nor any 3-subdigraph with at least two neutral pairs, nor any non self dual 4-subdigraph with no neutral pair. In this note, we describe the prechains, on  $n \geq 7$  vertices, with at least one neutral pair and for which all the  $(n - 1)$ -subdigraphs are self dual. As an application, we prove that a digraph, on  $n \geq 9$  vertices, is hereditarily self dual if and only if all its 4-subdigraphs and its  $(n - 3)$ -subdigraphs are self dual.

© 2013 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

## R É S U M É

Étant donné un digraphe  $D = (V, A)$ , une paire  $\{x, y\}$  de sommets de  $D$  distincts est *neutre* si  $(x, y) \in A \Leftrightarrow (y, x) \in A$ . Un  $k$ -*sous-digraphe* de  $D$  est un sous-digraphe induit de  $D$  ayant  $k$  sommets. Le *dual* de  $D$  est le digraphe  $D^* = (V, A^*)$  où  $A^* = \{(x, y); (y, x) \in A\}$ . Un digraphe est *auto dual* s'il est isomorphe à son dual. Il est *héréditairement auto dual* si tous ses sous-digraphes induits sont auto duaux. Un digraphe est une *préchaîne* s'il n'a aucun 3-sous-digraphe non auto dual ayant exactement une paire neutre, aucun 3-sous-digraphe ayant au moins deux paires neutres, aucun 4-sous-digraphe non auto dual sans paire neutre. Dans cette note, nous décrivons les préchaînes, à  $n \geq 7$  sommets, ayant au moins une paire neutre et dont tous les  $(n - 1)$ -sous-digraphes sont auto duaux. Comme application, nous montrons qu'un digraphe, à  $n \geq 9$  sommets, est héréditairement auto dual dès lors que tous ses 4-sous-digraphes et ses  $(n - 3)$ -sous-digraphes sont auto duaux.

© 2013 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

## Version française abrégée

Dans cette note, tous les ensembles considérés sont finis.

Un *digraphe*  $D$  est un couple  $(V, A)$  (noté aussi  $(V(D), A(D))$ ) où  $V$  est un ensemble (appelé ensemble des *sommets* de  $D$ ) et  $A$  est un sous-ensemble de  $(V \times V) \setminus \{(x, x); x \in V\}$  (appelé ensemble des *arcs* de  $D$ ). À toute partie  $X$  de  $V$  est associé

E-mail addresses: [houcine.bouchaala@ipeis.rnu.tn](mailto:houcine.bouchaala@ipeis.rnu.tn), [houcine\\_bouchaala@yahoo.fr](mailto:houcine_bouchaala@yahoo.fr) (H. Bouchaala), [yboudabbous@ksu.edu.sa](mailto:yboudabbous@ksu.edu.sa), [youssef\\_boudabbous@yahoo.fr](mailto:youssef_boudabbous@yahoo.fr) (Y. Boudabbous), [gerard.lopez1@free.fr](mailto:gerard.lopez1@free.fr) (G. Lopez).

le sous-digraphe  $D[X] = (X, A \cap (X \times X))$  de  $D$  induit par  $X$ . Un  $k$ -sous-digraphe de  $D$  est un sous-digraphe à  $k$  sommets de  $D$ . Pour tout sommet  $x$  de  $D$ ,  $D[V \setminus \{x\}]$  est aussi noté  $D - x$ . Soit  $x$  et  $y$  deux sommets de  $D$  distincts. La notation  $x \rightarrow y$  signifie  $(x, y) \in A$  et  $(y, x) \notin A$ . La paire  $\{x, y\}$  est dite *orientée* si  $x \rightarrow y$  ou  $y \rightarrow x$ . Autrement, la paire  $\{x, y\}$  est dite *neutre*. Un *tournoi* est un digraphe dont toutes les paires sont orientées. Une *chaîne* (ou bien *ordre total*) est un tournoi transitif, c'est-à-dire tel que, pour tous sommets  $x, y, z$ , si  $x \rightarrow y$  et  $y \rightarrow z$ , alors  $x \rightarrow z$ . Si  $T$  est une chaîne à au moins 2 sommets, alors l'unique sommet  $a$  (resp.  $b$ ) tel que, pour tout sommet  $x \in V(T) - \{a\}$  (resp.  $x \in V(T) - \{b\}$ ),  $a \rightarrow x$  (resp.  $x \rightarrow b$ ) est appelé le *minimum* (resp. *maximum*) de  $T$ . Soient  $D = (V, A)$  et  $D' = (V', A')$  deux digraphes. Un *isomorphisme* de  $D$  sur  $D'$  est une bijection  $f$  de  $V$  sur  $V'$  vérifiant : pour tous  $x, y \in V$ ,  $(x, y) \in A$  si et seulement si  $(f(x), f(y)) \in A'$ . Deux digraphes sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme de l'un sur l'autre. Le *dual* d'un digraphe  $D = (V, A)$  est le digraphe  $D^* = (V, A^*)$  où  $A^* = \{(x, y); (y, x) \in A\}$ . Un digraphe est *auto dual* s'il est isomorphe à son dual.

Soit  $D = (V, A)$  un digraphe. Pour tout entier  $k \geq 1$ , le digraphe  $D$  est  $\{k\}$ -*auto dual* (resp.  $\{-k\}$ -*auto dual*) si le sous-digraphe  $D[X]$  (resp.  $D[V \setminus X]$ ) est auto dual, pour toute partie  $X$  de  $V$  à  $k$  éléments. Étant donné un ensemble  $F$  d'entiers relatifs non nuls, le digraphe  $D$  est  $F$ -*auto dual* si  $D$  est  $\{k\}$ -auto dual pour tout  $k \in F$ . Le digraphe  $D$  est *héréditairement auto dual* si  $D[X]$  est auto dual pour toute partie  $X$  de  $V$ . Un *pic* est un digraphe isomorphe à l'un des digraphes définis sur  $\{0, 1, 2\}$  tels que  $\{0, 2\}$  soit une paire neutre et  $(0 \rightarrow 1$  et  $2 \rightarrow 1)$  ou  $(1 \rightarrow 0$  et  $1 \rightarrow 2)$ . Un 3-cycle est un tournoi isomorphe au tournoi  $(\{0, 1, 2\}, \{(0, 1), (1, 2), (2, 0)\})$ . Un *diamant* est un tournoi à quatre sommets ayant un seul 3-cycle.

Une *préchaîne* (dite *prechain* dans [6]) est un digraphe, n'ayant ni pic, ni diamant, et dont les éventuelles paires neutres sont deux à deux disjointes. Considérons quelques préchaînes particulières, qui seront utilisées dans nos principaux résultats.

i) Pour tout entier  $n \geq 1$ , nous associons une classe de préchaînes  $S_n$  introduite dans [9] comme suit. Étant donné un ensemble  $\{t_0, \dots, t_{2n-1}\}$  à  $2n$  éléments, on note  $S_n(t_0, \dots, t_{2n-1})$ , la classe des digraphes  $\theta_n$  définis sur  $\{t_0, \dots, t_{2n-1}\}$  comme suit (où les indices sont considérés modulo  $2n$ ). Le digraphe  $\theta_1$  est tel que la paire  $\{t_0, t_1\}$  soit neutre. Si  $n \geq 2$ , le digraphe  $\theta_n$  est tel que : pour tout  $i \in \{0, \dots, 2n-1\}$ , la paire  $\{t_i, t_{i+n}\}$  est neutre et  $t_i \rightarrow t_{i+k}$ , pour tout  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ . Pour tout  $i \in \{0, \dots, 2n-1\}$ , les paires  $\{t_i, t_{i+n}\}$  et  $\{t_{i+1}, t_{i+1+n}\}$  sont dites *consécutives*. On note  $S_n$  la classe des digraphes  $D$  tels que  $D$  est isomorphe à un certain élément de  $S_n(t_0, \dots, t_{2n-1})$ .

On appelle *roue faible* (dite *weak wheel* dans [6]), tout digraphe appartenant à la réunion des classes  $S_n$ , où  $n \geq 1$ .

ii) Une *roue* (dite *wheel* dans [6]) est une roue faible dont toutes les paires neutres ont même type.

iii) Une *roue faible alternée* est une roue faible sur  $4n$  sommets, où  $n \geq 1$ , telle que toutes deux paires neutres consécutives sont de types différents.

iv) Une *presque roue* est une préchaîne  $D$  sur  $2n+1$  sommets, où  $n \geq 1$ , ayant un sommet  $a$  tel que le sous-digraphe  $D - a$  soit une roue.

v) Un *presque ordre total*, appelé aussi *pot* [6], est un digraphe  $D$  à au moins 3 sommets ayant deux sommets  $a$  et  $b$  tels que  $D - b$  est une chaîne de minimum  $a$  et  $D - a$  est une chaîne de maximum  $b$ .

Notons que les préchaînes tournois  $\{-1\}$ -auto duales ont été décrites par les deux premiers auteurs dans [4]. Dans cette note, nous décrivons d'abord les préchaînes non tournois  $\{-1\}$ -auto duales à au moins 7 sommets. Nous obtenons ce qui suit.

**Théorème 0.1.** *Étant donné une préchaîne non tournoi  $D$  à au moins 7 sommets,  $D$  est  $\{-1\}$ -auto duale si et seulement si  $D$  est, soit un pot non tournoi, soit une roue, soit une presque roue, soit une roue faible alternée.*

La remarque suivante, qui est une conséquence immédiate de la description des préchaînes  $\{5\}$ -auto duales [6], complète la description des préchaînes non tournois  $\{-1\}$ -auto duales.

**Remarque 1.** Une préchaîne non tournoi  $D$  à  $n \leq 6$  sommets est  $\{-1\}$ -auto duale si et seulement si, ou bien  $n \leq 5$ , ou bien  $n = 6$  et  $D$  est un pot non tournoi ou une roue.

Ensuite, en utilisant le **Théorème 0.1**, nous obtenons ce qui suit.

**Corollaire 0.2.** 1) Une préchaîne non tournoi à au moins 8 sommets est  $\{-2\}$ -auto duale si et seulement si elle est, soit un pot non tournoi, soit une roue.

2) Étant donné un entier  $k \geq 3$ , une préchaîne non tournoi à au moins  $6+k$  sommets est  $\{-k\}$ -auto duale si et seulement si elle est un pot non tournoi.

Enfin, en utilisant le **Corollaire 0.2**, l'étude faite dans [4] et quelques lemmes techniques, nous obtenons notre deuxième résultat principal.

**Théorème 0.3.** *Un digraphe à au moins 9 sommets est héréditairement auto dual si et seulement si il est  $\{4, -3\}$ -auto dual.*

**Corollaire 0.4.** *Étant donné un entier  $k \geq 4$ , un digraphe à au moins  $6+k$  sommets est héréditairement auto dual si et seulement si il est  $\{-k\}$ -auto dual.*

## 1. Introduction and results

### 1.1. Preliminaries

All sets considered in this note are finite.

A digraph  $D$  consists of a vertex set  $V(D)$  and an arc set  $A(D)$ , where an arc is an ordered pair of distinct vertices. Such a digraph is denoted by  $(V(D), A(D))$  or simply by  $(V, A)$ . With each subset  $X$  of  $V$  is associated the *subdigraph*  $D[X] = (X, A \cap (X \times X))$  of  $D$  induced by  $X$ . A  $k$ -*subdigraph* of  $D$  is any subdigraph on  $k$  vertices of  $D$ . For each vertex  $x$  of  $D$ ,  $D[V \setminus \{x\}]$  is also denoted by  $D - x$ . Let  $x, y$  be two distinct vertices of  $D$ . The notation  $x \rightarrow y$  means that  $(x, y) \in A$  and  $(y, x) \notin A$ . We say that  $\{x, y\}$  is an *oriented pair* if  $x \rightarrow y$  or  $y \rightarrow x$ ; otherwise,  $\{x, y\}$  is a *neutral pair*. The digraph  $D$  is *arc-connected* if for all  $x \neq y \in V$ , there is a sequence  $x_0 = x, \dots, x_p = y$  of vertices of  $D$  such that the pair  $\{x_i, x_{i+1}\}$  is oriented, for each  $i < p$ . Given two disjoint sets of vertices  $X$  and  $Y$ , we write  $X \rightarrow Y$  to mean that  $x \rightarrow y$  for each  $(x, y) \in X \times Y$ . A subset  $I$  of  $V$  is an *interval* [8] of  $D$  if for all  $a, b \in I$  and for all  $x \in V - I$ ,  $((x, a) \in A \Leftrightarrow (y, a) \in A)$  and  $((a, x) \in A \Leftrightarrow (a, y) \in A)$ . A *strict interval* of  $D$  is any interval of  $D$  that is distinct from  $V$ . Given two digraphs  $D = (V, A)$  and  $D' = (V', A')$ , an *isomorphism* from  $D$  onto  $D'$  is a bijection  $f$  from  $V$  onto  $V'$  satisfying: for any  $x, y \in V$ ,  $(x, y) \in A \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in A'$ . The digraphs  $D$  and  $D'$  are *isomorphic* if there exists an isomorphism from  $D$  onto  $D'$ . The *dual* of a digraph  $D = (V, A)$  is the digraph  $D^* = (V, A^*)$  where,  $A^* = \{(x, y); (y, x) \in A\}$ . A digraph  $D$  is *self dual* if it is isomorphic to its dual.

Let  $D = (V, A)$  be a digraph. For every positive integer  $k$ , the digraph  $D$  is  $\{k\}$ -*self dual* (resp.  $\{-k\}$ -*self dual*), whenever the subdigraph  $D[X]$  (resp.  $D[V \setminus X]$ ) is self dual, for every subset  $X$  of  $V$  with  $k$  elements. Given a set  $F$  of non-zero integers, the digraph  $D$  is  $F$ -*self dual* if  $D$  is  $\{k\}$ -self dual for each  $k \in F$ . The digraph  $D$  is *hereditarily self dual* if  $D[X]$  is self dual for each subset  $X$  of  $V$ . Recall that, if  $D$  has at least  $2k$  vertices and if  $D$  is  $\{-k\}$ -self dual, then it follows from a combinatorial lemma of M. Pouzet [11] that  $D$  is  $\{1, \dots, k\}$ -self dual.

A *tournament* is a digraph of which all pairs are oriented. A *chain* (or a *total order*) is a transitive tournament, i.e. a tournament  $T$  such that for all  $x, y, z \in V(T)$ , if  $(x, y) \in A(T)$  and  $(y, z) \in A(T)$  then  $(x, z) \in A(T)$ . If  $T$  is a chain with at least 2 vertices, then the unique vertex  $a$  (resp.  $b$ ) such that for each vertex  $x \in V(T) - \{a\}$  (resp.  $x \in V(T) - \{b\}$ ),  $a \rightarrow x$  (resp.  $x \rightarrow b$ ) is called the *minimum* (resp. *maximum*) of  $T$ . A *peak* is any digraph isomorphic to one of the digraphs defined on  $\{0, 1, 2\}$  such that  $\{0, 2\}$  is a neutral pair and either  $(0 \rightarrow 1$  and  $2 \rightarrow 1)$  or  $(1 \rightarrow 0$  and  $1 \rightarrow 2)$ . A *3-cycle* is any digraph isomorphic to the tournament  $(\{0, 1, 2\}, \{(0, 1), (1, 2), (2, 0)\})$ . A *diamond* is any tournament on four vertices having exactly one 3-cycle.

### 1.2. Prechains

The description of  $\{3, 4\}$ -self dual arc-connected digraphs follows from the study of “difference classes” done in 1992 by G. Lopez and C. Rauzy [9]. Notice that this study was extended to the infinite arc-connected digraphs in [6] by Y. Boudabbous and C. Delhommé. In this last study, the authors introduced the following notion of prechains.

**Definition 1.1.** (See [6].) A digraph is a *prechain* if it has neither any peak, nor any diamond, nor any 3-subdigraph with at least two neutral pairs.

The following remark is an easy consequence of the above studies.

**Remark 1.** A  $\{3, 4\}$ -self dual arc-connected digraph is either hereditarily self dual or a prechain.

Also, recall the following result deduced, first, from a result due to G. Lopez and C. Rauzy [10] on a reconstruction problem posed by M. Pouzet ([3,2]), and secondly, from a result due to M. Basso-Gerbelli and P. Ille [1] on a reconstruction problem posed by S. Ulam [12].

**Lemma 1.2.** (See [1], [10].) Given a prechain  $D$  with at least 7 vertices, if  $D$  is  $\{-1\}$ -self dual, then  $D$  is self dual.

As every subdigraph of a prechain is a prechain, the following corollary is an immediate consequence of Lemma 1.2.

**Corollary 1.3.** Given a positive integer  $k$  and a prechain  $D$  with at least  $k + 7$  vertices, if  $D$  is  $\{-(k + 1)\}$ -self dual then  $D$  is  $\{-k\}$ -self dual.

Let us consider some particular prechains that will be used in our main results.

- (i) For each positive integer  $n$ , we associate a class of prechains  $\mathcal{S}_n$  defined in [9] as follows. Given a  $2n$ -element set  $\{t_0, \dots, t_{2n-1}\}$ , we denote by  $\mathcal{S}_n(t_0, \dots, t_{2n-1})$ , the set of digraphs  $\theta_n$  defined on  $\{t_0, \dots, t_{2n-1}\}$  as follows, where the integers are considered modulo  $2n$ . The digraph  $\theta_1$  is any one of the two digraphs on  $\{t_0, t_1\}$ , for which  $\{t_0, t_1\}$  is a

neutral pair. If  $n \geq 2$ , the digraph  $\theta_n$  is such that: for each  $i \in \{0, \dots, 2n-1\}$ ,  $\{t_i, t_{i+n}\}$  is a neutral pair and  $t_i \rightarrow t_{i+k}$ , for each  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ . For each  $i \in \{0, \dots, 2n-1\}$ , the pairs  $\{t_i, t_{i+n}\}$  and  $\{t_{i+1}, t_{i+1+n}\}$  are said *consecutive*. We denote by  $\mathcal{S}_n$  the set of digraphs  $D$  such that  $D$  is isomorphic to some element of  $\mathcal{S}_n(t_0, \dots, t_{2n-1})$ .

We call *weak wheel* [6], any digraph belonging to the union of the classes  $\mathcal{S}_n$ , where  $n \geq 1$ .

- (ii) A *wheel* [6] is a weak wheel of which the neutral pairs have the same type.
- (iii) An *alternating weak wheel* is any weak wheel on  $4n$  vertices, for some positive integer  $n$ , for which every two consecutive neutral pairs are of different types.
- (iv) An *almost wheel* is a prechain  $D$  on  $2n+1$  vertices, for some positive integer  $n$ , having a vertex  $v$  such that the subdigraph  $D-v$  is a wheel; (such a vertex  $v$  is unique).
- (v) A *pot* [6] is a digraph  $D$  with at least 3 vertices, having two vertices  $a$  and  $b$  such that  $D-b$  is a chain with minimum  $a$  and  $D-a$  is a chain with maximum  $b$ .

### 1.3. Results

Notice that the  $\{-k\}$ -self dual tournament prechains ( $k \geq 1$ ) have been described in 2006 by H. Bouchaala and Y. Boudabbous [4]. In this note, first, we describe the  $\{-1\}$ -self dual non-tournament prechains on at least 7 vertices. We obtain:

**Theorem 1.4.** *Given a non-tournament prechain  $D$  on at least 7 vertices,  $D$  is  $\{-1\}$ -self dual if and only if  $D$  is either a non-tournament pot, or a wheel, or an almost wheel or an alternating weak wheel.*

The following remark, which is an immediate consequence of the description of the  $\{5\}$ -self dual prechains [6], completes the description of the  $\{-1\}$ -self dual non-tournament prechains.

**Remark 2.** A non-tournament prechain  $D$  on  $n \leq 6$  vertices is  $\{-1\}$ -self dual if and only if, either  $n \leq 5$ , or  $n = 6$  and  $D$  is a non-tournament pot or a wheel.

Second, using Corollary 1.3 and Theorem 1.4, we obtain:

#### Corollary 1.5.

- 1) A non-tournament prechain with at least 8 vertices is  $\{-2\}$ -self dual if and only if it is either a non-tournament pot, or a wheel.
- 2) Given an integer  $k \geq 3$ , a non-tournament prechain with at least  $6+k$  vertices is  $\{-k\}$ -self dual if and only if it is a non-tournament pot.

Finally, using Corollary 1.5, the study in [4] and some technical lemmas, we obtain our second main result.

**Theorem 1.6.** *A digraph with at least 9 vertices is hereditarily self dual if and only if it is  $\{4, -3\}$ -self dual.*

**Corollary 1.7.** *Given an integer  $k \geq 4$ , a digraph on at least  $6+k$  vertices is hereditarily self dual if and only if it is  $\{-k\}$ -self dual.*

Notice that this last corollary gives a positive answer to a conjecture formulated by A. Boussaïri [7]. Moreover, our study recovers, in particular, the morphology of hereditarily self dual digraphs obtained by Y. Boudabbous [5].

## 2. Description of prechains

To describe prechains, G. Lopez and C. Rauzy [9] introduced, for each positive integer  $n$ , a class of digraphs  $E(\mathcal{S}_n)$  defined as follows.

- Given a  $2n$ -element set  $\{t_0, \dots, t_{2n-1}\}$  and a family of pairwise disjoint sets  $\sigma_0, \dots, \sigma_{2n-1}$  (each of the sets  $\sigma_i$  can be empty) which are disjoint from  $\{t_0, \dots, t_{2n-1}\}$ , we denote by  $E_n(t_0, \dots, t_{2n-1}; \sigma_0, \dots, \sigma_{2n-1})$ , the class of digraphs  $\gamma_n$  defined on  $\{t_0, \dots, t_{2n-1}\} \cup \sigma_0 \cup \dots \cup \sigma_{2n-1}$  as follows, where the integers are considered modulo  $2n$ .

- ◊  $\gamma_n[\{t_0, \dots, t_{2n-1}\}] \in \mathcal{S}_n(t_0, \dots, t_{2n-1})$ .
- ◊ For each  $i \in \{0, \dots, 2n-1\}$ ,  $\gamma_n[\sigma_i]$  is a chain and  $\{t_i\} \rightarrow \sigma_i \rightarrow \{t_{i+1}\}$ .
- ◊ For each  $i \in \{0, \dots, 2n-1\}$ ,  $\gamma_n[\sigma_i \cup \sigma_{i+n}]$  is a diamond-free tournament. The sets  $\sigma_i$  are called the *sectors* of  $\gamma_n$  and the sets  $\sigma_i \cup \sigma_{i+n}$  are called the *bisectors* of  $\gamma_n$ .
- ◊ If  $n \geq 2$ , then for each  $i \in \{0, \dots, 2n-1\}$ ,  $(\{t_{i+n+1}, \dots, t_{i+2n}\} \cup (\sigma_{i+n+1} \cup \dots \cup \sigma_{i+2n-1})) \rightarrow \sigma_i \rightarrow (\{t_{i+1}, \dots, t_{i+n}\} \cup (\sigma_{i+1} \cup \dots \cup \sigma_{i+n-1}))$ .

- $E(\mathcal{S}_n)$  is the class of digraphs  $D$  such that  $D$  is isomorphic to some element of some  $E_n(t_0, \dots, t_{2n-1}; \sigma_0, \dots, \sigma_{2n-1})$ .

**Lemma 2.1.** [9] *The class of non-tournament prechains is included in the union of the classes  $E(\mathcal{S}_n)$ , where  $n \geq 1$ .*

Under the previous notations, we denote  $\tilde{E}(S_n)$  (resp.  $\tilde{E}_n(t_0, \dots, t_{2n-1}; \sigma_0, \dots, \sigma_{2n-1})$ ) the set of elements of  $E(S_n)$  (resp.  $E_n(t_0, \dots, t_{2n-1}; \sigma_0, \dots, \sigma_{2n-1})$ ) that do not contain any diamond. By the following lemma, we characterize the elements of  $\tilde{E}(S_n)$  within those of  $E(S_n)$ .

**Lemma 2.2.** *Given  $D \in E_n(t_0, \dots, t_{2n-1}; \sigma_0, \dots, \sigma_{2n-1})$ , the following assertions are equivalent.*

- (i)  $D \in \tilde{E}_n(t_0, \dots, t_{2n-1}; \sigma_0, \dots, \sigma_{2n-1})$ .
- (ii) For each  $i \in \{0, \dots, 2n - 1\}$ , if  $|\sigma_i| \geq 2$ , then for every  $a \neq b \in \sigma_i$  and for each  $c \in \sigma_{i+n}$ , either  $D[\{a, b, c\}]$  is a 3-cycle, or  $\{a, b\}$  is an interval of  $D[\{a, b, c\}]$ .
- (iii) For each  $i \in \{0, \dots, 2n - 1\}$  and for each  $x \in \{t_i, t_{i+1}, t_{i+n}, t_{i+n+1}\}$ ,  $D[\sigma_i \cup \sigma_{i+n} \cup \{x\}]$  is a diamond-free tournament.

From **Lemmas 2.1 and 2.2**, the morphology of non-tournament prechains is given by the following proposition.

**Proposition 2.3.** *The class of non-tournament prechains coincides with the union of the classes  $\tilde{E}(S_n)$ , where  $n \geq 1$ .*

The following lemma is easy to check.

**Lemma 2.4.** *Given a digraph  $D \in \tilde{E}_n(t_0, \dots, t_{2n-1}; \sigma_0, \dots, \sigma_{2n-1})$  on at least 3 vertices, where  $n \geq 1$ , if  $I$  is a maximal (under inclusion) strict interval of  $D$ , then there is  $i \in \{0, \dots, 2n - 1\}$  such that either  $I = \{t_i\}$  or  $I \subseteq \sigma_i$ .*

It follows that the maximal strict intervals of  $D$  that are not of the form  $\{t_i\}$  partition each chain  $D[\sigma_i]$  into intervals.

### 3. Proof of Theorem 1.4

For the proof of **Theorem 1.4**, we use **Lemma 1.2** and we consider the following steps. First, we prove the following lemma.

**Lemma 3.1.** *A weak wheel with at least 8 vertices is  $\{-1\}$ -self dual if and only if it is either a wheel or an alternating weak wheel.*

Second, we recall the following definition, which relies on **Lemma 2.4**.

**Definition 3.2.** (See [10].) Given a digraph  $D \in \tilde{E}_n(t_0, \dots, t_{2n-1}; \sigma_0, \dots, \sigma_{2n-1})$  on at least 3 vertices, where  $n \geq 1$ , for each  $i \in \{0, \dots, 2n - 1\}$  and for each nonempty sector  $\sigma_i$  of  $D$ , we denote  $I_0^i, \dots, I_{k_i}^i$  the maximal strict intervals of  $D$  contained in  $\sigma_i$  where  $I_0^i \rightarrow \dots \rightarrow I_{k_i}^i$ . A nonempty interval  $I$  of  $D$  is said *central* if there exists  $i \in \{0, \dots, 2n - 1\}$  such that the integer  $k_i$  is even and  $I = I_{\frac{k_i}{2}}^i$ . Given  $i \in \{0, \dots, 2n - 1\}$ , a nonempty sector  $\sigma_i$  of  $D$  and some positive integers  $\alpha_0, \dots, \alpha_\ell$ , we say that the sector  $\sigma_i$  is of type  $[\alpha_0, \dots, \alpha_\ell]$  if  $\ell = k_i$  and for each  $j \in \{0, \dots, k_i\}$ ,  $|I_j^i| = \alpha_j$ . An empty sector of  $D$  is said of type  $[0]$ . A bisector  $\sigma_i \cup \sigma_{i+n}$  of  $D$  is said of type  $\{[\alpha_0, \dots, \alpha_\ell], [\beta_0, \dots, \beta_{\ell'}]\}$  if one of the sectors  $\sigma_i$  and  $\sigma_{i+n}$  is of type  $[\alpha_0, \dots, \alpha_\ell]$  and the other is of type  $[\beta_0, \dots, \beta_{\ell'}]$  (where  $\alpha_0, \dots, \alpha_\ell, \beta_0, \dots, \beta_{\ell'}$  are non-negative integers).

Then, we consider a  $\{-1\}$ -self dual non tournament prechain  $D$ , with at least 7 vertices, admitting at least one nonempty sector. In addition, we assume that  $D$  is not a pot. We prove the following results.

**Proposition 3.3.** *The only possible type of a nonempty bisector of  $D$  is  $\{[1], [0]\}$ .*

**Lemma 3.4.** *The prechain  $D$  is an almost wheel.*

For the proof of **Proposition 3.3**, we establish, in particular, the following two lemmas.

**Lemma 3.5.** *Given a vertex  $x$  of  $D$  such that  $D - x$  is not a tournament, the following assertions hold.*

- (i) For each positive integer  $p$ , the number of noncentral intervals of  $D$  (resp.  $D - x$ ) with cardinality  $p$  is even.
- (ii) The number of noncentral intervals of  $D$  (resp.  $D - x$ ) is even.
- (iii) Each noncentral interval of  $D$  is a singleton.

**Lemma 3.6.** *The only possible types of bisector(s) of  $D$  are the following:  $\{[p], [0]\}$  (where  $p \geq 0$ ) or  $\{[1], [1]\}$  or  $\{[1], [1], [1]\}$ .*

## Acknowledgements

The second author would like to extend his sincere appreciation to the Deanship of Scientific Research at King Saud University for its funding of this research through the Research Group Project No. RGP-VPP-056.

## References

- [1] M. Basso-Gerbelli, P. Ille, La reconstruction des relations définies par interdits, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 316 (1993) 1229–1234.
- [2] J.-A. Bondy, A graph reconstructor's manual, in: A.D. Keendwell (Ed.), *Surveys Combinatorics*, in: London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 166, Cambridge University Press, 1991, pp. 221–252.
- [3] J.A. Bondy, R.L. Hemminger, Graph reconstruction, a survey, *J. Graph Theory* (1977) 227–268.
- [4] H. Bouchaala, Y. Boudabbous, La  $\{-k\}$ -autodualité des sommes lexicographiques finies de tournois suivant un 3-cycle ou un tournoi critique, *Ars Combin.* 81 (2006) 33–64.
- [5] Y. Boudabbous, Sur la détermination d'une relation binaire à partir d'informations locales, *Math. Logic Quart.* 44 (1998) 265–276.
- [6] Y. Boudabbous, C. Delhommé, Prechains and self duality, *Discrete Math.* 312 (2012) 1743–1765.
- [7] A. Boussaïri, Communication personnelle à Y. Boudabbous, 1995.
- [8] R. Fraïssé, L'intervalle en théorie des relations, ses généralisations, filtre intervallaire et clôture d'une relation, in: M. Pouzet, D. Richard (Eds.), *Orders, Description and Roles*, North-Holland, 1984, pp. 313–342.
- [9] G. Lopez, C. Rauzy, Reconstruction of binary relations from their restrictions of cardinality 2, 3, 4 and  $(n - 1)$ , I, *Z. Math. Logik Grundlag. Math.* 38 (1992) 27–37.
- [10] G. Lopez, C. Rauzy, Reconstruction of binary relations from their restrictions of cardinality 2, 3, 4 and  $(n - 1)$ , II, *Z. Math. Logik Grundlag. Math.* 38 (1992) 157–168.
- [11] M. Pouzet, Application d'une propriété combinatoire des parties d'un ensemble aux groupes et aux relations, *Math. Z.* 150 (1976) 117–134.
- [12] S.M. Ulam, *A Collection of Mathematical Problems*, Interscience Tracts in Pure and Appl. Math., Interscience Publishers, Groningen, New York, 1960, p. 29.