C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 353 (2015) 235–240

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Partial differential equations

# Structure theorems for 2D linear and nonlinear Schrödinger equations

## *Théorèmes de structure pour les équations de Schrödinger linéaire et non linéaire en dimension deux d'espace*

Hajer Bahouri

*Université Paris-Est Créteil, UMR 8050, 61, avenue du Général-de-Gaulle, 94010 Créteil cedex, France*

A R T I C L E   I N F O

*Article history:*
Received 2 December 2014
Accepted after revision 21 January 2015
Available online 28 January 2015

Presented by Jean-Michel Bony

A B S T R A C T

We investigate the behavior of solutions to 2D nonlinear Schrödinger equations with exponential growth, where the Orlicz norm plays a crucial role. The approach we adopted in this paper consists in comparing the evolution of oscillations and concentration effects displayed by sequences of solutions to linear and nonlinear Schrödinger equations associated with the same sequence of Cauchy data, up to small remainder terms both in Strichartz and Orlicz norms. The analysis we conducted in this work emphasizes that the nonlinear effect highlighted in this framework only arises from the **1**-oscillating component of the sequence of the Cauchy data. This phenomenon is strikingly different from those obtained for critical semilinear dispersive equations, such as for instance in [2,13], where all the oscillating components induce the same nonlinear effect, up to a change of scale.



R É S U M É

On étudie le comportement des solutions de l'équation de Schrödinger non linéaire à croissance exponentielle, où la norme d'Orlicz joue un rôle crucial. L'approche qu'on a adoptée dans ce travail consiste à comparer des suites de solutions des équations de Schrödinger linéaires et non linéaires issues de la même suite de données de Cauchy, moyennant un terme de reste petit à la fois en normes de Strichartz et d'Orlicz. Cette analyse, qui est basée sur les décompositions en profils, met en lumière le rôle distingué de la composante **1**-oscillante de la suite des données initiales. Ce phénomène est complètement différent de ceux obtenus dans le cadre des équations semi-linéaires dispersives critiques, comme dans [2,13], où toutes les composantes oscillantes créent le même effet non linéaire, à un changement d'échelle près.



*E-mail address:* hbahouri@math.cnrs.fr.

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2015.01.009
1631-073X/

## Version française abrégée

On s'intéresse dans cette note à l'équation de Schrödinger non linéaire :

$$\text{(NLS)}\quad \begin{cases} \mathrm{i}\partial_t u + \Delta u = f(u), \\ u_{|t=0} = u_0 \in H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^2), \end{cases}$$

où la fonction $u$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ dépend de $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, et où la non-linéarité $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est définie par

$$f(u) = \phi_p(\sqrt{4\pi}|u|)u \quad \text{avec } p > 1$$

et $\phi_p(s) = \mathrm{e}^{s^2} - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{s^{2k}}{k!}$. Rappelons que les solutions de (NLS) satisfont formellement la conservation de la masse et du Hamiltonien :

$$M(u,t) = \int_{\mathbb{R}^2} \big|u(t,x)\big|^2 \mathrm{d}x = M(u_0) \quad \text{et} \quad H(u,t) = \int_{\mathbb{R}^2} \big(\big|\nabla u(t,x)\big|^2 + F_p\big(u(t,x)\big)\big)\,\mathrm{d}x = H(u_0),$$

où $F_p(u) = \frac{1}{4\pi}\phi_{p+1}(\sqrt{4\pi}|u|)$. Les questions d'existence globale et de scattering pour ce problème de Cauchy ont été traitées dans [10,4,11], à la fois dans les cas sous-critique et critique. Ici, la notion de criticalité dépend de la taille du hamiltonien $H(u_0)$ par rapport à 1. Plus précisément, le problème de Cauchy concerné est dit sous-critique si $H(u_0) < 1$, critique si $H(u_0) = 1$ et supercritique si $H(u_0) > 1$.

Dans ce travail, nous abordons la question de l'étude qualitative des solutions de (NLS) : basée sur les décompositions en profils, l'approche qu'on a adoptée consiste à comparer des suites de solutions des équations de Schrödinger linéaire et non linéaire issues de la même suite de données de Cauchy, moyennant un terme de reste petit à la fois en normes de Strichartz et d'Orlicz. La norme de Strichartz dont il est question dans cette note est définie comme suit :

$$\|v\|_{ST(\mathbb{R})} := \big(\|v\|_{L^4(\mathbb{R},L^4(\mathbb{R}^2))} + \|\nabla v\|_{L^4(\mathbb{R},L^4(\mathbb{R}^2))}\big). \tag{1}$$

Celle d'Orlicz en étroite relation avec l'inégalité de Trudinger–Moser (voir [14,17]) :

$$\sup_{\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \le 1} \int_{\mathbb{R}^2} \big(\mathrm{e}^{4\pi|u(x)|^2} - 1\big)\,\mathrm{d}x = \kappa < \infty, \tag{2}$$

est spécifique au cadre exponentiel et intervient dans notre travail à travers l'injection de Sobolev :

$$H^1\big(\mathbb{R}^2\big) \hookrightarrow L^{\phi_p}\big(\mathbb{R}^2\big), \quad \forall p \ge 1, \tag{3}$$

où $L^{\phi_p}(\mathbb{R}^2)$, désignant l'espace d'Orlicz associé à la fonction $\phi_p$ (pour une présentation complète des espaces d'Orlicz, nous renvoyons le lecteur à [15]), est muni de la norme :

$$\|u\|_{L^{\phi_p}(\mathbb{R}^2)} = \inf\left\{\lambda > 0,\ \int_{\mathbb{R}^2} \phi_p\left(\frac{|u(x)|}{\lambda}\right)\mathrm{d}x \le \kappa\right\}. \tag{4}$$

Soulignons que l'inégalité de Trudinger–Moser (2) est optimale. Cependant, si $\beta \in [0, 4\pi[$ et $q \ge 2$, alors il existe une constante $C(\beta,q)$ telle que :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{\beta|u(x)|^2}\big|u(x)\big|^q \mathrm{d}x \le C(\beta,q)\int_{\mathbb{R}^2}\big|u(x)\big|^q dx, \quad \forall u \in H^1\big(\mathbb{R}^2\big) \text{ satisfaisant } \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \le 1. \tag{5}$$

L'analyse que nous avons menée dans ce travail met en evidence le fait que l'effet non linéaire dans le cadre d'une non-linéarité à croissance exponentielle ne provient que de la composante **1**-oscillante de la suite des données de Cauchy, ce qui correspond en gros à la troncature en fréquences de taille 1 de la suite des données initiales (pour une définition plus précise de cette notion, consulter [8]). Cet effet est produit à la fois dans les cas sous-critique et critique, ce qui relance le débat dans l'analyse des solutions des équations semi-linéaires dispersives sous-critiques, entreprise par exemple dans [9]. Il est classique que les théorèmes de structure non linéaires fournissent des informations cruciales telles que des estimations a priori des solutions (voir par exemple [2] pour d'autres applications). Pour mener à bien l'étude qualitative des solutions de (NLS), nous avons été amenés à développer une décomposition en profils des suites de solutions de l'équation de Schrödinger linéaire, moyennant un terme de reste petit en normes à la fois de Strichartz et d'Orlicz. Il s'est avéré que, même dans le cas linéaire, la composante **1**-oscillante joue un rôle distingué. En fait, la composante **1**-oscillante engendre un seul type d'éléments, dont les normes de Strichartz et d'Orlicz sont toutes les deux significatives, tandis que la composante étrangère à l'échelle **1**, qui est en gros constituée des basses et hautes fréquences de la suite des données initiales (voir [8] pour plus de détails), donne naissance à deux types d'éléments très différents. Pour le premier type, il n'y a que la norme de Strichartz qui est significative et, inversement, pour le second type, il n'y a que la norme d'Orlicz qui est significative. Un des arguments clés de ce résultat repose sur les estimations de Strichartz précisées faisant intervenir les espaces de Bourgain introduits dans [7]. Nous renvoyons à la version en anglais ci-dessous pour les énoncés précis et les idées de preuve de nos résultats.

Rappelons que, depuis les travaux des références [6,16,2,13], les décompositions en profils sont utilisées avec beaucoup de succès dans des contextes très variés, mais toujours relevant de problèmes invariants par scaling. Dans ce travail, nous sommes confrontés à des équations sans invariances par scaling où deux normes distinctes jouent un rôle crucial. Comme il a été souligné ci-dessus, deux types d'éléments interviennent dans notre analyse. Ces éléments ont en fait des comportements très différents dans l'espace des fréquences : le premier type est localisé en fréquences alors que le second est étalé (voir [5] pour plus de détails). La majeure difficulté dans ce travail a été de développer une stratégie permettant d'extraire des éléments de natures très différentes.

## 1. Introduction

In this work, we investigate the feature of solutions to nonlinear Schrödinger equations (NLS). These equations with exponential growth arise in 3D nonlinear optics problems and describe the propagation of the laser beams in different media (see for instance [12]). Note that the case $p = 1$ is not covered by our results. Actually, our analysis relies among others on the compactness of the embedding of $H^1_{\rm rad}(\mathbb{R}^2)$ into $L^q(\mathbb{R}^2)$ for $2 < q < \infty$. Recall that the questions of global well-posedness and scattering for the associated Cauchy problem have been dealt with in [10,4,11] both in subcritical and critical regimes. Here, as recalled above, the notion of criticality is related to the size of the initial Hamiltonian $H(u_0)$ with respect to 1.

In order to investigate the nonlinear effect in the Cauchy problem (NLS), we are led to establish a structure theorem for the linear Schrödinger equation

$$(\mathrm{S})\quad \begin{cases} \mathrm{i}\partial_t v + \Delta v = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \\ v_{|t=0} = v_0 \in H^1_{\rm rad}(\mathbb{R}^2), \end{cases}$$

both in the framework of Strichartz and Orlicz norms defined by (1) and (4). To state our results in a clear way, let us start by recalling some objects introduced in [3]:

**Definition 1.** We shall designate by scale any sequence $\underline{\alpha} := (\alpha_n)_{n\geq 0}$ of positive real numbers going to infinity and by profile any function $\psi$ belonging to the set

$$\mathcal{P} := \Big\{\psi \in L^2\big(\mathbb{R}, \mathrm{e}^{-2s}\mathrm{d}s\big);\ \psi' \in L^2(\mathbb{R}) \text{ and } \psi_{|]-\infty,0]} = 0\Big\}.$$

The linear result we established states as follows:

**Theorem 1.** *Let $(v_n)_{n\geq 0}$ be the sequence of solutions to the free Schrödinger equation with initial data $v_n(0,\cdot) = \varphi_n$, where $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ is a bounded sequence in $H^1_{\rm rad}(\mathbb{R}^2)$. There exist a sequence $(\varphi^{(k)})_{k\geq 0}$ of functions in $L^2_{\rm rad}(\mathbb{R}^2)$, a sequence of profiles $(\psi^{(j)})_{j\geq 1}$ in $\mathcal{P}$, a sequence $(\underline{\alpha}^{(j)})_{j\geq 1}$ of scales in the sense of Definition 1, a sequence $(\underline{h}^{(k)})_{k\geq 0}$ of sequences of positive real numbers, and two sequences $((t_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}})_{j\geq 1}$ and $((\tilde{t}_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}})_{k\geq 0}$ of real sequences such that*

$$\forall j \neq i, \quad \text{either } \big|\log\big(\alpha_n^{(j)}/\alpha_n^{(i)}\big)\big| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \quad \text{or} \quad \alpha_n^{(j)} = \alpha_n^{(i)} \quad \text{and} \quad -\frac{\log|t_n^{(j)} - t_n^{(i)}|}{2\alpha_n^{(j)}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \in [-\infty, +\infty[\,,$$

*with, in the case when $a \in ]0,+\infty[$, $\psi^{(j)}(s)$ or $\psi^{(i)}(s)$ null for $s < a$,*

$$\text{for any } k \neq m, \quad \big|\log\big(h_n^{(k)}/h_n^{(m)}\big)\big| + \frac{|\tilde{t}_n^{(k)} - \tilde{t}_n^{(m)}|}{{h_n^{(k)}}^2} \to \infty, \quad \text{as } n \to \infty,$$

*and, up to a subsequence extraction, we have for all $\ell \geq 1$*

$$v_n(t,\cdot) = \sum_{k=0}^{\ell} \langle D\rangle^{-1} \frac{1}{h_n^{(k)}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-\tilde{t}_n^{(k)})\Delta} \varphi^{(k)}\Big(\frac{\cdot}{h_n^{(k)}}\Big) + \sum_{j=1}^{\ell} \sqrt{\frac{\alpha_n^{(j)}}{2\pi}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t_n^{(j)})\Delta} \psi^{(j)}\Big(\frac{-\log|\cdot|}{\alpha_n^{(j)}}\Big) + \mathrm{r}_n^{(\ell)}(t,\cdot),$$

*with* $\limsup_{n\to\infty} \|\mathrm{r}_n^{(\ell)}\|_{L^\infty(\mathbb{R},L^{\phi_p})\cap ST(\mathbb{R})} \overset{\ell\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

*Moreover, we have the following stability estimates as $n$ tends to infinity*

$$\|\varphi_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \sum_{k\in\Gamma^\ell(\mathbf{1})} \big\|\langle D\rangle^{-1}\varphi^{(k)}\big\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \sum_{k\in\Lambda^\ell_\infty} \big\|\varphi^{(k)}\big\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \big\|\mathrm{r}_n^{(\ell)}(t,\cdot)\big\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \circ(1), \quad \text{and}$$

$$\|\nabla\varphi_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \sum_{k\in\Gamma^\ell(\mathbf{1})} \|\nabla\langle D\rangle^{-1}\varphi^{(k)}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \sum_{k\in\Lambda_0^\ell} \|\varphi^{(k)}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \sum_{j=1}^{\ell}\|\psi^{(j)\prime}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \|\nabla \mathrm{r}_n^{(\ell)}(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \circ(1),$$

*where we noted* $\Gamma^\ell(\mathbf{1}) := \{k \in \{0,\dots,\ell\}/h^{(k)} = \mathbf{1}\}$, $\Lambda_0^\ell := \{k \in \{1,\dots,\ell\}/h_n^{(k)} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\}$ *and* $\Lambda_\infty^\ell := \{k \in \{1,\dots,\ell\}/h_n^{(k)} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty\}$, *and designated by* **1** *the scale in which all the terms are equal to the number* 1.

**Remarks 1.** Denoting by:

$$g_n^{(j)}(t,\cdot) = \sqrt{\frac{\alpha_n^{(j)}}{2\pi}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-t_n^{(j)})\Delta}\psi^{(j)}\left(\frac{-\log|\cdot|}{\alpha_n^{(j)}}\right) \quad \text{and} \tag{6}$$

$$f_n^{(k)}(t,\cdot) = \langle D\rangle^{-1}\frac{1}{h_n^{(k)}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-\tilde t_n^{(k)})\Delta}\varphi^{(k)}\left(\frac{\cdot}{h_n^{(k)}}\right), \tag{7}$$

we have for any $j \in \mathbb{N}$:

$$\|g_n^{(j)}\|_{ST(\mathbb{R})} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{and} \quad \|g_n^{(j)}\|_{L^\infty(\mathbb{R},L^{\phi_p}(\mathbb{R}^2))} \gtrsim 1,$$

and for any $k \in \Lambda_\infty^\ell \cup \Lambda_0^\ell$:

$$\|f_n^{(k)}\|_{ST(\mathbb{R})} \gtrsim 1 \quad \text{and} \quad \|f_n^{(k)}\|_{L^\infty(\mathbb{R},L^{\phi_p}(\mathbb{R}^2))} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

The nonlinear result we proved in this work highlights the fact that the nonlinear feature displayed by the solutions to the 2D nonlinear Schrödinger equation only arises from the **1**-oscillating component of the sequence of the Cauchy data both in subcritical and critical cases. It reads as follows:

**Theorem 2.** *Let* $(u_n)_{n\geq 0}$ *be the sequence of solutions to the nonlinear Schrödinger equation* (NLS) *with initial data* $u_n(0,\cdot) = \varphi_n$, *where* $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ *is a bounded sequence in* $H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^2)$ *satisfying* $H(\varphi_n) \leq 1$. *Let us suppose that the sequence* $(\langle D\rangle\varphi_n)_{n\geq 0}$ *is not unrelated to the scale* **1**. *Then, with the notations of Theorem 1, we have for all* $\ell \geq 1$*:*

$$u_n(t,\cdot) = \sum_{j=1}^{\ell} g_n^{(j)}(t,\cdot) + \sum_{k\in\Lambda^\ell} f_n^{(k)}(t,\cdot) + \sum_{k\in\Gamma^\ell(\mathbf{1})} U_k\big(t-\tilde t_n^{(k)},\cdot\big) + \tilde{\mathrm{r}}_n^{(\ell)}(t,\cdot), \tag{8}$$

*where* $\Lambda^\ell = \Lambda_0^\ell \cup \Lambda_\infty^\ell$, $g_n^{(j)}$ *and* $f_n^{(k)}$ *are respectively defined by* (6) *and* (7), *with* $\tilde{\mathrm{r}}_n^{(\ell)}$ *satisfying:*

$$\limsup_{n\to\infty}\|\tilde{\mathrm{r}}_n^{(\ell)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Delta}\mathrm{r}_n^{(\ell)}(0,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R},H^1(\mathbb{R}^2))\cap ST(\mathbb{R})} \stackrel{\ell\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{9}$$

*and where* $U_0$ *designates the solution to the nonlinear Schrödinger equation with initial data the weak limit of the sequence* $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ *and, for* $k \geq 1$ *in* $\Gamma^\ell(\mathbf{1})$, $U_k$ *denotes the solution to* (NLS) *satisfying*

$$\|U_k(s,\cdot) - \mathrm{e}^{\mathrm{i}s\Delta}\langle D\rangle^{-1}\varphi^{(k)}\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \stackrel{s\to\mp\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \text{if } \tilde t_n^{(k)} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \pm\infty. \tag{10}$$

**Remarks 2.** The existence and uniqueness of $U_k$ satisfying (10) is ensured by scattering results established in [4,11].
The key point in Theorem 2 relies on the following property

$$\limsup_{n\to\infty}\left\|\sum_{j=1}^{\ell} g_n^{(j)}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R},L^{\phi_p}(\mathbb{R}^2))} < \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad \forall \ell \geq 1, \tag{11}$$

which derives from the stability estimates and the fact that the Cauchy data is assumed to be not unrelated to the scale **1**.

## 2. Ideas of the proof

We just give some basic ideas of our strategy, and we refer the reader to [1] for the complete proof. As emphasized above, the main difficulty stems from the difference in the behavior of the elements to be taken into account. To overcome this difficulty, we developed a strategy to extract these elements strikingly different. For that purpose, we start (according to Proposition 2.5 in [8]) by decomposing the Cauchy data into three parts: its weak limit, its **1**-oscillating component and a remainder term, which is unrelated to the scale **1**. Thereafter, to establish Theorem 1, we treated separately the evolution of each part under the flow of the Schrödinger equation. The key point to investigate the sequence of solutions to (S) associated with the **1**-oscillating component consisted in proving that the decompositions in the frameworks of Strichartz and Orlicz norms coincide. But, contrary to the case of the **1**-oscillating component, the study of the sequence of solutions to (S) generated by the unrelated component to the scale **1** gave rise to two distinct decompositions. The one in the framework of the Orlicz norm is based on the fact that we deal for this part with a sequence converging to zero in $L^\infty(\mathbb{R}, L^{2p}(\mathbb{R}^2))$. To conclude the proof of the linear result by grouping the two decompositions, we have been led to highlight some kind of orthogonality between the Strichartz and Orlicz norms for the evolution of the unrelated component to the scale **1**.

The stability estimate arises in a crucial way in the proof of Theorem 2 allowing it to be reduced to a finite number $\ell$ of elements. Now writing $u_n = u_n^{\mathrm{ap},(\ell)} + \tilde{\mathrm{r}}_n^{(\ell)}$, with

$$u_n^{\mathrm{ap},(\ell)}(t,\cdot) = \sum_{j=1}^{\ell} g_n^{(j)}(t,\cdot) + \sum_{k\in\Lambda^\ell} f_n^{(k)}(t,\cdot) + \sum_{k\in\Gamma^\ell(\mathbf{1})} U_k\big(t-\tilde{t}_n^{(k)},\cdot\big),$$

we easily check that $(\mathrm{i}\partial_t + \Delta)\tilde{\mathrm{r}}_n^{(\ell)} = G_n^{(\ell)}$, where $G_n^{(\ell)}(t,\cdot) = f(u_n(t,\cdot)) - \sum_{k\in\Gamma^\ell(\mathbf{1})} f(U_k(t-\tilde{t}_n^{(k)},\cdot))$. Thus on any interval $[0,T]$, the remainder term $\tilde{\mathrm{r}}_n^{(\ell)}$ takes the form:

$$\tilde{\mathrm{r}}_n^{(\ell)}(t,\cdot) - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Delta}\mathrm{r}_n^{(\ell)}(0,\cdot) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Delta}\big(\big(\tilde{\mathrm{r}}_n^{(\ell)} - \mathrm{r}_n^{(\ell)}\big)(0,\cdot)\big) - \mathrm{i}\int_0^t \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-s)\Delta} G_n^{(\ell)}(s,\cdot)\,\mathrm{d}s.$$

Invoking continuity arguments together with the fact that $\|(\tilde{\mathrm{r}}_n^{(\ell)} - \mathrm{r}_n^{(\ell)})(0,\cdot)\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, the heart of the matter in the proof of Theorem 2 reduces to show that for $T$ small enough

$$\big\|G_n^{(\ell)}\big\|_{ST^*([0,T])} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{12}$$

where $ST^*([0,T])$ denotes the dual of the Strichartz norm (1). To achieve our goal, we decompose the source term into three parts as follows:

$$G_n^{(\ell)} = G_n^{(\ell),1} + \mathcal{L}\big(u_n^{\mathrm{ap},(\ell)}\big).\tilde{\mathrm{r}}_n^{(\ell)} + \mathcal{R}_n^{\mathrm{ap},(\ell)}, \quad \text{with}$$
$$G_n^{(\ell),1} = f\big(u_n^{\mathrm{ap},(\ell)}\big) - \sum_{k\in\Gamma^\ell(\mathbf{1})} f\big(U_k\big(\cdot-\tilde{t}_n^{(k)},\cdot\big)\big) \quad \text{and} \quad \mathcal{L}\big(u_n^{\mathrm{ap},(\ell)}\big)\tilde{\mathrm{r}}_n^{(\ell)} = \big(\tilde{\phi}_p\big(u_n^{\mathrm{ap},(\ell)}\big)\tilde{\mathrm{r}}_n^{(\ell)} - \phi_p^\flat\big(u_n^{\mathrm{ap},(\ell)}\big)\bar{\tilde{\mathrm{r}}}_n^{(\ell)}\big).$$

Actually, we have $\|G_n^{(\ell),1}\|_{ST^*(\mathbb{R})} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. This claim is proved by partitioning the real set $\mathbb{R}$ as follows:

$$I_k^A = \big\{\big|t-\tilde{t}_n^{(k)}\big| \le A\big\} \quad \text{for } k\in\Gamma^\ell(\mathbf{1}) \quad \text{and} \quad J^A = \big\{\big|t-\tilde{t}_n^{(k')}\big| \ge A,\ \forall k'\in\Gamma^\ell(\mathbf{1})\big\},$$

where $A$ is a positive real number suitably selected. The choice of this partition is motivated by the fact that in view of scattering results, the term $f(U_k(\cdot-\tilde{t}_n^{(k)},\cdot))$ is only relevant on the interval $I_k^A$. This information, combined with Property (11) and the fact that, for any $k$ in $\Lambda^\ell$, the norm $\|f_n^{(k)}\|_{L^\infty(\mathbb{R},L^{\phi_p}(\mathbb{R}^2))}$ tends to zero as $n$ tends to infinity, allows, in light of Trudinger–Moser-type inequality (5), to end the proof of the desired result.

Finally, by similar arguments, we prove that for $T$ small enough and $n$ sufficiently large, we have:

$$\big\|\mathcal{L}\big(u_n^{\mathrm{ap},(\ell)}\big)\tilde{\mathrm{r}}_n^{(\ell)}\big\|_{ST^*([0,T])} \le \circ(1) + c\big\|\tilde{\mathrm{r}}_n^{(\ell)}(t,\cdot) - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Delta}\mathrm{r}_n^{(\ell)}(0,\cdot)\big\|_{L^\infty([0,T],H^1)\cap ST([0,T])} \quad \text{and}$$
$$\big\|\mathcal{R}\big(u_n^{\mathrm{ap},(\ell)}\big)\big\|_{ST^*([0,T])} \le \circ(1) + \big\|\tilde{\mathrm{r}}_n^{(\ell)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Delta}\mathrm{r}_n^{(\ell)}(0,\cdot)\big\|_{ST([0,T])}^{1+\gamma} + c\big\|\tilde{\mathrm{r}}_n^{(\ell)}(t,\cdot) - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\Delta}\mathrm{r}_n^{(\ell)}(0,\cdot)\big\|_{L^\infty([0,T],H^1)}^2,$$

where $c$ is a small constant, which achieves the proof of the theorem by standard arguments.

## References


[1] H. Bahouri, Structure theorems for 2D linear and nonlinear Schrödinger equations, http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01089015.
[2] H. Bahouri, P. Gérard, High-frequency approximation of solutions to critical nonlinear wave equations, Amer. J. Math. 121 (1999) 131–175.
[3] H. Bahouri, M. Majdoub, N. Masmoudi, On the lack of compactness in the 2D critical Sobolev embedding, J. Funct. Anal. 260 (2011) 208–252.
[4] H. Bahouri, S. Ibrahim, G. Perelman, Scattering for the critical 2-D NLS with exponential growth, Differ. Integral Equ. 27 (2014) 233–268.
[5] H. Bahouri, G. Perelman, A Fourier approach to the profile decomposition in Orlicz spaces, Math. Res. Lett. 21 (2014) 33–54.
[6] H. Brézis, J.-M. Coron, Convergence of solutions of H-Systems or how to blow bubbles, Arch. Ration. Mech. Anal. 89 (1985) 21–86.
[7] J. Bourgain, Some new estimates on oscillatoryon integrals, in: Essays on Fourier Analysis in Honor of Elias M. Stein, in: Princeton Math. Ser., vol. 42, 1995, pp. 83–112.
[8] P. Gérard, Description du défaut de compacité de l'injection de Sobolev, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 3 (1998) 213–233.
[9] P. Gérard, Oscillations and concentration effects in semilinear dispersive wave equations, J. Funct. Anal. 133 (1996) 50–68.
[10] J. Colliander, S. Ibrahim, M. Majdoub, N. Masmoudi, Energy critical NLS in two space dimension, J. Hyperbolic Differ. Equ. 6 (2009) 549–575.
[11] S. Ibrahim, M. Majdoub, N. Masmoudi, K. Nakanishi, Scattering for the two dimensional NLS with exponential nonlinearity, Nonlinearity 25 (2012) 1843–1849.
[12] J.F. Lam, B. Lippman, F. Tappert, Self trapped laser beams in plasma, Phys. Fluids 20 (1977) 1176–1179.

[13] F. Merle, L. Vega, Compactness at blow-up time for L2 solutions of the critical nonlinear Schrödinger equation in 2D, Int. Math. Res. Not. 8 (1998) 399–425.
[14] J. Moser, A sharp form of an inequality of N. Trudinger, Indiana Univ. Math. J. 20 (1971) 1077–1092.
[15] M.-M. Rao, Z.-D. Ren, Applications of Orlicz Spaces, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 250, Marcel Dekker Inc., New York, 2002.
[16] M. Struwe, A global compactness result for boundary value problems involving limiting nonlinearities, Math. Z. 187 (1984) 511–517.
[17] N.S. Trudinger, On imbedding into Orlicz spaces and some applications, J. Math. Mech. 17 (1967) 473–484.