C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 352 (2014) 65–70

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Algebraic geometry

# Generators of the cohomology algebra of the complement to a rational algebraic curve in the weighted projective plane $\mathbb{P}^2_\omega$

## *Générateurs de l'algèbre de cohomologie du complémentaire d'une courbe algebrique rationnelle dans le plan projectif pondéré $\mathbb{P}^2_\omega$*

Jorge Ortigas-Galindo

*Centro Universitario de la Defensa-IUMA, Academia General Militar, Ctra. de Huesca s/n., 50090 Zaragoza, Spain*

ARTICLE INFO

*Article history:*
Received 14 August 2013
Accepted after revision 4 November 2013
Available online 21 November 2013

Presented by Claire Voisin

ABSTRACT

The main goal of this work is the study of the cohomology ring of $\mathbb{P}^2_\omega \setminus \mathcal{R}$, being $\mathcal{R}$ a reduced algebraic curve in the complex weighted projective plane $\mathbb{P}^2_\omega$ whose irreducible components are all rational (possibly singular) curves. In particular, holomorphic (rational) representatives are found for the cohomology classes.



RÉSUMÉ

Le but principal de ce travail est l'étude de l'anneau de cohomologie de $\mathbb{P}^2_\omega \setminus \mathcal{R}$, $\mathcal{R}$ étant une courbe algébrique réduite dans le plan projectif pondéré complexe $\mathbb{P}^2_\omega$, dont les composantes irréductibles sont des courbes rationnelles (avec ou sans points singuliers). En particulier, des représentants holomorphes (rationnels) sont obtenus pour les classes de cohomologie.



### Version française abrégée

Dans leur travail [4], J.I. Cogolludo-Agustín et D. Matei obtiennent une présentation explicite par générateurs et relations de l'algèbre de cohomologie $H^\bullet(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{C}, \mathbb{C})$ du complémentaire d'une courbe algébrique $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{P}^2$. S'il y a des composantes de genre positif, les classes holomorphes ne suffissent pas pour engendrer l'anneau de cohomologie et, dans ce cas, des formes anti-holomorphes sont nécessaires. Le résultat principal de ce travail est présenté pour le cas des courbes rationnelles $\mathcal{C}$ ($g(\mathcal{C}) = 0$) dans le plan projectif pondéré $\mathbb{P}^2_\omega$, généralisant le résultat obtenu dans [2]. Notre intention est d'obtenir dans le futur un analogue de [4] pour les courbes algébriques $\mathcal{C}$ (pas nécessairement rationnelles) dans $\mathbb{P}^2_\omega$.

Dès maintenant, on note $X_\mathcal{C}$ le complémentaire de $\mathcal{C}$ dans le plan projectif pondéré $\mathbb{P}^2_\omega$. On va calculer l'un des invariants les plus importants de la paire $(\mathbb{P}^2_\omega, \mathcal{R})$, l'anneau de cohomologie $X_\mathcal{R}$, où $\mathcal{R}$ est une courbe algébrique plane réduite (avec ou sans point singulier) dans le plan projectif pondéré $\mathbb{P}^2_\omega$, dont les composantes irréductibles $\mathcal{R}_i$ sont toutes rationnelles ($g(\mathcal{R}_i) = 0$). Ces courbes sont appelées des *arrangements rationnels*. Le but de ce travail est de trouver une présentation de l'anneau de cohomologie de $X_\mathcal{R}$.

Soit $\mathcal{D}$ un $\mathbb{Q}$-diviseur réduit dans $\mathbb{P}^2_\omega$. Dans le §2, on fournit une base pour $H^1(\mathbb{P}^2_\omega \setminus \mathcal{D}; \mathbb{C})$ et, dans le §3, on donne une présentation *holomorphe* de $H^2(\mathbb{P}^2_\omega \setminus \mathcal{R}; \mathbb{C})$.

*E-mail address:* jortigas@unizar.es.

1631-073X/$ – see front matter 
http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2013.11.006

On prend un système de coordonnées $[X:Y:Z]$ en $\mathbb{P}^2_\omega$. Si l'on écrit $\mathcal{D} := \{D = 0\}$, la fonction $D$ peut s'exprimer comme le produit de $C_0 \cdot C_1 \cdot \ldots \cdot C_n$, avec $\mathcal{C}_i := \{C_i = 0\}$, où les valeurs $\mathcal{C}_i$ sont les composantes irréductibles de $\mathcal{D}$.

On considère les formes différentielles suivantes :

$$\sigma_{ij} := \mathrm{d}\left(\log \frac{C_i^{d_j}}{C_j^{d_i}}\right) = d_j\,\mathrm{d}(\log C_i) - d_i\,\mathrm{d}(\log C_j), \tag{1}$$

avec $i, j = 0, \ldots, n$, $d_i := \deg_\omega(\mathcal{C}_i)$.

Si $\pi$ est une $\mathbf{Q}$-résolution de $\mathcal{D}$, alors le *pull-back* $\pi^*\sigma_{ij}$ définit une 1-forme logarithmique dans $\bar{X}_{\mathcal{D}}$. On a le résultat suivant.

**Théorème 0.1.** *Les classes de cohomologie de :*

$$\mathcal{B}_1(\mathcal{D}) := \{\sigma_{ik}\}_{i=0}^n, \quad i \neq k,$$

*fournissent une base pour $H^1(X_{\mathcal{D}}; \mathbb{C})$.*

Il est facile de voir qu'on ne peut pas, en général, espérer retrouver le théorème de Brieskorn, c'est-à-dire que $\wedge^2 H^1(X_{\mathcal{R}}; \mathbb{C})$ n'engendre pas $H^2(X_{\mathcal{R}}; \mathbb{C})$.

Finalement, dans le §3, on donne une présentation *holomorphe* de $H^2(X_{\mathcal{R}}; \mathbb{C})$, où $\mathcal{R}$ est un arrangement rationnel. Voyons en détail ce dernier résultat.

Soient $\mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j, \mathcal{C}_k$ trois courbes dans $\mathbb{P}^2_\omega$ (pas nécessairement différentes), avec $\omega = (w_0, w_1, w_2)$. On note $|\omega| = w_0 + w_1 + w_2$, $\mathcal{C}_{ijk}$ l'union $\mathcal{C}_i \cup \mathcal{C}_j \cup \mathcal{C}_k$ et on considère $C_{ijk}$ comme une équation réduite pour $\mathcal{C}_{ijk}$. On utilise également $d_{ijk} := \deg_\omega \mathcal{C}_{ijk}$. Par exemple, dans le cas $i = j = k$, on a $\mathcal{C}_{ijk} = \mathcal{C}_i$, $C_{ijk} = C_i$ et $d_{ijk} = \deg_\omega(\mathcal{C}_i)$.

En utilisant les modules logarithmiques décrits dans la Définition 1.2, on peut construire le faisceau $\mathcal{M}^\Delta_{\mathcal{R}_{ijk},\pi}$.

**Définition 0.2.** Soit $\mathcal{R} = \bigcup_i \mathcal{R}_i$ un arrangement rationnel et $\pi$ une $\mathbf{Q}$-résolution des singularités pour $\mathcal{R}$. Pour chaque triplet $(\mathcal{R}_i, \mathcal{R}_j, \mathcal{R}_k)$ (les indices ne sont pas nécessairement distincts), on prend trois points $P_1 \in (\mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}_j)$, $P_2 \in (\mathcal{R}_j \cap \mathcal{R}_k)$ et $P_3 \in (\mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}_k)$. Pour chaque $P_l$, on choisit deux branches, $\delta_l^{i_l}$ de $\mathcal{R}_i$ et $\delta_l^{j_l}$ de $\mathcal{R}_j$. On considère :

$$\Delta := \left[\left(P_1, \delta_1^{i_1}, \delta_1^{j_1}\right), \left(P_2, \delta_2^{j_2}, \delta_2^{k_2}\right), \left(P_3, \delta_3^{k_3}, \delta_3^{i_3}\right)\right]$$

(voir Remarque 2). On va construire un faisceau $\mathcal{M}^\Delta_{\mathcal{R}_{ijk},\pi}$ associé à $\Delta$. Soit $Q \in \mathbb{P}^2_\omega$ ; on considère le module (2) (voir Définition 3.1). Ce module conduit à la définition du faisceau $\mathcal{M}^\Delta_{\mathcal{R}_{ijk},\pi}$ qu'on appelle le *faisceau des formes $\Delta$-logarithmiques sur $\mathcal{R}_{ijk}$ par rapport à $\pi$.*

Avec la définition précédente, en utilisant la formule de type adjonction dans [7, Chapter 4], on a la Proposition 3.2 et le résultat suivant.

**Théorème 0.3.** *Soit $\mathcal{R} = \bigcup_i \mathcal{R}_i$ un arrangement rationnel dans $\mathbb{P}^2_\omega$ et $\pi$ une $\mathbf{Q}$-résolution des singularités pour $\mathcal{R}$. Soit $H$ un polynôme de degré quasi-homogène $d_{ijk} - |\omega|$, tel que :*

$$0 \neq H \in H^0\left(\mathbb{P}^2_\omega, \mathcal{M}^\Delta_{\mathcal{R}_{ijk}}\left(d_{ijk} - |\omega|\right)\right).$$

*Les 2-formes $\varphi_\Delta = H \frac{\Omega^2}{R_{ijk}}$, avec $\Omega^2 = w_2\, z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + w_0\, x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + w_1\, y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$, forment une présentation* holomorphe *pour l'espace $H^2(\mathbb{P}^2_\omega \setminus \mathcal{R}, \mathbb{C})$.*

La démonstration du Théorème 0.3 (voir Théorème 3.3) fournit une méthode pour trouver le lien entre les générateurs $H^2(\mathbb{P}^2_\omega \setminus \mathcal{R}; \mathbb{C})$ grâce aux relations dans $\mathrm{Im}(^2R^{[1]}) \subset H^1(\bar{\mathcal{R}}^{[1]}; \mathbb{C})$ et à l'injectivité de l'opérateur résidu ([8] et [2, §1.3]).

Ces présentations de l'anneau de cohomologie peuvent être utilisées pour calculer les variétés de résonance (voir, par exemple, [2]). Ce travail peut également être utilisé pour étudier la formalité des complémentaires de courbes dans les plans projectifs pondérés suivant l'esprit des travaux [1,6] et [4], dans lesquels les auteurs montrent que les complémentaires des configurations d'hyperplans et des courbes dans $\mathbb{P}^2$ sont des espaces formels.

## 1. Introduction and preliminaries

In [4], J.I. Cogolludo-Agustín and D. Matei determine an explicit presentation by generators and relations of the cohomology algebra $H^\bullet(\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{C}, \mathbb{C})$ of the complement of an algebraic curve $\mathcal{C}$ in the complex projective plane $\mathbb{P}^2$, via the study of log-resolution logarithmic forms on $\mathbb{P}^2$. The existence of genus makes the holomorphic classes not to be enough to generate the cohomology ring, and so, anti-holomorphic forms are required. Our aim in this work is to extend this result to rational arrangements in $\mathbb{P}^2_\omega$. We present a basis for $H^1(\mathbb{P}^2_\omega \setminus \mathcal{C}; \mathbb{C})$ and a holomorphic presentation for $H^2(\mathbb{P}^2_\omega \setminus \mathcal{R}; \mathbb{C})$ for a given rational arrangement $\mathcal{R}$. Our intention in future works will be to get an analogous result to [4] for algebraic curves $\mathcal{C}$ (not necessarily rational) in $\mathbb{P}^2_\omega$. In this paper, we present part of the main results obtained in the PhD thesis (*Université de Pau et des Pays de l'Adour–Universidad de Zaragoza*) of the author; for the detailed proofs we remit the reader to [7, Chapter 5]. All the necessary preliminaries about $V$-manifolds, spaces with quotient singularities of type $X(d; a, b)$, embedded **Q**-resolutions, $\mathbb{Q}$-divisors and the genus formula in $\mathbb{P}^2_\omega$ can be found in [3] and [5, Chapters 1–2].

Let $\mathcal{D}$ be a $\mathbb{Q}$-divisor in $\mathbb{P}^2_\omega$. The complement of $\mathcal{D}$ will be denoted by $X_{\mathcal{D}}$. Let us fix $\pi : \overline{X}_{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathbb{P}^2_\omega$ a **Q**-resolution of the singularities of $\mathcal{D}$ so that the reduced $\mathbb{Q}$-divisor $\overline{\mathcal{D}} = (\pi^*(\mathcal{D}))_{red}$ is a union of smooth $\mathbb{Q}$-divisors on $\overline{X}_{\mathcal{D}}$ with **Q**-normal crossings.

**Definition 1.1.** A $C^\infty$ form $\varphi$ on $X_{\mathcal{D}}$ shall be called *logarithmic* (*with respect to a divisor $\mathcal{D}$ and a* **Q**-*resolution* $\pi$) if $\pi^*\varphi$ is logarithmic on $\overline{X}_{\mathcal{D}}$ with respect to the **Q**-normal crossing divisor $\overline{\mathcal{D}}$ (see [8, §1]). Therefore, one has the corresponding sheaf:

$$\pi_* \Omega_{\overline{X}_{\mathcal{D}}}\big(\log\langle\overline{\mathcal{D}}\rangle\big).$$

Once $\mathcal{D}$ and $\pi$ are fixed one can define the *residue map* $\mathrm{Res}^{[*]}_\pi(\varphi)$ *of a logarithmic form* $\varphi$ as follows:

$$\pi_* \Omega^k_{\overline{X}_{\mathcal{D}}}\big(\log\langle\overline{\mathcal{D}}\rangle\big) \xrightarrow{\mathrm{Res}^{[k]}_\pi} H^0\big(\overline{\mathcal{D}}^{[k]}; \mathbb{C}\big)$$
$$\varphi \mapsto \mathrm{Res}^{[k]}\big(\pi^*\varphi\big).$$

In the particular case of $X(d; a, b)$ and the $\mathrm{Res}^{[2]}$ one has the following.

**Example 1.** Let $h$ be an analytic germ on $X(d; a, b)$ written in normalized form (see [5, Definition I.1.10]). Let $\varphi = h\frac{\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{xy}$ be a logarithmic 2-form with poles at the origin. Then:

$$\mathrm{Res}^{[2]}(\varphi) := \frac{1}{d} h(0, 0).$$

Let $\mathcal{D} = \{f = 0\}$ be a germ in $P \in X(d; a, b)$. For a given $k \geqslant 0$, one has the module $\mathcal{O}_P(k)$,

$$\mathcal{O}_P(k) := \big\{h \in \mathbb{C}\{x, y\} \;\big|\; h\big(\xi^a_d x, \xi^b_d y\big) = \xi^k_d h(x, y)\big\}.$$

Notice that if $P$ is a singular point of $\mathbb{P}^2_\omega$, then $\mathcal{O}_P$ is isomorphic to the ring of $\boldsymbol{G}_d$ invariant convergent power series $\mathbb{C}\{x, y\}^{\boldsymbol{G}_d}$ (for further details, see [7, Chapter 1]).

**Definition 1.2.** Let $\mathcal{D} = \{f = 0\}$ be a germ in $P \in X(d; a, b)$ where $f \in \mathcal{O}_P(k)$. Consider $\pi$ a **Q**-resolution of $(\mathcal{D}, P)$ and $\delta_1$, $\delta_2$ two local branches of $f$ at $P$.

(i) Let $\mathcal{M}^{log}_{\mathcal{D},\pi}$ denote the submodule of $\mathcal{O}_P$ consisting of all $h \in \mathcal{O}_P$ such that the 2-form:

$$\varphi = h\frac{\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y}{f} \in \Omega^2_P(a + b - k)$$

is logarithmic at $P$, with respect to $\mathcal{D}$ and the embedded **Q**-resolution $\pi$ (recall Definition 1.1).

(ii) Let $\mathcal{M}^{nul}_{\mathcal{D},\pi}$ denote the submodule of $\mathcal{M}^{log}_{\mathcal{D},\pi}$ consisting of all $h \in \mathcal{M}^{log}_{\mathcal{D},\pi}$ such that the 2-form:

$$\varphi = h\frac{\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y}{f}$$

admits a holomorphic extension outside the strict transform $\widehat{f}$.

(iii) Let $\mathcal{M}^{\delta_i\delta_j}_{\mathcal{D},\pi}$ denote the submodule of $\mathcal{M}^{log}_{\mathcal{D},\pi}$ consisting of all $h \in \mathcal{M}^{log}_{\mathcal{D},\pi}$ such that the 2-form:

$$\varphi = h\frac{\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y}{f}$$

has zero residues outside the edges of the unique path in the **Q**-resolution tree joining $\delta_1$ with $\delta_2$.

## 2. Logarithmic 1-forms: a basis for $H^1(\mathbb{P}^2_\omega \setminus \mathcal{D}; \mathbb{C})$

The aim of this section is to compute a basis for $H^1(\mathbb{P}^2_\omega \setminus \mathcal{D}; \mathbb{C})$ generalizing [2, Theorem 2.11].

**Definition 2.1.** A reduced $\mathbb{Q}$-divisor in $\mathbb{P}^2_\omega$ will be called an *arrangement*. If all irreducible components $\mathcal{C}_0, \dots, \mathcal{C}_n$ in an arrangement $\mathcal{D}$ are rational curves ($g(\mathcal{C}_i) = 0$), we shall say $\mathcal{D}$ is a *rational arrangement* and will be denoted by $\mathcal{R}$.

If one writes $\mathcal{D} := \{D = 0\}$, $D$ can be expressed as a product $C_0 \cdot C_1 \cdot \dots \cdot C_n$, where $\mathcal{C}_i := \{C_i = 0\}$, $C_i$ are irreducible components of $D$. Denote also $\mathcal{C}_{ij} := \{C_i C_j = 0\}$.

**Definition 2.2.** Let us consider the differential forms $\sigma_{ij}$ in (1), where $i, j = 0, \dots, n$, $d_i := \deg_\omega(\mathcal{C}_i)$.

Note that, since any two determinations of $\log \frac{C_i^{d_j}}{C_j^{d_i}}$ differ by a constant, their differential is well defined.

**Lemma 2.3.** *The holomorphic* 1*-forms $\sigma_{ij}$ are well defined on $\mathbb{P}^2_\omega \setminus \mathcal{C}_{ij}$ and define global differential* 1*-forms on $X_\mathcal{D}$ for any $i, j = 0, \dots, n$.*

Finally, the injectivity of the residue map $\mathrm{Res}^{[1]}$ proves the following theorem.

**Theorem 2.4.** *The cohomology classes of*

$$\mathcal{B}_1(\mathcal{D}) := \{\sigma_{ik}\}_{i \neq k}$$

*for a fixed k, constitute a basis for $H^1(X_\mathcal{D}; \mathbb{C})$.*

It is easy to check that, in general, Brieskorn's Theorem does not hold, that is, $\wedge^2 H^1(X_\mathcal{R}; \mathbb{C})$ does not generate $H^2(X_\mathcal{R}; \mathbb{C})$.

## 3. A holomorphic presentation for $H^2(\mathbb{P}^2_\omega \setminus \mathcal{R}; \mathbb{C})$

Let $\mathcal{R}$ be a rational arrangement. Let us fix a **Q**-resolution $\pi : \overline{X}_\mathcal{R} \to \mathbb{P}^2_\omega$. The purpose of this section is to give a presentation of the space

$$H^2(W_2, d) \cong H^2(X_\mathcal{R}; \mathbb{C})$$

of global $C^\infty$ 2-forms of weight 2, modulo closed forms, on $\overline{X}_\mathcal{R}$, using only holomorphic forms as representatives.

For the sake of simplicity, we will introduce the following notation, which will be used in the future.

Let $\mathcal{C}_i$, $\mathcal{C}_j$, $\mathcal{C}_k$ be three curves in $\mathbb{P}^2_\omega$ (not necessarily different), with $\omega = (w_0, w_1, w_2)$. We will denote by $|\omega| = w_0 + w_1 + w_2$, $\mathcal{C}_{ijk}$ the union $\mathcal{C}_i \cup \mathcal{C}_j \cup \mathcal{C}_k$ and consider $C_{ijk}$ a reduced equation for $\mathcal{C}_{ijk}$. We also use $d_{ijk} := \deg_\omega \mathcal{C}_{ijk}$. For instance, if $i = j = k$, $\mathcal{C}_{ijk} = \mathcal{C}_i$, $C_{ijk} = C_i$ and $d_{ijk} = \deg_\omega(\mathcal{C}_i)$.

**Definition 3.1.** Let $\mathcal{R} = \bigcup_i \mathcal{R}_i$ be a rational arrangement and $\pi$ a **Q**-resolution of singularities for $\mathcal{R}$. For every triple $(\mathcal{R}_i, \mathcal{R}_j, \mathcal{R}_k)$, not necessarily $i \neq j \neq k$, let us take three points $P_1 \in (\mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}_j)$, $P_2 \in (\mathcal{R}_j \cap \mathcal{R}_k)$ and $P_3 \in (\mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}_k)$. For every $P_l$, choose two local branches, $\delta_l^{i_l}$ of $\mathcal{R}_i$ and $\delta_l^{j_l}$ of $\mathcal{R}_j$. Consider:

$$\Delta := \left[\left(P_1, \delta_1^{i_1}, \delta_1^{j_1}\right), \left(P_2, \delta_2^{j_2}, \delta_2^{k_2}\right), \left(P_3, \delta_3^{k_3}, \delta_3^{i_3}\right)\right].$$

Let us construct a sheaf $\mathcal{M}^\Delta_{\mathcal{R}_{ijk},\pi}$ associated with $\Delta$. Let $Q \in \mathbb{P}^2_\omega$, one has the following module:

$$\left(\mathcal{M}^\Delta_{\mathcal{R}_{ijk},\pi}\right)_Q := \begin{cases} \mathcal{O}_Q & \text{if } Q \notin \mathrm{Sing}(\mathcal{R}_{ijk}) \\ \left(\mathcal{M}^{nul}_{\mathcal{R}_{ijk},\pi}\right)_Q & \text{if } P_l \neq Q \in \mathrm{Sing}(\mathcal{R}_{ijk}) \\ \left(\mathcal{M}^{\delta_l^{m_l},\delta_l^{n_l}}_{\mathcal{R}_{ijk},\pi}\right)_Q & \text{if } Q = P_l \text{ with } \delta_l^{m_l} \neq \delta_l^{n_l} \\ \left(\mathcal{M}^{nul}_{\mathcal{R}_{ijk},\pi}\right)_Q & \text{if } Q = P_l \text{ with } \delta_l^{m_l} = \delta_l^{n_l}. \end{cases} \tag{2}$$

This module leads us to the corresponding sheaf $\mathcal{M}^\Delta_{\mathcal{R}_{ijk},\pi}$, which will be called *sheaf of $\Delta$-logarithmic forms along $\mathcal{R}_{ijk}$ w.r.t. $\pi$*.

**Remark 1.** The previous sheaf $\mathcal{M}^\Delta_{\mathcal{R}_{ijk},\pi}$ does not depend on the choice of the resolution $\pi$. For a given $\mathcal{R}$, we will simply write $\mathcal{M}^\Delta_{\mathcal{R}_{ijk}}$ if no ambiguity seems likely to arise.

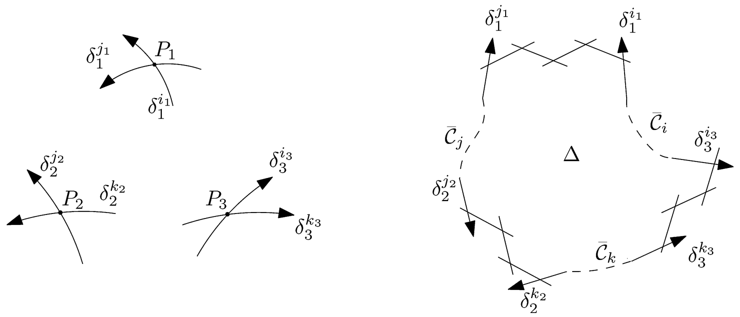


**Fig. 1.** $\Delta$ in $H_1(\bar{\mathcal{R}};\mathbb{C})$.

**Remark 2.** Notice that $\Delta$, in Definition 3.1, can be identified with a 1-cycle supported on the divisor $\bar{\mathcal{R}}$ via the resolution graph of $\mathcal{R}$. There is only one 1-cycle in the resolution graph containing the support of $\Delta$ (i.e. $\delta_l^{m_l}$, $\delta_l^{n_l}$ for $l = 1, 2, 3$). Notice that, in the case of rational arrangements, the resolution graph of $\mathcal{R}$ and $\bar{\mathcal{R}}$ have isomorphic $H_1$. In fact, these 1-cycles generate $H_1(\bar{\mathcal{R}};\mathbb{C})$. (See Fig. 1.)

Using the adjunction-like formula established in [7, Chapter 4], one can prove the following remarkable result.

**Proposition 3.2.** *Let $\mathcal{R}$ be a rational arrangement in $\mathbb{P}^2_\omega$ as in Definition 3.1, then*

$$\dim H^0\big(\mathbb{P}^2_\omega, \mathcal{M}^{\Delta}_{\mathcal{R}_{ijk}}\big(d_{ijk} - |\omega|\big)\big) > 0.$$

Therefore, it can be concluded that the logarithmic sheaf $\mathcal{M}^{\Delta}_{\mathcal{R}_{ijk}}(d_{ijk} - |\omega|)$ has non-trivial global sections. After this result, we are in conditions to prove the following theorem.

**Theorem 3.3.** *Let $\mathcal{R} = \bigcup_i \mathcal{R}_i$ be a rational arrangement in $\mathbb{P}^2_\omega$ and $\pi$ a $\mathbf{Q}$-resolution of singularities for $\mathcal{R}$. Let $H$ be a polynomial of quasi-homogeneous degree $d_{ijk} - |\omega|$, such that:*

$$0 \neq H \in H^0\big(\mathbb{P}^2_\omega, \mathcal{M}^{\Delta}_{\mathcal{R}_{ijk}}\big(d_{ijk} - |\omega|\big)\big).$$

*The well-defined global 2-forms with $\varphi_\Delta = H\frac{\Omega^2}{R_{ijk}}$, with $\Omega^2 = w_2 z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + w_0 x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + w_1 y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$, form a holomorphic presentation of $H^2(\mathbb{P}^2_\omega \setminus \mathcal{R}, \mathbb{C})$.*

**Proof.** For every $\Delta$ (recall Definition 3.1), Proposition 3.2 assures the existence of non-zero 2-forms $\varphi_\Delta = H\frac{\Omega^2}{R_{ijk}}$, with $H \in H^0(\mathbb{P}^2_\omega, \mathcal{M}^{\Delta}_{\mathcal{R}_{ijk}}(d_{ijk} - |\omega|))$ satisfying $\mathrm{Res}^{[2]}(\pi^*\varphi_\Delta) = \pm 1$. Consider the residue map ${}^2R^{[1]}$, the generalization of the Poincaré Residue Operator, which is injective (see [8] and [2, §1.3]). One has the following commutative diagram:

$$\begin{tikzcd}
 & H_1(\bar{\mathcal{R}};\mathbb{C}) \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "f"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
H^2(X_{\mathcal{R}};\mathbb{C}) \arrow[rr, "{}^2R^{[1]}"] & & \mathrm{Im}({}^2R^{[1]}) \subset H^1(\bar{\mathcal{R}}^{[1]};\mathbb{C})
\end{tikzcd} \tag{3}$$

where $g$ is a well-defined map such that $g(\Delta) = \varphi_\Delta$ and $f$ is the map induced by the linking numbers of the 1-cycle associated with $\Delta$ with each meridian of $\bar{\mathcal{R}}^{[1]}$. Therefore, one concludes that the forms $\varphi_\Delta$ constitute a set of generators for $H^2(X_{\mathcal{R}};\mathbb{C})$. $\square$

**Corollary 1.** *Following the proof in Theorem 3.3, because of the injectivity of ${}^2R^{[1]}$, one has a method to find the relations among the generators in $H^2(X_{\mathcal{R}};\mathbb{C})$ by means of the relations in $\mathrm{Im}({}^2R^{[1]}) \subset H^1(\bar{\mathcal{R}}^{[1]};\mathbb{C})$.*

These presentations of the cohomology ring may be used to compute the resonance varieties (see, for instance, [2]). This present work can be also used to study the formality of the complement of curves in weighted projective planes following a similar philosophy as in the works of [1,6] and [4], where the authors prove that the complements of hyperplane arrangements and curves in $\mathbb{P}^2$ are formal spaces.

## Acknowledgements

I would like to thank J.I. Cogolludo-Agustín for many valuable comments and corrections. The author is partially supported by the Spanish Ministry of Education MTM2010-21740-C02-02 and the *E15 Grupo Consolidado Geometría* from the Gobierno de Aragón.

## References

[1] E. Brieskorn, Sur les groupes de tresses [d'après V.I. Arnol'd], in: Séminaire Bourbaki, 24$^{e}$ année (1971/1972), in: Lect. Notes Math., vol. 317, Springer, Berlin, 1973, Exp. No. 401, pp. 21–44.

[2] J.I. Cogolludo-Agustín, Topological Invariants of the Complement to Arrangements of Rational Plane Curves, Mem. Amer. Math. Soc., vol. 159 (756), American Mathematical Society, 2002, xiv+75 p.

[3] J.I. Cogolludo-Agustín, J. Martín-Morales, J. Ortigas-Galindo, Local invariants on quotient singularities and a genus formula for weighted plane curves, Int. Math. Res. Not. IMRN (2013), http://dx.doi.org/10.1093/imrn/rnt052, in press.

[4] J.I. Cogolludo Agustín, D. Matei, Cohomology algebra of plane curves, weak combinatorial type, and formality, Trans. Amer. Math. Soc. 364 (11) (2012) 5765–5790.

[5] J. Martín-Morales, Embedded **Q**-resolutions and Yomdin–Lê surface singularities, PhD thesis, 2011, http://zaguan.unizar.es/record/6870.

[6] P. Orlik, L. Solomon, Combinatorics and topology of complements of hyperplanes, Invent. Math. 56 (2) (1980) 167–189.

[7] J. Ortigas-Galindo, Algebraic and topological invariants of curves and surfaces with quotient singularities, PhD thesis, 2013, http://www.theses.fr/2013PAUU3011.

[8] J.H.M. Steenbrink, Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology, in: Real and Complex Singularities (Proc. Ninth Nordic Summer School/NAVF Sympos. Math., Oslo, 1976), Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1977, pp. 525–563.