C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 352 (2014) 383–385

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Analyse mathématique

Sur la répartition des puissances modulo 1

On the repartition of powers modulo 1

Jean-Pierre Kahane

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 15 décembre 2013
Accepté le 19 décembre 2013
Disponible sur Internet le 21 mars 2014

Présenté par Jean-Pierre Kahane

RÉSUMÉ

L'ensemble des $x > 1$ tels que (x^n) $(n = 1, 2, \ldots)$ n'est pas équidistribué modulo 1, qui est de mesure nulle, est de dimension 1. Cela découle du fait suivant : quelle que soit la suite (b_n) dans $[0, 1[$, et $\varepsilon > 0$, l'ensemble des x tels que x^n est ε-proche de b_n modulo 1 à partir d'un certain rang a pour dimension 1. Mais cet ensemble, limité à un intervalle $[1, X]$, a une dimension qui dépend de ε et de X. C'est l'objet de quelques propositions et d'une question ouverte.

© 2013 Publié par Elsevier Masson SAS pour l'Académie des sciences.

ABSTRACT

For almost all $x > 1$, (x^n) $(n = 1, 2, \ldots)$ is equidistributed modulo 1, a classical result. What can be said on the exceptional set? It has Hausdorff dimension one. Much more: given an (b_n) in $[0, 1[$ and $\varepsilon > 0$, the x-set such that $|x^n - b_n| < \varepsilon$ modulo 1 for n large enough has dimension 1. However, its intersection with an interval $[1, X]$ has a dimension < 1, depending on ε and X. Some results are given and a question is proposed.

© 2013 Publié par Elsevier Masson SAS pour l'Académie des sciences.

Soit $x > 1$. On sait depuis un siècle que les puissances de x sont équidistribuées modulo 1 pour presque tout x [2,6]. L'équidistribution des x^n sur $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ signifie que :

$$\forall f \in C(\mathbb{T}) \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f\left(x^n\right) = \int f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

L'ensemble des x pour lesquels (1) est en défaut est donc de mesure de Lebesgue nulle. Peut-on en dire plus ?

Pour certains x, on sait que les x^n sont distribués selon une mesure de probabilité μ, ce qui signifie :

$$\forall f \in C(\mathbb{T}) \quad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f\left(x^n\right) = \int f\,\mathrm{d}\mu. \tag{2}$$

Il en est ainsi si x est un nombre de Pisot (μ est la mesure de Dirac en 0) ou un nombre de Salem (μ est la distribution d'une somme de cosinus de variables indépendantes) [3,5,1,4].

Voici une réponse à la question posée.

P1. *L'ensemble des x pour lesquels la suite x^n n'est pas uniformément distribuée modulo* 1 *a pour dimension* 1 (*dimension* = *dimension de Hausdorff*).

1631-073X/$ – see front matter © 2013 Publié par Elsevier Masson SAS pour l'Académie des sciences.
http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2013.12.014

Plus généralement :

P2. *L'ensemble des x pour lesquels la suite x^n n'admet aucun distribution modulo 1, c'est-à-dire pour lesquels (2) est en défaut pour toute mesure μ, a pour dimension 1.*

Notons $\|x-y\|$ la distance de x à y sur $\mathbb{T}$. P2 résulte d'une proposition bien plus précise sur la répartition des x^n, à savoir :

P3. *Soit (b_n) $(n=1,2,\dots)$ une suite arbitraire dans $[0,1[$, et $\varepsilon>0$. L'ensemble des x tels que $\|x^n-b_n\|<\varepsilon$ à partir d'un certain rang a pour dimension 1.*

Il ne faudrait pas en déduire que l'ensemble des x tels que $\|x^n-b_n\|$ tend vers 0 quand $n\to\infty$ est de dimension 1. Au contraire, une extension d'un théorème de Pisot, relatif au cas $b_n=0$, dit ceci :

P4. *Soit (b_n) une suite dans $[0,1[$. L'ensemble des x tels que $\lim_{n\to\infty}\|x^n-b_n\|=0$ est au plus dénombrable.*

J'énoncerai comme P5 la démonstration de P4, copiée sur celle de Pisot. C'est une contrepartie de P3. En effet, P3 établit l'existence de nombres x tels que $\|x^n-b_n\|<\varepsilon$ à partir d'un certain rang, et P5 va montrer que, lorsque ce rang est fixé, l'ensemble des x en question qui appartiennent à un certain intervalle est fini ; cet intervalle est aussi grand qu'on veut, mais dépend de ε.

P5. *Soit (b_n) une suite dans $[0,1[$, et $\varepsilon>0$. On suppose $\|x^n-b_n|<\varepsilon$ pour $n\geqslant\nu$, et $x<A$ avec $2\varepsilon(A+1)^2\leqslant 1$. Alors, la donnée de $[x^n]$ (partie entière de x^n) pour $n=\nu$ et $n=\nu+1$ détermine la suite $[x^n]$ $(n\geqslant\nu)$ et le nombre x.*

Comme P3 → P2 → P1 et P5 → P4, il suffira de démontrer P3 et P5.

Preuve de P3. Posons $E_0=[1,\infty[$ et

$$E_n=\left\{x\colon\ x\in E_{n-1}\ \text{et}\ \left\|x^n-b_n\right\|\leqslant\varepsilon\right\}\quad(n=1,2,\dots).$$

Les E_n sont des fermés décroissant et convergeant vers un fermé E :

$$E_n\searrow E.$$

Il s'agit de montrer que la dimension de E est 1. Pour cela, on va montrer que E porte des mesures de probabilité höldériennes d'ordre α, avec α aussi proche de 1 que l'on veut.

Soit $X\gg\frac{1}{\varepsilon}$. Soit I_1 la composante connexe de E_1 contenue dans $[1,X]$ et la plus proche de X. Posons $E'_n=E_n\cap I_1$ $(x=X,1,2,\dots)$ et $E'=E\cap I_1$. Chaque E'_n est une réunion d'intervalles qu'on désignera génériquement par I_n, chaque I_{n-1} contient des I_n qu'on appellera sa descendance, et E' s'obtient par dissections successives comme l'ensemble triadique de Cantor. On va définir une mesure μ sur E' comme limite de mesures μ_n portées par les E'_n.

A l'étape n, chaque intervalle I_{n-1} engendre autant d'intervalles I_n qu'il y a de solutions à $\|x^n-b_n\|=0$ dans cet I_{n-1}, c'est-à-dire $[\beta^n-\alpha^n]$ à une unité près si $I_{n-1}=[\alpha,\beta]$. On supprime les I_n les plus proches de α et de β et on associe à chacun des I_n restants le x solution de $\|x^n-b_n\|=0$ qu'il contient et que j'appellerai son « centre ». La distance entre deux « centres » voisins, x et $x'>x$, vérifie $(x'-x)n\xi^{n-1}=1$ pour un ξ compris entre x et x', et la longueur de I_n vérifie $|I_n|n\zeta^{n-1}=2\varepsilon$ avec un $\zeta\in I_n$. Quand n est assez grand,

$$\frac{|I_n|}{|I_{n-1}|}\simeq\frac{n-1}{n}\frac{1}{x}\quad\text{et}\quad\frac{x'-x}{|I_{n-1}|}\simeq\frac{n-1}{n}\frac{1}{2\varepsilon x}$$

donc le nombre de descendants de I_{n-1} est voisin de $2\varepsilon x$, et leurs longueurs sont voisines de $\frac{1}{x}|I_{n-1}|$. Prenons pour μ_1 la mesure de densité $1/2\varepsilon$ sur I_1 et à l'étape n, répartissons également la masse $\mu_{n-1}(I_{n-1})$ sur les descendants de I_{n-1} ; on obtient ainsi μ_n, et la limite μ vérifie $\mu(I_n)=\mu_n(I_n)$.

Supposons $\mu(I_{n-1})\leqslant c|I_{n-1}|^\alpha$ pour tous les I_{n-1} (c'est vrai pour $n=1$ avec $c=\frac{1}{2\varepsilon}$). Soit I_n un des descendants d'un I_{n-1} donné. Alors,

$$\mu(I_n)\simeq\frac{1}{2\varepsilon x}\mu(I_{n-1})\leqslant\frac{c}{2\varepsilon x}|I_{n-1}|^\alpha\simeq\frac{c}{2\varepsilon x}\big(x|I_n|\big)^\alpha.$$

Sous la condition

$$\alpha<\frac{\log 2\varepsilon(X-2)}{\log X}$$

on a donc $\mu(I_n) \leqslant c|I_n|^\alpha$ pour tous les I_n. La mesure de probabilité μ, portée par E', est donc hölderienne d'ordre α. Il en résulte :

$$\dim E' \geqslant \frac{\log 2\varepsilon(X-2)}{\log X} \tag{3}$$

d'où, comme annoncé, $\dim E = 1$. $\square$

Preuve de P5. Il s'agit de montrer que la donnée de $[x^\nu]$ et $[x^{\nu+1}]$ détermine $[x^{\nu+2}]$ sous l'hypothèse $x < A = A(\varepsilon)$. Prenons :

$$2\varepsilon(A+1)^2 \leqslant 1. \tag{4}$$

Posons $x^\nu = [x^\nu] + b_\nu + \varepsilon_\nu$ et $x^{\nu+1} = [x^{\nu+1}] + b_{\nu+1} + \varepsilon_{\nu+1}$. Alors :

$$x^{\nu+2} = \frac{(x^{\nu+1})^2}{x^\nu} = \frac{([x^{\nu+1}] + b_{\nu+1} + \varepsilon_{\nu+1})^2}{[x^\nu] + b_\nu + \varepsilon_\nu}$$

s'écarte de :

$$\frac{([x^{\nu+1}] + b_{\nu+1})^2}{[x^\nu] + b_\nu}$$

de moins de $2\varepsilon(A+1)^2$, d'où la conclusion. $\square$

Question. La suite (b_n) étant donnée, regardons l'ensemble des x tels que $\|x^n - b_n\| < \varepsilon$ à partir d'un certain rang, soit $E(\varepsilon)$, et son intersection avec $[1, X]$. P5 dit que $E(\varepsilon) \cap [1, X]$ est fini lorsque $X = o(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})$ $(\varepsilon \to 0)$ (prendre $X = A$ dans (4)). La formule (3), dans la preuve de P3, montre que $\dim(E(\varepsilon) \cap [1, X]) > 0$ quand $X \gg \frac{1}{\varepsilon}$. Il y a un grand écart entre $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ et $\frac{1}{\varepsilon}$. Que se passe-t-il entre les deux ?

En reprenant la preuve de P3, on vérifie que la valeur critique est $X = \frac{1}{2\varepsilon}$. Pour $X \leqslant \frac{1}{2\varepsilon}$, en partant d'un intervalle situé à gauche de X, l'arbre des I_n s'arrête, ou se réduit à une seule branche.

P6. *Si $X \leqslant \frac{1}{2\varepsilon}$, $E(\varepsilon) \cap [1, X]$ est vide en général, et réduit à un point pour certaines suites (b_n) (à savoir quand (b_n) appartient à un F_σ maigre de $[0, 1[^{\mathbb{N}}$, dépendant de ε et X).*

Quand $X > \frac{1}{2\varepsilon}$, la dimension de $E(\varepsilon) \cap [1, X]$ est positive ; je n'ai pas su la calculer.

Q6 *(Question). Calculer la dimension de $E(\varepsilon) \cap [1, X]$ quand $X > \frac{1}{2\varepsilon}$. Un candidat possible est $\frac{\log 2\varepsilon X}{\log X}$.*

Remarque. Après le dépôt de cette note, un amateur éclairé, Marc Thierry, m'a révélé un texte de Miguel A. Lerma datant de 1995, « On the distribution of powers modulo 1 », jamais publié, mais visible via Google. Ce texte est maintenant consultable sur http://arxiv.org/abs/1312.5996. Il contient une première étude sur la répartition, et c'est une référence à signaler en rapport avec la proposition P3.

Références

[1] M.-J. Bertin, A. Decomps-Guilloux, M. Grandet-Hugot, M. Pathiaux-Delefosse, J.-P. Schreiber, Pisot and Salem Numbers, Birkhäuser, 1992.
[2] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, Some problems of Diophantine approximation, Acta Math. 37 (1914) 155–191, cf. p. 183.
[3] C. Pisot, La répartition modulo 1 et les nombres algébriques, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa 2 (1938) 205–248.
[4] H. Queffelec, M. Queffelec, Diophantine Approximation and Dirichlet Series, HRI Lecture Notes Series, vol. 2, Hindustan Book Agency, 2013, 232 p.
[5] R. Salem, Algebraic Numbers and Fourier Analysis, Heath, 1963.
[6] H. Weyl, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, Math. Ann. 77 (1916) 313–352, Satz 21.