C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 353 (2015) 179–184

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Analyse numérique

Carreaux de Bézier–Serendip

Bézier–Serendipity patches

Paul Louis George [a], Houman Borouchaki [b]

[a] *INRIA, Équipe-projet Gamma3, domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay cedex, France*
[b] *UTT et INRIA, Équipe ICD-Gamma3, université de technologie de Troyes, CS 42060, 10004 Troyes cedex, France*

I N F O   A R T I C L E

Historique de l'article :
Reçu le 1er août 2014
Accepté après révision le 28 novembre 2014
Disponible sur Internet le 30 décembre 2014

Présenté par Olivier Pironneau

R É S U M É

Dans ce papier, on introduit les carreaux tensoriels (quadrilatéraux) réduits dits de « Bézier–Serendip ». Après un rappel sur les carreaux standards de Bézier, on propose une méthode de construction de ces carreaux réduits. Les polynômes de Bernstein correspondants s'écrivent comme combinaisons linéaires des polynômes de Bernstein classiques. On explicite les carreaux de degrés 2, 3, 4 et 5. On indique que, dès le degré 5, la disposition des points de contrôle internes n'est plus symétrique et que, pour pallier ce problème, on propose d'enrichir ces points de contrôle résultant en des carreaux de Bézier–Serendip *étendus*. Ces carreaux représentent, dans le formalisme de Bézier, ce que sont les éléments finis de Lagrange de sérendipité.

A B S T R A C T

We introduce reduced quadrilateral patches, the so called “Bézier–Serendip” patches. After some reminders about standard Bézier patches, we propose a method for constructing those reduced patches. The corresponding Bernstein polynomials are written by means of linear combinations of the standard Bernstein polynomials. We give a full description of the patches of degrees 2, 3, 4 and 5. Since degree 5, the location of the control points is no longer symmetric and to remedy this problem, we propose adding a number of control points, which results in *extended* Bézier–Serendip patches. Those reduced patches are in the Bézier framework what the Serendipity elements are in the finite-element framework.

Abridged English version

The notion of a Bézier–Serendip patch is similar to that of Serendipity finite elements. The Serendipity finite elements of low degree are well known and documented, [10], while those of a higher degree are rarely discussed and lead to difficulties at the time the symmetry is considered, see [3], for degree 2, and [1] or [6] for arbitrary degrees. Primarily, the Serendipity finite elements are uniquely defined by a list of boundary nodes and by prescribing the polynomial space that must be covered by the corresponding shape functions. However, since degree 4, the number of boundary nodes is not sufficient to

Adresses e-mail : paul-louis.george@inria.fr (P.L. George), houman.borouchaki@utt.fr (H. Borouchaki).

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2014.11.017
1631-073X/

make it possible to construct the polynomial space. Hence, one or several internal nodes must be considered. More precisely, for an element of degree d, the polynomial space, the so-called reduced space, is the space of the polynomials of degree d in the two variables u and v in $\mathbb{R}^2$ (say P^d) enriched by the two monomials $u^d v$ and uv^d, [1] and [6].

By analogy with the Serendipity finite elements, we introduce the notion of a tensor-product Bézier–Serendipity patch. First, we recall what a standard Bézier patch of degree d is, [4]. It reads

$$\sigma(u,v) = \sum_{i=0}^{d}\sum_{j=0}^{d} B_{ij}(u,v)P_{ij} \quad \text{with } B_{ij}(u,v) = B_i^d(u)B_j^d(v) \quad \text{and} \quad (u,v) \in [0,1]\times[0,1]$$

where the P_{ij}s are the control points defining the patch and the B_i^ds or the B_j^ds are the Bernstein polynomials. Those polynomials, as it is for the shape functions in the finite element framework, give the partition of unity, $\sum_{i=0}^{d}\sum_{j=0}^{d} B_i^d(u)B_j^d(v) = 1$. Moreover, the patch is inscribed in the convex hull of its control points, the P_{ij}s.

Definition. Given a set $\mathcal{F}$ made up of $\frac{(d+1)(d+2)}{2} + 2$ couples of indices (i,j) including at least the $4 \times d$ couples $(0,j)$, (d,j), $(i,0)$ and (i,d) and given the corresponding control points P_{ij} with $(i,j) \in \mathcal{F}$, the Bézier–Serendip patch of degree d is defined by

$$\sigma^s(u,v) = \sum_{ij\in\mathcal{F}} B_{ij}^s(u,v)P_{ij} \quad \text{with } (u,v) \in [0,1]\times[0,1]$$

where the B_{ij}^ss are the reduced Bernstein functions, which read

$$B_{ij}^s(u,v) = B_i^d(u)B_j^d(v) + \sum_{kl\in\overline{\mathcal{F}}} \alpha_{ij}^{kl} B_k^d(u)B_l^d(v) \quad \text{for } ij \in \mathcal{F},$$

where $\overline{\mathcal{F}}$ is the complement of $\mathcal{F}$ in $\{0,\dots,d\}\times\{0,\dots,d\}$ and with the coefficients α_{ij}^{kl} such that the polynomials $B_{ij}^s(u,v)$s cover the reduced space. □

Hence, a Bézier–Serendipity patch is defined from the reduced Bernstein functions, which are the summation of a standard Bernstein function with a linear combination of the standard Bernstein functions associated with the indices in $\overline{\mathcal{F}}$. The Bézier–Serendipity patch can also be written as

$$\sigma^s(u,v) = \sum_{ij\in\mathcal{F}} B_{ij}(u,v)P_{ij} + \sum_{ij\in\overline{\mathcal{F}}} B_{ij}(u,v)P_{ij}^s$$

where the P_{ij}^ss simply read

$$P_{ij}^s = \sum_{kl\in\overline{\mathcal{F}}} \alpha_{ij}^{kl} P_{ij}.$$

This formalism allow us to return to a classical setting after adding the new control points, the so-called Serendipity control points, the P_{ij}^ss. Therefore, the reduced Bernstein polynomials also ensure the partition of unity and the convex hull property still holds after taking into account those new control points.

1. Introduction

La notion de carreau de Bézier–Serendip s'inspire de la définition des éléments finis Serendip.[1] Les éléments finis Serendip de bas degré sont bien connus, [10], ceux de degré plus élevé le sont moins et présentent quelques difficultés quant à leur symétrie de configuration, voir [3] pour le degré 2 et [1] ou [6] pour tous les degrés. À la base, les éléments finis Serendip sont définis uniquement par la donnée de nœuds sur leur frontière en imposant l'espace polynomial couvert par les fonctions de forme associées. Néanmoins, dès le degré 4, le nombre de nœuds frontaliers ne permet pas d'engendrer l'espace voulu. Ainsi, un ou plusieurs nœuds internes doivent être pris en compte. Plus précisément, pour un élément de degré d, l'espace correspondant, appelé espace réduit, est l'espace des polynômes de degré d en les deux variables u et v de $\mathbb{R}^2$ (l'espace P^d) enrichi[2] des deux monômes $u^d v$ et uv^d, [1] et [6].

Par analogie avec les éléments finis Serendip, nous allons introduire la notion de carreaux tensoriels de Bézier–Serendip. Rappelons qu'un carreau classique de Bézier de degré d s'écrit comme, [4] :

[1] Par commodité on désigne par éléments finis Serendip, les éléments finis de sérendipité.
[2] Certains auteurs ne prennent pas en compte explicitement ce point et le considère comme une conséquence.

$$\sigma(u,v)=\sum_{i=0}^{d}\sum_{j=0}^{d}B_{ij}(u,v)P_{ij}\quad\text{avec } B_{ij}(u,v)=B_i^d(u)B_j^d(v)\quad\text{et}\quad(u,v)\in[0,1]\times[0,1]\tag{1}$$

où les P_{ij} sont les points de contrôle définissant le carreau et les B_i^d ou B_j^d sont les polynômes de base de Bernstein. Ces polynômes, comme pour les fonctions de forme éléments finis, forment une partition de l'unité $\sum_{i=0}^{d}\sum_{j=0}^{d}B_i^d(u)B_j^d(v)=1$. En outre, le carreau est inscrit dans l'enveloppe convexe de ses points de contrôle P_{ij}.

Définition. Étant donné un ensemble $\mathcal{F}$ (comme $\mathcal{F}$rontalier) de $\frac{(d+1)(d+2)}{2}+2$ couples d'indices (i,j) comprenant en particulier les $4\times d$ couples $(0,j)$, (d,j), $(i,0)$ et (i,d) et des points de contrôle correspondants, les P_{ij} avec $(i,j)\in\mathcal{F}$, le carreau de Bézier–Serendip de degré d est défini par

$$\sigma^s(u,v)=\sum_{ij\in\mathcal{F}}B_{ij}^s(u,v)P_{ij}\quad\text{avec } (u,v)\in[0,1]\times[0,1]\tag{2}$$

où les B_{ij}^s sont les fonctions de Bernstein réduites qui s'écrivent comme

$$B_{ij}^s(u,v)=B_i^d(u)B_j^d(v)+\sum_{kl\in\overline{\mathcal{F}}}\alpha_{ij}^{kl}B_k^d(u)B_l^d(v)\quad\text{pour } ij\in\mathcal{F},\tag{3}$$

où $\overline{\mathcal{F}}$ est le complémentaire de $\mathcal{F}$ dans $\{0,\ldots,d\}\times\{0,\ldots,d\}$ et avec les coefficients α_{ij}^{kl} tels que les $B_{ij}^s(u,v)$ couvrent l'espace réduit. □

Ainsi, le carreau de Bézier–Serendip est défini à partir des fonctions de Bernstein réduites qui sont une somme de fonctions de Bernstein classiques avec des combinaisons linéaires des fonctions de Bernstein classiques relatives aux indices de $\overline{\mathcal{F}}$. Le carreau de Bézier–Serendip peut aussi s'écrire comme

$$\sigma^s(u,v)=\sum_{ij\in\mathcal{F}}B_{ij}(u,v)P_{ij}+\sum_{ij\in\overline{\mathcal{F}}}B_{ij}(u,v)P_{ij}^s$$

où les P_{ij}^s vérifient

$$P_{ij}^s=\sum_{kl\in\overline{\mathcal{F}}}\alpha_{ij}^{kl}P_{ij}.$$

Cette écriture permet de retrouver l'écriture classique moyennant l'ajout de nouveaux points de contrôle, dits Serendip, les P_{ij}^s. Ainsi, les polynômes de Bernstein réduits vérifient la partition de l'unité et la propriété d'enveloppe convexe reste valable en prenant en compte ces nouveaux points de contrôle.

Dans la section suivante, on propose une méthode simple pour le calcul des coefficients α_{ij}^{kl}.

2. Méthode de construction

L'idée principale consiste à réécrire chaque monôme de l'espace réduit en fonction des polynômes de Bernstein de degré d puisque ces polynômes forment une base des polynômes de degré au plus d en chaque variable. Pour cela, on utilise l'identité suivante, valable pour tout $0\le k\le d$ et $0\le l\le d$:

$$u^kv^l=u^k(1-u+u)^{d-k}v^l(1-v+v)^{d-l}.\tag{4}$$

L'inclusion de ces monômes dans l'espace réduit donne, de manière générale, un système linéaire dont les inconnues sont les α_{ij}^{kl}. En fait, seul un nombre réduit de l'ensemble de ces monômes doit être pris en compte, car leur inclusion entraîne celle de certains autres. Dans la suite, on développe de façon détaillée le cas du degré 2 et, pour les autres degrés, on donne les fonctions réduites en indiquant la spécificité éventuelle du degré traité, en particulier au degré 5 où l'ensemble $\mathcal{F}$ doit être enrichi.

2.1. Le carreau de Bézier–Serendip de degré 2

La dimension de l'espace réduit est 8 et $\mathcal{F}$ contient uniquement les indices des points de contrôle frontaliers. Ainsi, on cherche à déterminer uniquement P_{11}^s qui s'exprime comme $P_{11}^s=\alpha\{P_{00}+P_{20}+P_{22}+P_{02}\}+\beta\{P_{10}+P_{21}+P_{12}+P_{01}\}$, c'est-à-dire que, par symétrie, les α_{ij}^{kl} ne prennent que les deux valeurs α (sur les coins) et β (sur les arêtes). Les monômes de l'espace réduit sont $1, u, v, u^2, uv, v^2, u^2v$ et uv^2. On commence à inclure les monômes dans l'ordre décroissant de degré en priorisant les produits croisés (en uv). Ainsi, pour u^2v on a :

$$u^2 v = u^2 v(1 - v + v) = B_2^2(u)\left\{\frac{1}{2}B_1^2(v) + B_2^2(v)\right\} = \frac{1}{2}B_2^2(u)B_1^2(v) + B_2^2(u)B_2^2(v).$$

Cette équation donne une première relation :

$$2\alpha + \beta = 0.$$

La présence de $u^2 v$ implique celle de $u^2(1-v)$ par symétrie, et, par suite, celle de $u^2 = u^2 v + u^2(1-v)$. De même, pour uv, on obtient :

$$uv = \left(\frac{1}{2}B_1^2(u) + B_2^2(u)\right) \times \left(\frac{1}{2}B_1^2(v) + B_2^2(v)\right),$$

ce qui donne la relation :

$$4\alpha + 4\beta = 1.$$

La présence de uv implique celle de u et donc de 1. Par suite, tout l'espace réduit est couvert. Les deux relations impliquent $\alpha = -\frac{1}{4}$ et $\beta = \frac{1}{2}$. Avec ces valeurs, on obtient aisément l'expression des deux polynômes de Bernstein réduits type :

$$B_{00}^s(u,v) = B_0^2(u)B_0^2(v) - \frac{1}{4}B_1^2(u)B_1^2(v),$$
$$B_{10}^s(u,v) = B_1^2(u)B_0^2(v) + \frac{1}{2}B_1^2(u)B_1^2(v),$$

qui se simplifie en les expressions reportées dans le tableau suivant :

$B_{00}^s(u,v) = B_0^2(u)B_0^1(v) + B_0^1(u)B_0^2(v) - B_0^1(u)B_0^1(v)$
$B_{10}^s(u,v) = B_1^2(u)B_0^1(v)$

Fonctions de base type du carreau de degré 2 à 8 points.

Ces deux fonctions type permettent par symétrie de trouver toutes les autres.

Remarque. La relation liant P_{11}^s aux P_{ij} dont les ij sont dans $\mathcal{F}$ est la même que celle intervenant entre les nœuds des fonctions de forme des éléments finis Serendip.

À noter que ce carreau n'est autre que le carreau transfini de Coons du degré 2, voir par exemple [5] et [2].

2.2. Carreaux de Bézier–Serendip de degré 3, 4 et 5

L'espace réduit des carreaux de degré 3, qui sont également des carreaux transfinis de Coons, est de dimension 12. De même, $\mathcal{F}$ ne contient que les indices frontaliers et, dans ce cas, on doit déterminer P_{11}^s, P_{21}^s, P_{12}^s et P_{22}^s. Par symétrie, les α_{ij}^{kl} prennent leurs valeurs dans un ensemble de sept paramètres. Ces paramètres sont la solution d'un système linéaire défini par l'inclusion des monômes $u^3 v$ et $u^2 v$ uniquement et on obtient l'expression des deux polynômes de Bernstein réduits type :

$$B_{00}^s(u,v) = B_0^3(u)B_0^3(v) - \frac{4}{9}B_1^3(u)B_1^3(v) - \frac{2}{9}B_2^3(u)B_1^3(v) - \frac{2}{9}B_1^3(u)B_2^3(v) - \frac{1}{9}B_2^3(u)B_2^3(v),$$
$$B_{10}^s(u,v) = B_1^3(u)B_0^3(v) + \frac{2}{3}B_1^3(u)B_1^3(v) + \frac{1}{3}B_1^3(u)B_2^3(v),$$

qui se simplifie en les expressions indiquées dans le tableau suivant :

$B_{00}^s(u,v) = B_0^3(u)B_0^1(v) + B_0^1(u)B_0^3(v) - B_0^1(u)B_0^1(v)$
$B_{10}^s(u,v) = B_1^3(u)B_0^1(v)$

Fonctions de base type du carreau de degré 3 à 12 points.

Dans le cas des carreaux de degré 4, l'espace réduit est de dimension 17. L'ensemble des indices de $\mathcal{F}$ contient les indices frontaliers et un indice interne. Pour garantir la symétrie, on considère comme indice interne l'indice 22. Dans ce cas, on doit déterminer 8 points de contrôle Serendip. De même, par symétrie, les α_{ij}^{kl} prennent leurs valeurs dans un ensemble de 20 paramètres. Ces paramètres sont la solution de deux systèmes linéaires définis par l'inclusion des monômes $u^4 v, u^3 v, u^2 v^2$ et uv et on obtient l'expression des quatre polynômes de Bernstein réduits type :

$$
\begin{aligned}
B^s_{00}(u,v) &= B^4_0(u)B^4_0(v) - \frac{27}{64}B^4_1(u)B^4_1(v) - \frac{3}{64}B^4_3(u)B^4_1(v) - \frac{3}{64}B^4_1(u)B^4_3(v) + \frac{5}{64}B^4_3(u)B^4_3(v) \\
&\quad - \frac{3}{16}B^4_2(u)B^4_1(v) + \frac{1}{16}B^4_3(u)B^4_2(v) + \frac{1}{16}B^4_2(u)B^4_3(v) - \frac{3}{16}B^4_1(u)B^4_2(v) \\
B^s_{10}(u,v) &= B^4_1(u)B^4_0(v) + \frac{48}{64}B^4_1(u)B^4_1(v) + \frac{16}{64}B^4_1(u)B^4_3(v) + \frac{8}{16}B^4_1(u)B^4_2(v) \\
B^s_{20}(u,v) &= B^4_2(u)B^4_0(v) - \frac{18}{64}B^4_1(u)B^4_1(v) - \frac{18}{64}B^4_3(u)B^4_1(v) - \frac{18}{64}B^4_1(u)B^4_3(v) - \frac{18}{64}B^4_3(u)B^4_3(v) \\
&\quad + \frac{6}{16}B^4_2(u)B^4_1(v) - \frac{6}{16}B^4_3(u)B^4_2(v) - \frac{2}{16}B^4_2(u)B^4_3(v) - \frac{6}{16}B^4_1(u)B^4_2(v) \\
B^s_{22}(u,v) &= B^4_2(u)B^4_2(v) + \frac{36}{64}B^4_1(u)B^4_1(v) + \frac{36}{64}B^4_3(u)B^4_1(v) + \frac{36}{64}B^4_1(u)B^4_3(v) + \frac{36}{64}B^4_3(u)B^4_3(v) \\
&\quad + \frac{12}{16}B^4_2(u)B^4_1(v) + \frac{12}{16}B^4_3(u)B^4_2(v) + \frac{12}{16}B^4_2(u)B^4_3(v) + \frac{12}{16}B^4_1(u)B^4_2(v).
\end{aligned}
$$

Ces expressions, après simplification, sont reportées dans le tableau suivant :

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&B^s_{00}(u,v) = B^4_0(u)B^1_0(v) + B^1_0(u)B^4_0(v) - B^1_0(u)B^1_0(v) + \frac{9}{16}B^2_1(u)B^2_1(v) \\
&B^s_{10}(u,v) = B^4_1(u)B^1_0(v) \\
&B^s_{20}(u,v) = B^4_2(u)B^1_0(v) - \frac{9}{8}B^2_1(u)B^2_1(v) \\
&B^s_{22}(u,v) = \frac{9}{4}B^2_1(u)B^2_1(v)
\end{aligned}
}
$$

Fonctions de base type du carreau de degré 4 à 17 points.

L'espace réduit des carreaux de Bézier–Serendip de degré 5 est de dimension 23. Ainsi, 3 indices internes devront être pris en compte dans $\mathcal{F}$. Dans ce cas, quels que soient les indices internes retenus, la configuration géométrique des points de contrôle ne peut être symétrique. Par suite, on considère un indice supplémentaire pour rétablir cette symétrie. On prend comme indices internes $\{22, 32, 23, 33\}$. L'ajout d'un point supplémentaire implique l'existence d'une famille infinie (dépendant d'un paramètre) de carreaux de Bézier–Serendip de degré 5. L'inclusion d'un monôme supplémentaire dans l'espace réduit permet de fixer le paramètre et d'obtenir ainsi une solution unique. Il s'agit là d'un carreau de Bézier–Serendip *étendu*. Comme u^5v et uv^5 sont dans l'espace réduit, le seul choix possible parmi les trois monômes u^4v^2, u^3v^3 et u^2v^4 est u^3v^3 à cause de la symétrie des deux autres monômes. On doit donc déterminer 12 points de contrôle Serendip. En considérant l'inclusion du monôme supplémentaire u^3v^3 et par symétrie, les α^{kl}_{ij} prennent leurs valeurs dans un ensemble de 38 paramètres. Comme dans le cas précédent, ces paramètres sont la solution de deux systèmes linéaires définis par l'inclusion des monômes $u^5v, u^3v^3, u^4v, u^3v^2, u^3v$ et u^2v^2 et on obtient l'expression des quatre polynômes de Bernstein réduits type :

$$
\begin{aligned}
B^s_{00}(u,v) &= B^5_0(u)B^5_0(v) - \frac{16}{45}B^5_1(u)B^5_1(v) - \frac{4}{45}B^5_4(u)B^5_1(v) - \frac{4}{45}B^5_1(u)B^5_4(v) - \frac{1}{45}B^5_4(u)B^5_4(v) \\
&\quad - \frac{12}{75}B^5_2(u)B^5_1(v) - \frac{8}{75}B^5_3(u)B^5_1(v) - \frac{3}{75}B^5_2(u)B^5_4(v) - \frac{2}{75}B^5_3(u)B^5_4(v) \\
&\quad - \frac{3}{75}B^5_4(u)B^5_2(v) - \frac{2}{75}B^5_4(u)B^5_3(v) - \frac{12}{75}B^5_1(u)B^5_2(v) - \frac{8}{75}B^5_1(u)B^5_3(v), \\
B^s_{10}(u,v) &= B^5_1(u)B^5_0(v) + \frac{36}{45}B^5_1(u)B^5_1(v) + \frac{9}{45}B^5_1(u)B^5_4(v) + \frac{45}{75}B^5_1(u)B^5_2(v) + \frac{30}{75}B^5_1(u)B^5_3(v) \\
B^s_{20}(u,v) &= B^5_2(u)B^5_0(v) - \frac{32}{45}B^5_1(u)B^5_1(v) + \frac{16}{45}B^5_4(u)B^5_1(v) - \frac{8}{45}B^5_1(u)B^5_4(v) + \frac{4}{45}B^5_4(u)B^5_4(v) \\
&\quad + \frac{20}{75}B^5_2(u)B^5_1(v) + \frac{5}{75}B^5_2(u)B^5_4(v) + \frac{30}{75}B^5_4(u)B^5_2(v) + \frac{20}{75}B^5_4(u)B^5_3(v) \\
&\quad - \frac{60}{75}B^5_1(u)B^5_2(v) - \frac{40}{75}B^5_1(u)B^5_3(v) \\
B^s_{22}(u,v) &= B^5_2(u)B^5_2(v) + \frac{16}{9}B^5_1(u)B^5_1(v) - \frac{8}{9}B^5_4(u)B^5_1(v) - \frac{8}{9}B^5_1(u)B^5_4(v) + \frac{4}{9}B^5_4(u)B^5_4(v) \\
&\quad + \frac{4}{3}B^5_2(u)B^5_1(v) - \frac{2}{3}B^5_2(u)B^5_4(v) - \frac{2}{3}B^5_4(u)B^5_2(v) + \frac{4}{3}B^5_1(u)B^5_2(v).
\end{aligned}
$$

Ces quatre fonctions de base type, après simplification, sont données dans le tableau qui suit :

$$\boxed{\begin{aligned}
B^s_{00}(u,v) &= B^5_0(u)B^1_0(v) + B^1_0(u)B^5_0(v) - B^1_0(v)B^1_0(v)\\
&\quad + \frac{16}{9}B^2_1(u)B^2_1(v) - \frac{8}{9}B^2_1(u)B^3_2(v) + \frac{4}{9}B^3_2(u)B^3_2(v) - \frac{8}{9}B^3_2(u)B^2_1(v)\\
B^s_{10}(u,v) &= B^5_1(u)B^1_0(v)\\
B^s_{20}(u,v) &= B^5_2(u)B^1_0(v) + \frac{20}{81}\{-8B^3_1(u)B^3_1(v) - 2B^3_1(u)B^3_2(v) + 4B^3_2(u)B^3_1(v) + B^3_2(u)B^3_2(v)\}\\
B^s_{22}(u,v) &= \frac{100}{9}\{B^3_2(u)B^3_2(v) - B^2_1(u)B^3_2(v) - B^3_2(u)B^2_1(v) + B^2_1(u)B^2_1(v)\}
\end{aligned}}$$

Fonctions de base type du carreau choisi de degré 5 à 24 points.

Remarque. Comme pour le degré 2, on peut montrer que, voir [9], où l'on donne une description technique complétement détaillée, les relations liant les P^s_{ij} aux P_{ij} dont les ij sont dans $\mathcal{F}$ sont les mêmes que celles intervenant entre les nœuds des fonctions de forme des éléments finis Serendip. De manière générale, on retrouve les mêmes relations quel que soit le degré de l'élément.

3. Conclusion

Dans ce papier, nous avons introduit la notion de carreaux de Bézier–Serendip (avec un nombre réduit de points de contrôle). Nous avons donné la démarche permettant la construction de ces éléments. Les cas des degrés 2, 3, 4 et 5 ont été explicités.

Le formalisme de Bézier–Serendip est une réécriture des fonctions de forme des éléments finis Serendip dans le formalisme Bézier. Ainsi, pour garantir la validité de ce type déléments finis (positivité du jacobien, [7,8]), il suffit de considérer son écriture en Bézier–Serendip et d'utiliser la propriété de l'enveloppe convexe. En outre, l'obtention des fonctions de forme des éléments finis Serendip est rendue simple et systématique via le formalisme Bézier–Serendip. L'extension aux degrés plus élevés et aux carreaux de Bézier rationnels est une suite naturelle de cette étude.

Références

[1] D.L. Arnold, G. Awanou, The serendipity family of finite elements, Found. Comput. Math. 11 (2011) 337–344.
[2] M. Bercovier, E. Shilat, Enhancement of Gordon–Coons interpolations by "bubble functions", Comput. Aided Geom. Des. 10 (1993) 253–265.
[3] C. Bernadi, Y. Maday, F. Rapetti, Discrétisation variationnelles de problèmes aux limites elliptiques, Mathématiques et Applications, vol. 45, Springer, 2004.
[4] P. Bézier, Courbes et surfaces, mathématiques et CAO, vol. 4, Hermès, Paris, 1986.
[5] G. Farin, D. Hansford, Discrete Coons patches, Comput. Aided Geom. Des. 16 (1999) 691–700.
[6] M.S. Floater, A. Gillette, Nodal bases for the serendipity family of finite elements, personal communication, 2014.
[7] P.L. George, H. Borouchaki, Validité des éléments finis de Lagrange de degré 1 et 2, RR INRIA 8376 (2013).
[8] P.L. George, H. Borouchaki, N. Barral, Construction et validation des éléments réduits associés à un carreau simplicial de degré arbitraire, RR INRIA 8571 (2014).
[9] P.L. George, H. Borouchaki, N. Barral, Construction et validation des éléments Serendip associés à un carreau de degré arbitraire, RR INRIA 8572 (2014).
[10] M. Lenoir, Approximation par éléments finis des problèmes elliptiques, Éditions de l'ENSTA, Paris, 2006.