C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 353 (2015) 203–208

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Analyse mathématique/Équations aux dérivées partielles

Profils locaux et problèmes elliptiques à plusieurs échelles avec défauts

Local profiles and elliptic problems at different scales with defects

Xavier Blanc [a], Claude Le Bris [b], Pierre-Louis Lions [c,d]

[a] *Univ. Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, laboratoire Jacques-Louis Lions, UMR 7598, UPMC, CNRS, F-75205 Paris, France*
[b] *École des Ponts & Inria, 77455 Champs-sur Marne cedex, France*
[c] *Collège de France, 11, place Marcelin-Berthelot, 75231 Paris cedex 05, France*
[d] *CEREMADE, Université Paris-Dauphine, place du Maréchal-de-Lattre-de-Tassigny, 75775 Paris cedex 16, France*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 9 octobre 2014
Accepté le 16 janvier 2015
Disponible sur Internet le 29 janvier 2015

Présenté par Alain Bensoussan

RÉSUMÉ

Nous présentons une approche possible pour l'approximation, à la fois à l'échelle microscopique et à l'échelle macroscopique, de la solution d'une équation elliptique dont le coefficient oscillant est un perturbation « locale » d'une fonction ayant des propriétés géométriques simples, par exemple une fonction périodique. Cette approximation nécessite de savoir déterminer un profil local, solution d'une équation analogue de l'équation du correcteur en théorie de l'homogénéisation. Nous étudions ici, dans différents cadres fonctionnels, le caractère bien posé de cette équation. Des questions reliées sont aussi évoquées.

ABSTRACT

We present a possible approach to approximate at both the coarse and fine scales the solution to an elliptic equation with oscillatory coefficient when this coefficient consists of a "nice", say periodic, function that is locally perturbed. The approach is based on a local profile, solution to an equation similar to the corrector equation in classical homogenization. The well-posedness of that equation is explored, in various functional settings depending upon the locality of the perturbation. Some related problems are discussed.

Abridged English version

Our motivation for this Note is a class of multiscale problems for which we aim to establish results similar to those of classical homogenization theory for the approximation of the oscillating solution at different orders. The specifics of the problems under consideration is that these problems present, at the small scale, a geometry that is typically a nice

Adresses e-mail : blanc@ann.jussieu.fr (X. Blanc), lebris@cermics.enpc.fr (C. Le Bris), lions@ceremade.dauphine.fr (P.-L. Lions).

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2015.01.003
1631-073X/

geometry (that is, amenable to classical techniques of homogenization, and we choose it periodic here) perturbed by a local modification of the structure, namely a defect. This defect might not modify the macroscopic behavior, that is, the homogenized solution. Nevertheless, it affects the solution locally, and at the small scale. Our purpose is to theoretically understand and efficiently compute the approximate behavior of the solution at the small scale and at the vicinity of the perturbation. The particular equation studied in this Note (and the works [6,7] in preparation) is a scalar elliptic equation (1). Other, nonlinear equations will be addressed in [16] and forthcoming works. The coefficient in that equation reads $a = a_{\text{per}} + b$ where a_{per} is a periodic function and b models a local perturbation. Determining the local behavior of the solution u^ε requires to determine the solution w to (2)–(3) below, which evidently is the analogue of the so-called corrector problem in classical homogenization. Establishing the well-posedness of (2)–(3) is the purpose of the works summarized in this Note. We successively consider $b \in L^r(\mathbb{R}^d)$ for different values of the exponent r. The Hilbertian case $r = 2$ has been addressed in a previous publication [5] using the Lax–Milgram Theorem and a regularization. The case $r < d$ can be understood using a representation of the solution and the classical Marcinkiewitz estimates on the Green function of the operator $-\operatorname{div}(a\nabla .)$. It is then easily proven that the solution w exists, as a superposition of the periodic classical corrector and a function that vanishes at infinity. The uniqueness, up to an additive constant of course, is a consequence of a classical Liouville-type Theorem. We address the more delicate case $r > d$ with a proof (actually essentially valid also for $r \le d$) that requires the additional assumption that the coefficient a is *sufficiently regular*. The proof is more intricate than when $r < d$ and involves i) estimations of the Green function in dyadic rings and ii) the classical result [1] on the Green function of the *periodic* operator $-\operatorname{div}(a_{\text{per}}\nabla .)$. We construct a solution w_p to (2)–(3), the gradient of which consists of the superposition of the gradient of the periodic corrector and a gradient in L^r. The sublinearity (3) indeed follows by application of the Sobolev inequalities which actually show Hölder continuity. Uniqueness is obtained by a separate argument. We are unfortunately unable to conclude on the general case of a perturbation b that only goes to zero at infinity, i.e. the case $r = \infty$. Our results are summarized in Theorem 1 of the French version. Various extensions of the above results are mentioned, in particular when the underlying, unperturbed microstructure is not periodic, but is some particular juxtaposition of two suitable periodic systems, see Theorem 2. The details of the proofs, as well as the study of related questions and the study of other, more difficult cases will be considered in forthcoming publications [6,7,16].

1. Introduction

1.1. Motivation

Nous étudions dans cette Note une classe de problèmes elliptiques à plusieurs échelles qui, en un sens que nous précisons plus loin, sont des problèmes pour lesquels la théorie de l'homogénéisation ne fournit pas une réponse assez complète pour les questions que nous souhaitons examiner. Par nature, la théorie de l'homogénéisation est en effet une théorie de la réponse macroscopique, qui, *additionnellement*, peut éventuellement fournir, dans certains cas, comme par exemple dans le célèbre cas périodique, des informations *locales* (i.e. à l'échelle petite, traditionnellement notée ε). Elle fournit aussi la ligne directrice pour des méthodes d'approximation numérique efficaces.

Dans les situations que nous étudions ici, la structure du matériau à cette petite échelle est typiquement une structure non idéale. On traite ici l'exemple prototypique d'une structure périodique perturbée localement par un « défaut » (mais d'autres structures plus générales, ou plus complexes, seront étudiées dans nos travaux). Il est alors particulièrement intéressant de comprendre le profil local de la solution au voisinage de ces défauts, afin, notamment, d'évaluer la réponse locale avec efficacité (c'est-à-dire avec un coût bien moins que proportionnel aux nombres de chargements considérés à l'échelle macroscopique, pour emprunter un langage issu de la mécanique). La théorie de l'homogénéisation qui, faut-il le rappeler ici, n'est pas conçue pour cela, ne suffit pas à la compréhension de ces questions.

Cette étude s'inscrit dans une série d'études amorcées en [5] (les résultats en seront très brièvement rappelés ici) qui se poursuivront avec plus de détails dans [6,7] pour ce qui concerne les équations elliptiques et les équations analogues, et dans [16] pour des équations, et donc des phénomènes mathématiques, complètement différents. La motivation de cette série d'études est présente en filigrane dans certains de nos travaux antérieurs [2–4] où nous avons exploré certaines structures non « parfaites » dans des problèmes d'homogénéisation. Signalons aussi que les résultats résumés dans cette Note ont été annoncés dans [15].

1.2. Le cadre de travail

Pour cette Note (et ce sera le cas pour les travaux [6,7]), nous nous focalisons sur un problème elliptique (scalaire pour simplifier) du type

$$-\operatorname{div}\big(a(x/\varepsilon)\nabla u^\varepsilon\big) = f \tag{1}$$

posé sur un domaine régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, avec des conditions au bord de Dirichlet homogènes, et avec un coefficient a dont on suppose qu'il vérifie toutes les propriétés qui rendent le problème elliptique bien posé. Pour éviter les spécificités de la dimension 2 (voir ce cas dans [6]), et parce que la dimension 1 est explicitement soluble donc facile, on supposera dans toute cette Note que $d \ge 3$. Une hypothèse importante, et non usuelle, est que nous serons dans la plupart des situations (pas toujours, voir ci-dessous) contraints de supposer ce coefficient *a régulier*. Bien que cette hypothèse soit clairement limitante du point de vue des applications, nous ne savons pas, dans l'état actuel de notre compréhension mathématique, comment nous en affranchir. On le verra ci-dessous.

Comme annoncé, la fonction a est prise comme la somme d'une fonction simple du point de vue géométrique, et d'une perturbation de cette fonction. Pour simplifier dans cette Note (sauf dans la section 5.1 ci-dessous), nous supposerons que la fonction sans perturbation est périodique. Nous considérons donc $a = a_{\mathrm{per}} + b$ avec a_{per} périodique et b une perturbation « locale » tendant vers 0 à l'infini ($|x| \longrightarrow +\infty$) en un certain sens. Nous supposerons a_{per} et b tous les deux bornés sur $\mathbb{R}^d$. L'idée de prendre une fonction non perturbée périodique assure qu'en l'absence de la perturbation, le problème (1) relève alors de techniques classiques d'homogénéisation, cf. par exemple [14]. On peut déterminer qualitativement le comportement asymptotique de la solution u^ε. Il est classique de démontrer que u^ε converge fortement dans $L^2(\Omega)$ et faiblement dans $H^1_0(\Omega)$, vers u^* solution de $-\operatorname{div}(A^*\nabla u^*) = f$. Il est bien connu que la matrice homogénéisée A^*, et, pour ce qui nous intéresse plus particulièrement ici, le comportement précisé de u^ε (i.e. à l'échelle 1 dans la topologie forte de $H^1_0(\Omega)$, et aussi localement à la petite échelle) s'obtiennent par résolution, pour tout vecteur $p \in \mathbb{R}^d$, du problème posé sur $\mathbb{R}^d$ dit *problème du correcteur*, $-\operatorname{div}(a_{\mathrm{per}}(y)(p + \nabla w_{p,\mathrm{per}}(y))) = 0$, où $w_{p,\mathrm{per}}$ est périodique, donc, en particulier, sous-linéaire à l'infini, et unique à une constante additive près. Cette connaissance théorique peut se traduire dans des techniques d'approximation numériques maintenant bien établies. On notera que certaines de ces techniques, *s'inspirant* des développements théoriques, permettent d'ailleurs l'approximation pratique de u^ε pour ε non asymptotiquement petit, et donc plus proche des applications réelles, voir, e.g., [10]. L'objectif est, en la présence de la perturbation b, de parvenir à des techniques théoriques et numériques d'approximation similaires.

Le cadre idéal pour traiter la question ci-dessus serait de pouvoir considérer le cas où la perturbation tend vers 0 à l'infini, au sens mathématique du terme. Malheureusement, nous ne savons pas traiter la question à ce degré de généralité et considérons donc $b \in L^r(\mathbb{R}^d)$, pour un certain exposant $1 \le r < +\infty$, une grande valeur de l'exposant r permettant donc de s'approcher intuitivement du cas le plus général voulu.

Quand le coefficient oscillant a_{per} est remplacé par le coefficient perturbé $a = a_{\mathrm{per}} + b$ pour $b \in L^r$, il est classique de réaliser que le comportement macroscopique de u^ε mentionné ci-dessus n'est pas modifié. On le montrera en détail dans [6]. C'est localement, au voisinage de l'origine et à l'échelle ε, que le comportement change. Le comprendre nécessite de considérer le problème

$$-\operatorname{div}\big(a(p + \nabla w_p)\big) = 0 \tag{2}$$

analogue du problème du correcteur, où cette fois w_p n'est plus nécessairement périodique, mais dont on impose qu'il est sous-linéaire à l'infini :

$$\frac{w_p(x)}{1 + |x|} \xrightarrow{|x| \to \infty} 0, \tag{3}$$

puisqu'on s'attend, par le classique développement à deux échelles, à ce que $u^\varepsilon - u^* \approx \varepsilon \sum_{i=1}^d w_{e_i}(./\varepsilon)\partial_i u^*$ tende vers zéro avec ε. Dans [5], nous avons démontré, sous l'hypothèse $b \in L^2(\mathbb{R}^d)$ (et sans hypothèse de régularité particulière sur a_{per}), le caractère bien posé de cette équation : elle admet alors une solution unique (à constante additive près), et cette solution est de la forme $w_p = w_{p,\mathrm{per}} + \tilde{w}_p$ où $w_{p,\mathrm{per}}$ est la solution périodique du problème périodique non perturbé et où $\nabla \tilde{w}_p$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^d)$. La preuve est une application directe du Lemme de Lax–Milgram, une fois l'équation écrite en terme de la fonction inconnue $\tilde{w}_p$ (voir (4) ci-dessous) et régularisée, par l'addition d'un terme d'ordre zéro, de façon classique. Ce résultat d'existence d'une solution w_p convenable se révèle alors central pour notre objectif d'approximation. On peut alors utiliser ce « *profil* » w_p pour approcher u^ε par une formule de type deux échelles, et ceci à la petite échelle, au voisinage du défaut, i.e. de l'origine. Tous les détails sont donnés dans [5]. L'objet principal de cette Note est l'étude du problème (2)–(3) pour $b \in L^r(\mathbb{R}^d)$ avec, cette fois, r non nécessairement égal à 2.

2. Cas d'un défaut L^r, $1 \le r < d$

Comme résumé ci-dessus dans le cas $r = 2$, on introduit $\tilde{w}_p = w_p - w_{p,\mathrm{per}}$ où $w_{p,\mathrm{per}}$ est la solution périodique de $-\operatorname{div}(a_{\mathrm{per}}(p + \nabla w_{p,\mathrm{per}})) = 0$, de sorte que (2) se réécrit

$$-\operatorname{div}(a\nabla \tilde{w}_p) = \operatorname{div}\big(b(p + \nabla w_{p,\mathrm{per}})\big). \tag{4}$$

Nous supposerons (pour simplifier) que $\nabla w_{p,\mathrm{per}} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, ce qui est par exemple obtenu par régularité elliptique quand a_{per} est de régularité hölderienne $C^{0,\alpha}$ pour un certain $\alpha \in (0,1)$ (voir par exemple le théorème 8.32 de [12]). Considérons la fonction de Green de l'opérateur $-\operatorname{div}(a\nabla .)$, à savoir la solution $G(x, y)$, tendant vers 0 à l'infini en un sens faible, de $-\operatorname{div}_x(a\nabla_x G(x, y)) = \delta(x - y)$. L'existence de cette solution est obtenue facilement par approximation (ajout de αG, pour $\alpha > 0$ petit à l'équation, et limite $\alpha \longrightarrow 0$) et son unicité par un Théorème de Liouville [17]. Il est alors classique que, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$,

$$\big\|G(., y)\big\|_{L^{d/(d-2),\infty}} + \big\|\nabla_x G(., y)\big\|_{L^{d/(d-1),\infty}} \le C(d), \tag{5}$$

où $C(d)$ est une constante qui ne dépend que de la dimension ambiante d. On a bien sûr désigné par $L^{q,\infty}$ l'espace L^q faible, de Marcinkiewitz, défini par la quasi norme $|f|_{L^{q,\infty}} := \sup_{s>0}(s\,\mathrm{meas}\,\{x; |f(x)| > s\}^{1/q})$. On remarque enfin que (5) est aussi vrai en permutant les rôles de x et y. Une fois (5) établi et ceci remarqué, on écrit la solution de (4) sous la forme $\tilde{w}_p(x) = \int G(x,y)\,\mathrm{div}(b(p + \nabla w_{p,\mathrm{per}})) = -\int \nabla_y G(x,y)(b(p + \nabla w_{p,\mathrm{per}}))$, d'où, pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$, en utilisant l'inégalité de Hölder généralisée aux espaces de Lorentz,

$$\left|\tilde{w}_p(x)\right| \le \left\|\nabla_y G(x,y)\right\|_{L^{d/(d-1),\infty}} \left\|b(p + \nabla w_{p,\mathrm{per}})\right\|_{L^{d,1}}. \tag{6}$$

On utilise alors l'interpolation de $L^{d,1}$ entre $L^r = L^{r,r}$ et L^∞, pour $r < d$, pour contrôler le dernier facteur. On obtient ainsi une borne L^∞ sur $\tilde{w}_p$. En fait, on a mieux. On remarque d'abord que la même formule de représentation de la solution par fonction de Green montre que, si $-\mathrm{div}(a\nabla v) = \mathrm{div}(h)$, où $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est une fonction régulière à support compact, alors (à constante additive près) la fonction v tend vers 0 à l'infini. En effet, on sait (voir [13]) que $G(x,y) \longrightarrow 0$ quand $|x-y| \longrightarrow \infty$. En utilisant cela, et l'inégalité (6), on procède alors par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^{d,1}(\mathbb{R}^d)$ pour prouver la convergence de $\tilde{w}_p$ vers 0 à l'infini. L'unicité (toujours à constante additive près) de $\tilde{w}_p$, et donc de w_p, est obtenue par un résultat classique de type Théorème de Liouville, [17] : le coefficient a est borné, et la solution $\tilde{w}_p$ tendant vers 0 à l'infini, elle est bornée, donc unique.

Remarque 1. On remarquera que la preuve ci-dessus

- n'utilise en fait pas la périodicité de a_{per} (ni son éventuelle régularité), mais seulement le fait qu'on connaît l'existence et l'unicité d'une solution à gradient borné en l'absence de perturbation,
- établit la convergence de $\tilde{w}_p$ vers 0 à l'infini, ce qui est le point essentiel puisqu'il prouve *a fortiori* la sous-linéarité de w_p, mais ne démontre pas que $\nabla\tilde{w}_p \in L^r$. Ceci proviendra, sous des hypothèses supplémentaires et avec une utilisation explicite de la périodicité, de la preuve donnée dans la section suivante, aussi applicable à $r < d$.

3. Cas d'un défaut L^r, r quelconque $< +\infty$

On démontre tout d'abord le résultat suivant. Des décroissances ponctuelles de ce type sont bien connues dans le cas du laplacien, ou pour un opérateur de type $-\mathrm{div}(a\nabla\cdot)$ avec a régulier et périodique [8]. Nous donnons ici une généralisation, sous une forme intégrée localement, au cas d'un a seulement borné, et non nécessairement périodique.

Lemme 1. *Pour tout $1 \le q \le 2$, il existe une constante C telle que, pour tout $R > 0$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction de Green G, solution de $-\mathrm{div}_x(a\nabla_x G(x,y)) = \delta(x-y)$ vérifie*

$$\int_{B_{2R}\setminus B_R} \left|\nabla_y G(x,y)\right|^q \mathrm{d}y \le \frac{C}{R^{d(q-1)-q}}, \tag{7}$$

$$\int_{B_{2R}\setminus B_R} \left|\nabla_x \nabla_y G(x,y)\right|^q \mathrm{d}y \le \frac{C}{R^{d(q-1)}}, \tag{8}$$

où on a noté $B_{2R}\setminus B_R = \{R \le |x-y| \le 2R\}$.

Éléments de preuve. On remarque tout d'abord que, pour établir (7), il suffit de prouver la même estimation avec $\nabla_x G(x,y)$, à savoir

$$\int_{B_{2R}\setminus B_R} \left|\nabla_x G(x,y)\right|^q \mathrm{d}y \le \frac{C}{R^{d(q-1)-q}}, \tag{9}$$

puis de procéder par symétrie. De plus, la preuve esquissée ci-dessous montre que l'on utilise seulement $-\mathrm{div}_x(a\nabla_x G(x,y)) = 0$ en dehors de $x = y$, et donc, en dérivant cette équation, on peut appliquer la même preuve à $\nabla_y G(x,y)$, ce qui permet de déduire (8) de l'inégalité (9). Il suffit donc de démontrer (9). Cette estimation est une conséquence de l'inégalité dite de Caccioppoli (voir par exemple [11, Proposition 2.1, p. 76]) : *si a est elliptique et borné, et si $-\mathrm{div}(a\nabla u) = 0$ dans la boule B_{4R}, alors $\int_{B_R} |\nabla u|^2 \le \frac{C}{R^2}\int_{B_{2R}} |u|^2$, où la constante C ne dépend que de a.* En utilisant cette inégalité, on établit tout d'abord l'estimation voulue dans le cas particulier $q = 2$, en recouvrant la couronne $B_{2R}\setminus B_R$ de boules de rayons $3R/2$, et en utilisant une version intégrée de l'estimation ponctuelle classique (voir [8,9,13]) sur la fonction de Green elle-même $|G(x,y)| \le \frac{C}{|x-y|^{d-2}}$, vraie dès que le coefficient est borné. On étend ensuite l'estimation (9) pour $q = 1$ par simple application de l'inégalité de Cauchy–Schwarz. Par interpolation, (9) est donc valide pour tout $1 \le q \le 2$. □

Muni du Lemme 1, on démontre maintenant que, pour a_{per} périodique et de régularité hölderienne $C^{0,\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, $r \ge 2$ et $b \in L^r(\mathbb{R}^d)$, la solution de (4) est telle que $\nabla\tilde{w}_p \in L^r(\mathbb{R}^d)$. Par un raisonnement classique, il s'ensuivra la sous-linéarité (3).

On représente (formellement, mais il est ensuite simple de donner un sens à cela par approximation et régularisation) la solution $\tilde{w}_p$ de (4) par $\tilde{w}_p(x) = \int \nabla_y G(x, y) b(y)(p + \nabla w_{p,\mathrm{per}}(y))\, \mathrm{d}y$. En prenant le gradient des deux membres, et en utilisant la borne (8) sur des couronnes concentriques pour q tel que $1/q + 1/r = 1$ (avec $r \geq 2$), on montre aisément que $\nabla \tilde{w}_p \in L^\infty$. On écrit alors (4) sous la forme $-\operatorname{div}(a_{\mathrm{per}} \nabla \tilde{w}_p) = \operatorname{div}(b \nabla \tilde{w}_p) + \operatorname{div}(b(p + \nabla w_{p,\mathrm{per}}))$. Le résultat de [1] (et c'est ici que la périodicité du coefficient a_{per}, ainsi que sa régularité hölderienne $C^{0,\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, sont utiles) permet alors d'obtenir l'estimation $\|\nabla \tilde{w}_p\|_{L^r} \leq C \|b\|_{L^r} (\|\nabla \tilde{w}_p\|_{L^\infty} + \|p + \nabla w_{p,\mathrm{per}}\|_{L^\infty})$ et de conclure à l'existence de la solution voulue.

Dans le cas $r < 2$, $b \in L^r \cap L^\infty$, donc $b \in L^2$. Le résultat que l'on vient de prouver, ou bien ceux de [5], montrent que $\nabla \tilde{w}_p$ existe dans L^2, ce qui suffit à démontrer l'existence de la solution sous-linéaire recherchée. On réécrit alors l'équation sous la forme $-\operatorname{div}(a_{\mathrm{per}} \nabla \tilde{w}_p) = \operatorname{div}(b\, \nabla \tilde{w}_p) + \operatorname{div}(b(p + \nabla w_{p,\mathrm{per}}))$. Comme $b \nabla \tilde{w}_p \in L^{2r/(r+2)}$ et $2r/(r+2) \leq r$, on déduit alors des résultats de [1] que $\nabla \tilde{w}_p \in L^r$.

L'unicité est obtenue par le raisonnement suivant : si on a deux solutions $w_p = w_{p,\mathrm{per}} + \tilde{w}_p$ et $v_p = v_{p,\mathrm{per}} + \tilde{v}_p$, avec $w_{p,\mathrm{per}}$, $v_{p,\mathrm{per}}$ périodiques et $\tilde{w}_p, \tilde{v}_p \in L^r$, on commence par translater le problème à l'infini pour éliminer $\tilde{v}_p$ et $\tilde{w}_p$. On en déduit que $\operatorname{div}(a_{\mathrm{per}} \nabla w_{p,\mathrm{per}}) = \operatorname{div}(a_{\mathrm{per}} v_{p,\mathrm{per}})$, donc $\nabla w_{p,\mathrm{per}} = \nabla v_{p,\mathrm{per}}$. Ainsi, $u = w_p - v_p$ vérifie $-\operatorname{div}(a_{\mathrm{per}} \nabla u) = \operatorname{div}(b \nabla u)$, et $\nabla u \in L^r$. De plus, on sait que $b \in L^r$, donc $b \nabla u \in L^{r/2}$. Les résultats de [1] impliquent donc que $\nabla u \in L^{r/2}$. En itérant, on obtient $\nabla u \in L^{r/n}$ pour tout $n \leq r$, et donc finalement une solution dans L^2 de $-\operatorname{div}(a \nabla u) = 0$, laquelle est nécessairement constante par application du résultat d'unicité de [5].

Les résultats obtenus se résument dans le Théorème 1.

Théorème 1. *Supposons que $a = a_{\mathrm{per}} + b$ avec a_{per} périodique borné et de classe $C^{0,\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, $b \in L^r \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ pour un certain $1 \leq r < +\infty$, et aussi de classe $C^{0,\alpha}$. Alors le problème (2)–(3) admet une solution w_p de la forme $w_p = w_{p,\mathrm{per}} + \tilde{w}_p$, avec $\nabla \tilde{w}_p \in L^r \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Une telle solution est unique à l'ajout d'une constante près. Dans le cas $r < d$, la régularité hölderienne de a_{per} et b et la périodicité de a_{per} ne sont pas nécessaires, et w_p converge vers $w_{p,\mathrm{per}}$ à l'infini.*

4. Remarques

En plus des remarques ci-dessus, les faits suivants sont à souligner :

– il est naturel que le cas $r = d$ délimite une séparation entre deux comportements différents ; ceci n'est pas un artifice des techniques de preuve utilisées. En effet, supposons à l'extrême que l'équation (4) s'écrive $-\Delta \tilde{w}_p = \operatorname{div}(b\, p)$. On a donc $\tilde{w}_p \propto \int \frac{x-y}{|x-y|^d} b(y)\, \mathrm{d}y$, ce qui suffit à comprendre que le cas critique est $b(y) \propto |y|^{-1}$, qui correspond à une criticité de l'espace L^d. Pour $r < d$, on a, comme le montre la preuve, une solution $\tilde{w}_p$ tendant vers 0 à l'infini, alors que pour $r > d$, on ne peut pas s'attendre à avoir génériquement une solution bornée ;
– les questions abordées ici sont très reliées, bien sûr, à la théorie des opérateurs de Calderon–Zygmund, et à la question de savoir à quelles conditions les opérateurs linéaires du type de celui défini implicitement par l'équation (4), et associant $\nabla \tilde{w}_p$ à b, agissent depuis, et vers, les espaces L^r, $1 \leq r < +\infty$, L^∞, ou BMO ;
– une preuve alternative d'existence et d'unicité, indépendante des preuves précédentes et bien plus courte, est possible dans le cas où la perturbation $b \in L^r$ est petite dans L^∞. On effectue une estimée a priori de $\nabla \tilde{w}_p$ dans L^r à partir de (4) que l'on écrit sous la forme $-\operatorname{div}(a_{\mathrm{per}} \nabla \tilde{w}_p) = \operatorname{div}(b \nabla \tilde{w}_p) + \operatorname{div}(b(p + \nabla w_{p,0}))$, où $w_{p,0}$ est la solution pour le problème non perturbé avec a_{per}. Pour $\|b\|_{L^\infty}$ petite, cette estimée permet de construire une solution par point fixe, sans utiliser aucune condition sur r ou propriété de a_{per} autre que l'ellipticité. L'unicité suit.

5. Problèmes reliés et autres questions

5.1. Autres situations géométriques

Un cas intéressant, dont l'étude est très reliée aux arguments présentés ci-dessus, est le cas d'un « bi-cristal » consistant en la juxtaposition de deux géométries périodiques, l'une dans le demi-espace $\{x_1 < 0, x_2, \dots, x_d\}$ et l'autre dans le demi-espace $\{x_1 > 0, x_2, \dots, x_d\}$, quand on suppose en outre que les deux cellules de périodicité de part et d'autre de l'interface $x_1 = 0$ sont alignées de manière cartésienne et en rapport rationnel, mais non trivial. Un cas en un sens générique est le cas où la cellule de périodicité pour $x_1 < 0$ est de la forme $Q_- = [0, R_1] \times [0, R_2] \times \ldots \times [0, R_d]$, alors que celle pour $x_1 > 0$ est de la forme $Q_+ = [0, S_1] \times [0, S_2] \times \ldots \times [0, S_d]$ avec $S_k / R_k \in \mathbb{Q}$ pour tout $2 \leq k \leq d$. On suppose, de plus, que le coefficient a diffère selon que $x_1 < 0$ ou $x_1 > 0$ (par exemple $S_1 \neq R_1$). Quitte à choisir un multiple adéquat dans les dimensions $k \geq 2$, la situation est donc une situation d'un « fond » périodique dans ces dimensions, commun aux deux demi-espaces, et de deux fonctions périodiques différentes dans la direction $k = 1$. On comprend heuristiquement la similitude avec la situation d'un défaut localisé « monodimensionnel ». En termes de coefficient a, cette situation se traduit par $a = a_{\mathrm{per},1,2} + b$ où $a_{\mathrm{per},1,2}$ est un coefficient « périodique » à gauche et à droite, reconstitué selon la géométrie définie ci-dessus. Dans ce contexte particulier, le cas d'une perturbation b nulle est déjà intéressant (on renvoie à [6] pour le cas plus général $b \in L^r$). On peut, dans ce cas, par des arguments proches de ceux développés ci-dessus, mais un peu plus techniques, construire la solution w_p du problème (2)–(3) : elle est périodique, de la période commune, dans les dimensions $k \geq 2$, et est une modification, en fait disparaissant exponentiellement vite à l'infini dans les directions $x_1 \longrightarrow \pm\infty$, des solutions périodiques *différentes* à gauche et à droite. On obtient ainsi le résultat suivant.

Théorème 2. *Le résultat du Théorème 1 s'étend à la solution w_p de $-\operatorname{div}(a\,(p+\nabla w_p)) = -\operatorname{div}(a^* p)$ où $a^*(x) = a^*_{\mathrm{per},1}$ si $x_1 < 0$ et $a^*(x) = a^*_{\mathrm{per},2}$ si $x_1 > 0$, sous les mêmes conditions. Les propriétés indiquées s'entendent dans les directions $x_1 \longrightarrow -\infty$ (resp. $x_1 \longrightarrow +\infty$), et les fonctions sont périodiques dans les directions x_k, $2 \le k \le d$. Lorsque $b \equiv 0$, w_p diffère en fait des correcteurs périodiques par une correction exponentiellement décroissante quand $|x_1| \longrightarrow \infty$.*

Il est à noter que, si une deuxième direction, disons $k = 2$, vient en plus à différer, au sens où $S_2/R_2 \notin \mathbb{Q}$, la situation devient incomparablement plus complexe, puisque l'on voit surgir, dans la direction transverse, des phénomènes quasi-périodiques. La nature mathématique du problème, et les techniques employées, s'en trouvent considérablement modifiées, et l'on renvoie à [6] pour le détail. Le cas où l'interface séparant les deux structures périodiques n'est plus alignée avec les deux cellules de périodicité, ou celui où les deux cellules ne sont pas elles-mêmes alignées (situation non cartésienne, par exemple), sont, sauf miracle géométrique, de difficulté équivalente.

5.2. Autres équations

Le cas examiné ici d'une équation scalaire elliptique sous forme divergence est clairement le plus simple qu'on puisse considérer. Il est vraisemblable, bien que nous n'ayons à ce jour pas examiné tous les détails, que nos arguments et résultats s'adaptent *mutatis mutandis* aux cas d'une équation elliptique non sous forme divergence, d'une équation semilinéaire elliptique, ou d'un système elliptique. On peut sans doute aussi (mais nous ne l'avons pas encore fait), dans ces situations encore « simples », considérer des données singulières (par exemple dans le second membre de (1)) qui exacerberont les différences et ce même à l'échelle 1, entre les situations (type périodique) sans défaut, et celles avec défaut, puis étudier à l'aide des outils ci-dessus le comportement des solutions.

A contrario, l'extension à des équations dépendantes du temps (on pense par exemple à l'équation des ondes, même linéaire) risque d'être significativement plus ardue.

Le cas d'équations complètement non linéaires, comme les équations de Hamilton–Jacobi, est lui aussi délicat et amène des résultats potentiellement radicalement différents de ceux du cadre elliptique. Un exemple élémentaire montrant la différence de comportements est fourni par l'équation monodimensionnelle suivante : la solution u^ε de $u^\varepsilon + |(u^\varepsilon)'| = b(x/\varepsilon)$ pour $b \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $b \le 0$, $b(0) < 0$, $b(0) = \inf_{\mathbb{R}} b$, converge uniformément vers $\bar{u}$, solution de $\bar{u}(x) + |(\bar{u})'(x)| = 0$ pour $x \ne 0$ avec $\bar{u}(0) = b(0)$. Cette solution vaut $\bar{u}(x) = b(0)\,\mathrm{e}^{-|x|}$ et est donc différente de $u^\varepsilon = u = 0$, la solution obtenue en l'absence de b. À l'échelle 1, la solution est donc modifiée par le seul défaut $b(x/\varepsilon)$ (pourtant à support compact !), contrairement au cas elliptique considéré dans cette Note. De tels phénomènes seront étudiés dans [6,7,16] et dans des travaux ultérieurs.

Références

[1] M. Avellaneda, F.H. Lin, Compactness methods in the theory of homogenization, Commun. Pure Appl. Math. 40 (6) (1987) 803–847.

[2] X. Blanc, C. Le Bris, P.-L. Lions, A definition of the ground state energy for systems composed of infinitely many particles, Commun. Partial Differ. Equ. 28 (1–2) (2003) 439–475.

[3] X. Blanc, C. Le Bris, P.-L. Lions, Une variante de la théorie de l'homogénéisation stochastique des opérateurs elliptiques, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006) 711–724.

[4] X. Blanc, C. Le Bris, P.-L. Lions, Stochastic homogenization and random lattices, J. Math. Pures Appl. (9) 88 (2007) 34–63.

[5] X. Blanc, C. Le Bris, P.-L. Lions, A possible homogenization approach for the numerical simulation of periodic microstructures with defects, Milan J. Math. 80 (2012) 351–367.

[6] X. Blanc, C. Le Bris, P.-L. Lions, Local profiles for elliptic problems at different scales: defects in, and interfaces between matching periodic structures, en préparation.

[7] X. Blanc, C. Le Bris, P.-L. Lions, en préparation.

[8] X. Blanc, F. Legoll, A. Anantharaman, Asymptotic behaviour of Green functions of divergence form operators with periodic coefficients, Appl. Math. Res. Express (1) (2013) 79–101.

[9] G. Dolzmann, S. Müller, Estimates for Green's matrices of elliptic systems by L^p theory, Manuscr. Math. 88 (2) (1995) 261–273.

[10] Y. Efendiev, T. Hou, Multiscale Finite Element Method, Theory and Applications, Surv. Tutor. Appl. Math. Sci., vol. 4, Springer, New York, 2009.

[11] M. Giaquinta, Multiple Integrals in the Calculus of Variations and Nonlinear Elliptic Systems, Princeton University Press, 1983.

[12] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Reprint of the 1998 edition, Class. Math., Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[13] M. Grüter, K.O. Widman, The Green function for uniformly elliptic equations, Manuscr. Math. 37 (3) (1982) 303–342.

[14] V.V. Jikov, S.M. Kozlov, O.A. Oleinik, Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals, Springer-Verlag, 1994.

[15] P.L. Lions, Cours 2013–2014 au Collège de France, enregistrement vidéo disponible sur www.college-de-france.fr/site/pierre-louis-lions.

[16] P.-L. Lions, P. Souganidis, en préparation.

[17] J. Moser, On Harnack's theorem for elliptic differential equations, Commun. Pure Appl. Math. 14 (3) (1961) 577–591.