C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 353 (2015) 459–463

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Topologie

Produit de Chas–Sullivan et actions d'un groupe de Lie connexe

Loop product and connected Lie group actions

Hilaire George Mbiakop [1]

Département de mathématiques, faculté des sciences, université de Yaoundé-1, BP 812, Cameroun

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 12 mai 2014
Accepté après révision le 12 décembre 2014
Disponible sur Internet le 4 mars 2015

Présenté par le comité de rédaction

RÉSUMÉ

Soient Γ un groupe de Lie connexe, X un Γ-espace et $E_\Gamma = E\Gamma \times_\Gamma X$ le quotient homotopique associé. Dans cette note, nous expliquons comment calculer le produit de Chas–Sullivan sur E_Γ et nous construisons un exemple où ce produit est nul ou non suivant l'action du groupe Γ.

© 2015 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

ABSTRACT

Let Γ be a connected Lie group, X be Γ-space and $E_\Gamma = E\Gamma \times_\Gamma X$ the associated homotopy quotient. In this short note, we explain how rational homotopy theory provides explicit computations of the loop product on E_Γ and we construct an example where this product is trivial or not depending on the given action.

© 2015 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

À tout espace topologique X est associé son espace des lacets libres LX. Lorsque M est une variété connexe compacte sans bord de dimension m, Chas et Sullivan [1] ont défini un produit de degré $-m$ sur l'homologie de LM à coefficients dans un anneau commutatif $\Bbbk$,

$$H_*(LM;\Bbbk) \otimes H_*(LM;\Bbbk) \to H_{*-m}(LM,\Bbbk), \quad x \otimes y \mapsto x \bullet y$$

de telle manière que $\mathbb{H}_*(LM;\Bbbk) := H_{*+m}(LM;\Bbbk)$ soit une algèbre commutative graduée. Le point de départ de cette note est l'extension de ce produit de Chas–Sullivan aux espaces de Gorenstein [5] dans le cas où $\Bbbk$ est un corps. Parmi les exemples d'espaces de Gorentein de dimension formelle $n \in \mathbb{Z}$, on trouve les espaces à dualité de Poincaré de dimension n rel. $\Bbbk$, les espaces classifiants BG des groupes de Lie compacts connexes G, qui sont de dimension formelle –rang G et l'espace total E d'une fibration de base un espace de Gorenstein B et de fibre un espace à dualité de Poincaré F. Dans ce dernier cas, la dimension formelle de E est la somme de la dimension formelle de B et la dimension de F (cf. [3] pour plus de détails).

Adresse e-mail : hilairegeorge@yahoo.fr.

[1] Titulaire d'une bourse de l'AUF à l'Université d'Angers.

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2014.12.010
1631-073X/© 2015 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

En particulier, si Γ est un groupe de Lie compact connexe qui opère topologiquement sur une variété connexe compacte sans bord de dimension m, alors nous obtenons la fibration de Borel

$$M \longrightarrow E_\Gamma \longrightarrow B\Gamma$$

où E_Γ est un espace de Gorenstein de dimension formelle $m-$ rang Γ. Dans un premier temps (section 2), nous établirons une description du dual du loop produit pour un espace de Gorenstein de dimension formelle n en termes de modèles de Sullivan (cf. [5,2,6]). Ensuite (section 3), nous donnerons le modèle minimal de Sullivan de l'espace E_Γ lorsque M est un espace homogène G/H via une action de Γ sur le groupe de Lie compacte connexe G et finalement (section 3), nous indiquerons un exemple avec une action de $\Gamma = S^1$ sur $G = U(n+1)$ dépendant d'un paramètre $\lambda = 0, 1$.

2. Produit de Chas–Sullivan pour un espace de Gorenstein

Soit X un espace topologique. Désignons par $C_*(X;\Bbbk)$ (respectivement $H_*(X,\Bbbk)$) le complexe de chaînes singulières (respectivement l'homologie singulière) de l'espace X. Nous avons le produit fibré

$$\begin{tikzcd} LX \times_X LX \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "ev'_0"'] & LX \times LX \arrow[d, "ev_0 \times ev_0"] \\ X \arrow[r, "\Delta"] & X \times X \end{tikzcd}$$

où $ev_0(\gamma) = \gamma(0)$ (respectivement $ev'_0(\gamma_1, \gamma_2) = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$) pour tout $\gamma \in LX$ (respectivement $(\gamma_1, \gamma_2) \in LX \times_X LX$) ; $\Delta : X \to X \times X$ l'application diagonale et $\iota : LX \times_X LX \to LX \times LX$, l'inclusion. Si X est un espace de Gorenstein de dimension formelle d simplement connexe, alors d'après [5, Théorème C], l'application linéaire $Dlp := H^*(\iota!) \circ H^*(Comp)$, de degré d

$$H^*(LX;\Bbbk) \overset{H^*(Comp)}{\longrightarrow} H^*(LX \times_X LX\ \Bbbk) \overset{H^*(\iota!)}{\longrightarrow} H^*(LX:\Bbbk) \otimes H^*(LX;\Bbbk)$$

coïncide avec le dual linéaire du produit de Chas–Sullivan. Ici, $Comp : LX \times_X LX \to LX$ désigne la composition des lacets libres et $\iota!$ l'application de Gysin associée à l'inclusion ι qui est définie de la manière suivante. L'application de Gysin associée à Δ est l'unique élément, à multiplication par un scalaire près,

$$H(\Delta!) \in Ext^d_{C^*(X^2;\Bbbk)}\big(C^*(X;\Bbbk), C^*\big(X^2;\Bbbk\big)\big) \cong \Bbbk$$

où $C^*(X;\Bbbk)$ est considéré comme un $C^*(X^2;\Bbbk)$-module via Δ et où $Ext_{C^*(X^2)}(C^*(X), C^*(X^2))$ désigne le ext-différentiel, au sens d'Eilenberg–Moore [3]. Un représentant de cette application de Gysin est une application, notée $\Delta!$, qui est définie dans la catégorie dérivée des $C^*(X^2)$-modules. Dans cette catégorie dérivée, $\Delta!$ se relève en une application

$$\iota! : C^*(LX \times_X LX;\Bbbk) \to C^*(LX \times LX;\Bbbk),$$

qui est définie de façon unique, à la multiplication par un scalaire près.

Dans la suite, $\Bbbk$ désigne un corps de caractéristique 0 qui sera sous entendu afin d'alléger les notations. Le point clé pour notre propos est que nous pouvons remplacer l'algèbre graduée $C^*(X)$ par le modèle minimal de X. Considérons le produit fibré

$$\begin{tikzcd} LX \arrow[r, "\iota_X"] \arrow[d, "ev_0"'] & X^I \arrow[d, "ev_{0,1}"] \\ X \arrow[r, "\Delta"] & X \times X \end{tikzcd}$$

où $I = [0, 1]$ et la flêche $ev_{0,1}$ désigne la fibration des chemins. En effet, la composition des lacets libres se déduit de la multiliplication des chemins et le modèle minimal de X^I, qui se calcule facilement à partir de celui de X, permet à la fois de d'obtenir un représentant de Sullivan de la composition des chemins et donc de celle des lacets libres, et fournit une résolution semi-libre du modèle minimal $\mathcal{M}_X$ de X, en tant que $\mathcal{M}_X^{\otimes}2$-module différentiel gradué, permettant ainsi le calcul de l'application de Gysin $\iota!$. Nous renvoyons le lecteur au [4, chapitre 12] pour les notations, la terminologie et résultats concernant les modèles de Sullivan. Toutefois, précisons que si $V = \{V^i\}_{i\geq 1}$ est un espace vectoriel gradué alors $\wedge V$ désigne l'algèbre graduée commutative libre sur V et $\bar{V}$ l'espace vectoriel gradué défini par $(\bar{V})^i = V^{i+1}$. Tout espace connexe par arcs X admet un modèle de Sullivan

$$\rho_X : \mathcal{M}_X := (\wedge V, d) \overset{\simeq}{\longrightarrow} A_{\mathrm{PL}}(X)$$

où A_{PL} est le foncteur contravariant des formes PL sur X et ρ_X un quasi-isomorphisme. Si X et Y sont deux espaces connexes par arcs, alors toute application admet un *représentant de Sullivan* $\mathcal{M}_f : \mathcal{M}_Y \longrightarrow \mathcal{M}_X$. Nous faisons ainsi les identifications suivantes :

$$H^*(X) = H\big(A_{\mathrm{PL}}(X)\big) = H(\mathcal{M}_X) \quad \text{et} \quad H^*(f) = H\big(A_{\mathrm{PL}}(f)\big) = H(\mathcal{M}_f).$$

Notre premier résultat s'énonce comme suit.

Proposition 2.1. *Si X est un espace de Gorenstein de dimension formelle d simplement connexe alors le dual du loop produit, Dlp, est la composée*

$$H(\bar{g}) \circ H(\bar{\mathcal{M}}_{\sigma})^{-1} \circ H(Comp),$$

où les applications intervenant dans ces relations sont décrites à l'aide du diagramme ci-dessous.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_{X^I} \otimes_{\mathcal{M}_X^{\otimes 2}} \mathcal{M}_X \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mathcal{M}_{Comp'} \otimes_{\mathcal{M}_{pr_{1,3}}} Id"] & (\wedge V \otimes \wedge \bar{V}, d) = \mathcal{M}_{LX} \arrow[d, "\mathcal{M}_{Comp}"] \\
\mathcal{M}_{X^I \times_X X^I} \otimes_{\mathcal{M}_X^{\otimes 3}} \mathcal{M}_X \arrow[r, "\cong"] & (\wedge V \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 2}, d) = \mathcal{M}_{LX \times_X LX} \arrow[d, equal] \\
\mathcal{M}_{X^I}^{\otimes 2} \otimes_{\mathcal{M}_X^{\otimes 4}} \mathcal{M}_X \arrow[r, "\cong"] \arrow[u, "\pi \otimes_{Id \otimes \mu \otimes Id} Id", "\simeq"'] & (\wedge V \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 2}, d) = \mathcal{M}_{LX \times_X LX} \\
\mathcal{M}_{X^I}^{\otimes 2} \otimes_{\mathcal{M}_X^{\otimes 4}} \mathcal{M}_{X^I} \arrow[r, "\cong"] \arrow[u, "Id \otimes_{Id} \mathcal{M}_{\sigma}", "\simeq"'] \arrow[d, "Id \otimes_{Id} g"] & ((\wedge V)^{\otimes 2} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 3}, d) = \mathcal{M}_E \arrow[u, "\bar{\mathcal{M}}_{\sigma}", "\simeq"'] \arrow[d, "\bar{g}"] \\
\mathcal{M}_{X^I}^{\otimes 2} \otimes_{\mathcal{M}_X^{\otimes 4}} \mathcal{M}_X^{\otimes 2} \arrow[r, "\cong"] & ((\wedge V)^{\otimes 2} \otimes (\wedge \bar{V})^{\otimes 4}, d) \cong \mathcal{M}_{LX}^{\otimes 2}
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme,

(1) $X^I \times_X X^I = \{(\alpha, \beta) \in X^I \times X^I : \alpha(1) = \beta(0)\}$; et l'application $Comp' : X^I \times_X X^I \to X^I$ est la composition des chemins ;
(2) $\mathcal{M}_{X^I} = ((\wedge V)^{\otimes 2} \otimes \wedge \bar{V}, d)$ est une $\mathcal{M}_X^{\otimes 2}$-résolution semi-libre de $\mathcal{M}_X$ et $\mathcal{M}_{X^I \times_X X^I} = \mathcal{M}_{X^I} \otimes_{\mathcal{M}_X} \mathcal{M}_{X^I} = ((\wedge V)^{\otimes 3} \otimes \wedge(\bar{V})^{\otimes 2}, d)$ est une $\mathcal{M}_X^{\otimes 3}$-résolution semi-libre de $\mathcal{M}_X$;
(3) $\sigma : X \to X^I$ désigne la section canonique de la fibration des chemins ;
(4) μ désigne le produit de $\mathcal{M}_X$ et $pr_{1,3}$ la projection sur la première et la dernière coordonnée ;
(5) l'application $\mathcal{M}_X^{\otimes 2}$-linéaire g est telle que $H(g) \in Ext^d_{\mathcal{M}_X^{\otimes 2}}(\mathcal{M}_X, \mathcal{M}_X^{\otimes 2}) \cong \Bbbk$.

3. Un exemple de calcul du loop produit de E_Γ

Soit G un groupe de Lie connexe compact et BG son espace classifiant. Il est bien connu que $H^*(G; \mathbb{Q}) = \wedge P_G$ et $H^*(BG; \mathbb{Q}) = \wedge Q_G$, où P_G désigne un espace vectoriel gradué de dimension finie concentré en degré impair et $s : P_G \to Q_G$ un isomorphisme linéaire de degré 1. Si K est un sous-groupe fermé de G connexe et si

$$S^1 \xrightarrow{f} G \xleftarrow{j} K$$

désigne respectivement un homomorphisme de groupe et l'inclusion naturelle, alors nous obtenons les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
G/K \arrow[r, "\cong"] \arrow[dr] & EK \times_j G \arrow[r] \arrow[d] & EG \arrow[d, "p_G"] \\
& BK \arrow[r, "Bj"] & BG
\end{tikzcd}
\quad \text{et} \quad
\begin{tikzcd}
ES^1 \times_f G/K \arrow[r] \arrow[d] & (EG)/K \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & BK \arrow[dl, "Bj"'] \\
BS^1 \arrow[r, "Bf"] & BG &
\end{tikzcd}$$

où

$$EK \times_j G := \{(e, g) \mid (ek, g) = (e, j(k)g)\}$$
$$ES^1 \times_f G/K := \{(x, gK) \mid (x\,e^{2i\pi\theta}, gK) = (x, (f(e^{2i\pi\theta})g)K)\}$$

et où les carrés sont des produits fibrés. Un modèle relatif de Sullivan (non nécessairement minimal) de l'homomorphisme $G/K \to BK$ est de la forme, [4, Proposition 15.16]

$$(\wedge Q_K, 0) \hookrightarrow (\wedge Q_K \otimes \wedge PG, \bar{d}) \twoheadrightarrow (\wedge P_G, 0)$$

où $d(y' \otimes 1) = 0$ et $\bar{d}(1 \otimes x) = H(Bj; \mathbb{Q})(sx) \otimes 1$ avec $y' \in Q_K$ et $x \in P_G$.

Par ailleurs [4, Proposition 15.8], un modèle relatif de Sullivan de $E := BS^1 \times_f G/K$ est de la forme

$$(\wedge u, 0) \hookrightarrow (\wedge u \otimes \wedge Q_K \otimes \wedge P_G, d) \twoheadrightarrow (\wedge Q_K \otimes \wedge P_G, \bar{d})$$

tel que, pour tout $x \in P_G$,

$$d(1 \otimes 1 \otimes x) = H^*(Bf; \mathbb{Q})(sx) \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes H(Bj; \mathbb{Q})(sx) \otimes 1. \tag{1}$$

Considérons le cas particulier où $G = U(n+1)$ et $K = U(n) \times U(1)$, $(n \geq 1)$. Alors, d'après [7, III-Theorem 5.8] $H(Bj) : \wedge(y_1, \cdots, y_{n+1}) \to \wedge(y'_1, \cdots, y'_n) \otimes \wedge y''_1$ et pour des raisons de degrés, $H(Bf) : \wedge(y_1, \cdots, y_{n+1}) \to \wedge u$, $y_1 \mapsto \wedge u$, où $\wedge = 0, 1$. Un modèle de Sullivan relatif de E est obtenu en appliquant (1). L'espace E est un espace de Gorenstein simplement connexe, de dimension formelle $2n-1$.

Remarquons que $G/K \cong \mathbb{C}P^n$ et que l'action de S^1 sur $\mathbb{C}P^n$ est définie via cette identification par : $\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\theta}.(x, gG/K) = (x, (f(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\theta})g)G/K)$. À chaque valeur de λ (correspondant à l'action triviale ou une action régulière sur un espace projectif projectif complexe), nous associons le type d'homotopie rationelle de l'espace de Borel. C'est le produit $BS^1 \times \mathbb{CP}^n$ lorsque $\lambda = 0$. Ces deux types d'homotopie rationnelle seront distingués par le loop produit. Pour des raisons de degrés, la suite spectrale de Serre cohomologique d'une fibration de base BS^1 et de fibre $\mathbb{C}P^n$ dégénère au terme E_2 et admet un modèle relatif de la forme $\mathfrak{M}_E = (\wedge u \otimes (v, x), d)$, avec $du = 0$, $dv = 0$ et $dx = v^{n+1} + \Phi$, où $\Phi \in \wedge(u, v)$. Dans notre cas particulier, $\Phi = \lambda u^{n+1}$. Ceci peut être déduit directement de la formule (1) en observant que le modèle minimal de $(\wedge u \otimes \wedge Q_K \otimes \wedge P_G, d)$ est obtenu en identifiant y'_1 et y''_1, car $dx_1 = y'_1 + y''_1$.

1. $\lambda = 0$. Dans ce cas l'espace de Borel E est le produit $BS^1 \times \mathbb{CP}^n$ et $\mathcal{M}_E = (\wedge u \otimes \wedge(v, x), d)$ avec $|u| = |v| = 2$; $du = dv = 0$, $dx = v^{n+1}$.

Un modèle de Sullivan relatif de la fibration des chemins $E^I \to E \times E$ fournit la résolution semi-libre de $\mathfrak{M}_E$:

$$\mathfrak{M}_{E^I} = \left(\wedge\left(u, v, x, u', v', x', \bar{u}, \bar{v}, \bar{x}\right), d\right) \quad \text{où } |\bar{u}| = |\bar{v}| = 1, \quad |\bar{x}| = 2n \quad \text{et}$$

$$d\bar{u} = u' - u; \quad d\bar{v} = v' - v; \quad d\bar{x} = x' - x - \sum_{i+j=n} v^i v'^j \bar{v}$$

$$\mathfrak{M}_{E^I \times_E E^I} = \left(\wedge\left(u, v, x, u', v', x', u'', v'', x'', \bar{u}, \bar{v}, \bar{x}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{x}\right), d\right) \quad \text{avec}$$

$$\begin{cases} d\bar{u} = u' - u; \quad d\bar{v} = v' - v; \quad d\tilde{u} = u'' - u'; \quad d\tilde{v} = v'' - v'; \\ d\bar{x} = x' - x - \sum_{i+j=n} v^i v'^j \bar{v}; \quad d\tilde{x} = x'' - x' - \sum_{j+k=n} v'^j v''^k \tilde{v}. \end{cases}$$

$\mathfrak{M}_{LE} = (\wedge(u, v, x, \bar{u}, \bar{v}, \bar{x}), d)$ où $d\bar{u} = d\bar{v} = 0$ et $d\bar{x} = -(n+1)v^n\bar{v}$. $\mathfrak{M}_{LE \times_E LE} = \left(\wedge(u, v, x, \bar{u}, \bar{v}, \bar{x}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{x}), d\right)$, avec $d\bar{u} = d\bar{v} = 0$, $d\bar{x} = -(n+1)v^n\bar{v}$, $d\tilde{u} = d\tilde{v} = 0$, $d\tilde{x} = -(n+1)v^n\tilde{v}$.

Un représentant de Sullivan $\mathfrak{M}_{Comp'} : \mathfrak{M}_{E^I} \longrightarrow \mathfrak{M}_{E^I \times_E E^I}$ de la composition des chemins $Comp' : E^I \times_E E^I \longrightarrow E^I$ est donné par :

$$\mathfrak{M}_{Comp'} : \begin{cases} u \mapsto u, \quad v \mapsto v, \quad x \mapsto x, \quad u' \mapsto u'', \quad v' \mapsto v'', \quad x' \mapsto x'', \\ \bar{u} \mapsto \bar{u} + \tilde{u}, \quad \bar{v} \mapsto \bar{v} + \tilde{v}, \quad \bar{x} \mapsto \bar{x} + \tilde{x} + \sum_{p+q+r=n-1} v^p v'^q v''^r \bar{v}\tilde{v}. \end{cases}$$

Nous en déduisons un représentant de Sullivan $\mathfrak{M}_{Comp} : \mathfrak{M}_{LE} \longrightarrow \mathfrak{M}_{LE \times_E LE}$ de la composition des lacets libres $Comp : LE \times_E LE \longrightarrow LE$ tel que :

$$\mathfrak{M}_{Comp} : \begin{cases} \bar{u} \mapsto \bar{u} + \tilde{u}, \quad \bar{v} \mapsto \bar{v} + \tilde{v}, \\ \bar{x} \mapsto \bar{x} + \tilde{x} + \frac{n(n+1)}{2} v^{n-1} \bar{v}\tilde{v}. \end{cases}$$

L'application $\mathfrak{M}_E^{\otimes 2}$-linéaire de degré $2n-1$, $g : \mathfrak{M}_{E^I} \longrightarrow \mathfrak{M}_E^{\otimes 2}$, annoncée dans la proposition 2.1, est un cocycle (qui n'est pas un cobord) du complexe $(Hom_{\mathfrak{M}_E^{\otimes 2}}(\mathfrak{M}_{E^I}, \mathfrak{M}_E^{\otimes 2}), D)$ de degré d où $Dh = d \circ h - (-1)^{|h|} h \circ d$. Pour des raisons de degrés et de compatibilité aux différentielles, nous obtenons le candidat suivant :

$$g : \begin{cases} 1 \longmapsto 0 \\ \bar{u} \longmapsto \sum_{i+j=n} v^i v'^j + (u' - u)P, \quad \bar{v} \longmapsto (v' - v)P, \quad \bar{x} \longmapsto (x' - x)P, \quad P = \sum_{k+l=n-1} u^k u'^l; \\ \bar{u}\bar{v} \longmapsto x - x', \quad \bar{u}^\epsilon \bar{v}^{\epsilon'} \bar{x}^k \longmapsto 0, \quad \text{pour } \epsilon, \epsilon' \in \{0, 1\} \text{ et } (1 + \epsilon + \epsilon')k \geq 2, \ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Par ailleurs, l'homomorphisme d'algèbres différentielles graduées $\mathfrak{M}_\sigma : \mathfrak{M}_{E^I} \longrightarrow \mathfrak{M}_E$ est défini par :

$$\mathfrak{M}_\sigma(u) = u = \mathfrak{M}_\sigma\left(u'\right), \quad \mathfrak{M}_\sigma(v) = v = \mathfrak{M}_\sigma\left(v'\right), \quad \mathfrak{M}_\sigma(x) = x = \mathfrak{M}_\sigma\left(x'\right) \quad \text{et} \quad \mathfrak{M}_\sigma(\bar{u}) = \mathfrak{M}_\sigma(\bar{v}) = \mathfrak{M}_\sigma(\bar{x}) = 0.$$

Il en résulte que :

$$Dlp(\bar{v}\bar{x}) = (v \otimes 1 - 1 \otimes v) \sum_{i+j=n-1} \sum_{k+l=n} u^i v^k \otimes u^j v^l,$$

et le produit de Chas–Sullivan est non nul sur E.

2. $\lambda = 1$. Dans ce cas un modèle minimal de l'espace de Borel E est donné par $\mathcal{M}_E = (\wedge(u, v, x), d)$ avec $|u| = |v| = 2$; $du = dv = 0$, $dx = u^{n+1} + v^{n+1}$. Dès lors, nous obtenons :

$$\mathfrak{M}_{LE} = \big(\wedge(u, v, x, \bar{u}, \bar{v}, \bar{x}), d\big) \quad \text{où} \quad d\bar{u} = d\bar{v} = 0 \text{ et } d\bar{x} = -(n+1)\big(u^n\bar{u} + v^n\bar{v}\big).$$

Par suite

$$\mathfrak{M}_{LE \times_E LE} = \big(\wedge(u, v, x, \bar{u}, \bar{v}, \bar{x}, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{x}), d\big),$$
$$\text{avec } d\bar{u} = d\bar{v} = 0, \quad d\bar{x} = -(n+1)\big(u^n\bar{u} + v^n\bar{v}\big), \quad d\tilde{u} = d\tilde{v} = 0, \quad d\tilde{x} = -(n+1)\big(u^n\tilde{u} + v^n\tilde{v}\big).$$

Un représentant de Sullivan $\mathfrak{M}_{Comp} : \mathfrak{M}_{LE} \longrightarrow \mathfrak{M}_{LE \times_E LE}$ de la composition des lacets libres $Comp : LE \times_E LE \longrightarrow LE$ est défini tel que :

$$\mathfrak{M}_{Comp} : \begin{cases} \bar{u} \mapsto \bar{u} + \tilde{u}, \bar{v} \mapsto \bar{v} + \tilde{v}, \\ \bar{x} \mapsto \bar{x} + \tilde{x} + \frac{n(n+1)}{2}(u^{n-1}\bar{u}\tilde{u} + v^{n-1}\bar{v}\tilde{v}). \end{cases}$$

L'application $\mathfrak{M}_E^{\otimes 2}$-linéaire de degré $2n-1$, $g : \mathfrak{M}_{E^I} \longrightarrow \mathfrak{M}_E^{\otimes 2}$ annoncée dans la proposition 2.1, est un cocycle (qui n'est pas un cobord) du complexe $(Hom_{\mathfrak{M}_E^{\otimes 2}}(\mathfrak{M}_{E^I}, \mathfrak{M}_E^{\otimes 2}), D)$ de degré d où $Dh = d \circ h - (-1)^{|h|} h \circ d$. Pour des raisons de degrés et de compatibilité aux différentielles, nous obtenons le candidat suivant :

$$g : \begin{cases} 1 \longmapsto 0 \\ \bar{u} \longmapsto -\sum_{i+j=n} v^i v'^j, \quad \bar{v} \longmapsto \sum_{k+l=n} u^i u'^j, \quad \bar{u}\bar{v} \longmapsto x - x', \quad \bar{x} \longmapsto 0 \\ \bar{u}^{\epsilon}\bar{v}^{\epsilon'}\bar{x}^k \longmapsto 0; \quad k \in \mathbb{N}^\star, \ \epsilon, \epsilon' \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

Par ailleurs, l'homomorphisme d'algèbres différentielles graduées $\mathfrak{M}_\sigma : \mathfrak{M}_{E^I} \longrightarrow \mathfrak{M}_E$ est défini par :

$$\mathfrak{M}_\sigma(u) = u = \mathfrak{M}_\sigma\big(u'\big), \quad \mathfrak{M}_\sigma(v) = v = \mathfrak{M}_\sigma\big(v'\big), \quad \mathfrak{M}_\sigma(x) = x = \mathfrak{M}_\sigma\big(x'\big) \quad \text{et} \quad \mathfrak{M}_\sigma(\bar{u}) = \mathfrak{M}_\sigma(\bar{v}) = \mathfrak{M}_\sigma(\bar{x}) = 0.$$

Remarquons que nous avons l'isomorphisme

$$H^\star(LX) \cong H\big(\wedge(u, v)/\big(u^{n+1} + v^{n+1}\big) \otimes \wedge(\bar{u}, \bar{v}, \bar{x}), \bar{d}\big)$$

où $\bar{d}$ est la différentielle obtenue par passage au quotient. Il s'en suit qu'une base de $H^\star(LX)$ est donnée par :

$$\big\{\big[u^i v^j \otimes \bar{1}\big], \big[u^k v^l \otimes \bar{u}\big], \big[u^p v^q \otimes \bar{v}\big], \big[u^r v^s \otimes \bar{u}\bar{v}\big], \big[u^a v^b \otimes \bar{u}\bar{v}\bar{x}\big]\big\}$$

avec $i, k, p, r, a \in \mathbb{N}$ et $0 \leq j, l, q, s, b \leq n$.

Un calcul de routine de Dlp sur chaqu'un des éléments de cette base nous permet de conclure dans ce cas que le produit de Chas–Sullivan est nul sur l'espace de Borel E.

Références

[1] M. Chas, D. Sullivan, String topology, Preprint, arXiv:math.GT/0107187.
[2] D. Chataur, L. Menichi, String topology of classifying spaces, J. Reine Angew. Math. 669 (2012) 1–45.
[3] Y. Félix, S. Halperin, J.-C. Thomas, Gorenstein spaces, Adv. Math. 71 (1988) 92–112.
[4] Y. Félix, S. Halperin, J.-C. Thomas, Rational Homotopy Theory, Springer-Verlag, 2001.
[5] Y. Félix, J.-C. Thomas, String topology on Gorenstein spaces, Math. Ann. 208 (2009) 417–452.
[6] K. Kuribayashi, L. Menichi, T. Naito, Derived string topology and the Eilenberg–Moore spectral sequence, Preprint, arXiv:math.AT/1211683, 2012.
[7] M. Mimura, H. Toda, Topology of Lie Groups I and II, Transl. Math. Monogr., vol. 91, American Mathematical Society, 1991.