C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 353 (2015) 397–401

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Algèbre homologique/Topologie

Homologies généralisées à coefficients

Generalized homology theories with coefficients

Inès Saihi [a,b]

[a] *Université de Tunis, Ecole nationale supérieure d'ingénieurs de Tunis, 5 avenue Taha Hussein, 1008, Tunisie*
[b] *Université de Tunis El Manar, Faculté des sciences de Tunis, LR11ES12, Tunisie*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 10 novembre 2014
Accepté le 9 février 2015
Disponible sur Internet le 18 mars 2015

Présenté par le comité de rédaction

RÉSUMÉ

Si $\mathcal{H}_*$ est un théorie homologique généralisée et A un $\mathbb{Z}$-module, on peut définir l'homologie à coefficients $\mathcal{H}_*(-, A)$, qui est reliée à la théorie $\mathcal{H}_*$ par une suite exacte de coefficients universels. Cependant, cette homologie à coefficients n'est pas fonctorielle en A. Pour lever cette ambiguïté, on associe à $\mathcal{H}_*$ une théorie homologique $\widehat{\mathcal{H}}_*$ à valeurs dans une certaine catégorie abélienne $\mathcal{D}$. On trouve ainsi une nouvelle suite exacte de coefficients universels, parfois plus efficace que la suite exacte classique.

© 2015 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

ABSTRACT

If $\mathcal{H}_*$ is a generalized homology theory and A a $\mathbb{Z}$-module, we can define the homology with coefficients $\mathcal{H}_*(-, A)$, which is linked to the theory $\mathcal{H}_*$ by a universal coefficient exact sequence. However, this homology with coefficients is not fonctorial in A. To avoid this ambiguity, we associate with $\mathcal{H}_*$ a homology theory $\widehat{\mathcal{H}}_*$ that takes values in a certain Abelian category $\mathcal{D}$. Hence we find a new universal coefficient exact sequence, sometimes better than the classical one.

© 2015 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

Soient G un groupe abélien et n un entier $n > 1$. Un espace de Moore $M(G, n)$ est un CW-complexe X simplement connexe tel que $H_n(X) \simeq G$ et $\widetilde{H}_i(X) = 0$ pour $i \neq n$. Le type d'homotopie de $M(G, n)$ est déterminé de façon unique par la paire (G, n) (voir [4]). La famille $\{M(G, n)\}_n$ forme un spectre qu'on notera $M(G)$. Un spectre de Moore M est un spectre tel que $H_i(M) = 0$ si $i \neq 0$. Le spectre $M(G)$ est alors un spectre de Moore.

Par ailleurs, si on a deux objets A et B de la catégorie $\mathcal{M}od$ des $\mathbb{Z}$-modules, contrairement aux espaces d'Eilenberg–MacLane, l'ensemble des classes d'homotopie d'applications $[M(A), M(B)]$ entre les deux spectres de Moore n'est pas isomorphe à $\mathrm{Hom}(A, B)$; en effet, il y a une suite exacte naturelle (voir [2]) :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}(A, B/2) \longrightarrow [M(A), M(B)] \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, B) \longrightarrow 0 \tag{1.1}$$

Adresse e-mail : ines.saihi@esstt.rnu.tn.

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2015.02.009
1631-073X/© 2015 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

qui prouve que la construction associant à un module A le spectre de Moore $M(A)$ n'est pas fonctorielle.

On notera $\mathcal{M}$ la catégorie dont les objets sont les spectres de Moore et les morphismes sont les classes d'homotopie d'applications entre spectres.

Étant donnée une théorie homologique généralisée $\mathcal{H}_*$ associée à un spectre E, on peut définir une théorie homologique $\mathcal{H}_*(-;A)$ (sur la catégorie $\mathcal{T}op_2$ des paires d'espaces topologiques) à coefficients dans un $\mathbb{Z}$-module donné A en considérant l'homologie associée au spectre $E \wedge M(A)$.

On remarque que cette construction n'est pas fonctorielle en A, mais qu'elle l'est par rapport au spectre de Moore. On notera alors cette homologie $\mathcal{H}_*(-\,;M(A))$ et on étudiera $\mathcal{H}_*(-\,;M)$, l'homologie à coefficients dans un spectre de Moore M. Pour toute paire d'espaces topologiques $(X\,,Y)$, en utilisant des arguments classiques, on obtient la suite exacte de coefficients universels (ici, A désigne $H_0(M)$) :

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}_i(X\,,Y)\otimes_{\mathbb{Z}} A \longrightarrow \mathcal{H}_i(X\,,Y\,;M) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathcal{H}_{i-1}(X\,,Y)\,,A) \longrightarrow 0 \tag{1.2}$$

On remarque que la catégorie $\mathcal{M}$ n'est pas abélienne. On identifie alors $\mathcal{M}$ à une sous-catégorie d'une catégorie abélienne $\mathcal{D}$ qu'on définit comme suit :

Définition 1.1. On note $\mathcal{D}$ la catégorie des diagrammes

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "2"] & & A \arrow[dl, "\alpha"] \\ & B \arrow[ul, "\beta"] & \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

dans la catégorie $\mathcal{M}od$ vérifiant $2\alpha = 2\beta = \beta\alpha = 0$ et $\alpha\beta = 2$.

Proposition 1.2. *La catégorie $\mathcal{D}$ est abélienne et possède assez de projectifs. De plus, $\mathcal{D}$ admet un produit tensoriel $\otimes_{\mathcal{D}} : \mathcal{D}\otimes\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{M}od$ semi-exact à droite.*

Les foncteurs dérivés du produit tensoriel seront notés $\mathrm{Tor}_*^{\mathcal{D}}$.

Proposition 1.3. *(i) La catégorie $\mathcal{M}$ est équivalente à la sous-catégorie pleine $\mathcal{D}_e$ de $\mathcal{D}$ des couples exacts.*
(ii) Un objet D de $\mathcal{D}$ est dans $\mathcal{D}_e$ si et seulement si D est de dimension homologique finie, ou encore, si et seulement si la dimension homologique de D est inférieure ou égale à 1.

Les objets de $\mathcal{D}_e$ seront appelés objets exacts de $\mathcal{D}$.

Étant donnés une théorie homologique généralisée $\mathcal{H}_*$ et un spectre de Moore M (ou, de façon équivalente, un objet exact D), on se propose de « déterminer » l'homologie $\mathcal{H}_*(X,Y;M)$ ou encore $\mathcal{H}_*(X,Y;D)$ pour toute paire d'espaces topologiques $(X\,,Y)$.

Théorème 1.4. *Pour toute théorie homologique $\mathcal{H}_*$ à coefficients dans $\mathcal{M}od$, il existe une théorie homologique $\widehat{\mathcal{H}}_*$ à coefficients dans la catégorie $\mathcal{D}$ telle que, pour toute paire d'espaces $(X\,,Y)$ dans la catégorie $\mathcal{T}op_2$ et pour tout objet exact D de $\mathcal{D}_e$, on a une suite exacte :*

$$0 \longrightarrow \widehat{\mathcal{H}}_i(X\,,Y)\otimes_{\mathcal{D}} D \longrightarrow \mathcal{H}_i(X\,,Y\,;D) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{D}}(\widehat{\mathcal{H}}_{i-1}(X\,,Y)\,,D) \longrightarrow 0 \tag{1.4}$$

qui est naturelle en $(X\,,Y)$ et en D.

Remarque 1.5. On montre que, pour tout objet exact D, on a $\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{D}}(\cdot\,,D) = 0$, pour $i \geq 2$.

Les deux suites exactes (1.2) et (1.4) sont reliées, mais elles sont différentes et, dans certains cas, il est plus judicieux d'utiliser la deuxième suite exacte.

Question : On a défini l'homologie généralisée à coefficients dans un objet exact D de la catégorie $\mathcal{D}$. Est-il possible de définir une théorie homologique à coefficients dans un objet D quelconque de $\mathcal{D}$ de telle sorte que l'on ait une suite spectrale avec $E^2_{**} = \mathrm{Tor}_*^{\mathcal{D}}(\widehat{\mathcal{H}}_*(X\,,Y)\,,D)$ qui converge vers $\mathcal{H}_*(X\,,Y\,;D)$? Dans ce cas, la suite exacte (1.4) sera obtenue à partir de la suite spectrale qui dégénère lorsque D est exact.

2. Quelques propriétés de la catégorie $\mathcal{D}$

2.1. Structure de $\mathcal{C}$-modules sur les objets de la catégorie $\mathcal{D}$

Pour simplifier les notations, un objet D de $\mathcal{D}$ sera noté

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "\alpha"] & B \arrow[l, shift left, "\beta"] \end{tikzcd}. \tag{2.1}$$

Les objets de la catégorie $\mathcal{D}$ sont munis d'une structure de module à droite et à gauche sur une catégorie $\mathcal{C}$ définie comme suit.

Notation : On note $\mathcal{C}$ la catégorie $\mathbb{Z}$-linéaire ayant deux objets, notés 0 et 1, et dont les morphismes sont donnés par : $\mathrm{Hom}(0\,,0)=\mathbb{Z}$, $\mathrm{Hom}(1\,,1)=\mathbb{Z}/4$, $\mathrm{Hom}(0\,,1)=\mathbb{Z}/2\cdot\alpha$ et $\mathrm{Hom}(1\,,0)=\mathbb{Z}/2\cdot\beta$ avec les conditions :

$$2\alpha=0,\qquad 2\beta=0,\qquad \beta\circ\alpha=0,\qquad \alpha\circ\beta=2$$

La catégorie $\mathcal{D}$ s'identifie alors à la catégorie des foncteurs covariants de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{M}od$. On peut ainsi définir une structure de $\mathcal{C}$-module à gauche pour chaque objet de $\mathcal{D}$ de façon naturelle, ce qui permet de voir $\mathcal{D}$ comme étant la catégorie $\mathcal{C}$-$\mathcal{M}od$ des $\mathcal{C}$-modules à gauche.

Sur la catégorie $\mathcal{C}$, on a l'anti-involution évidente ρ qui échange les objets 0 et 1 et les morphismes α et β. On peut alors, via ρ, associer une structure de $\mathcal{C}$-module à droite pour chaque structure de $\mathcal{C}$-module à gauche sur les objets de $\mathcal{D}$.

2.2. Produit tensoriel dans la catégorie $\mathcal{D}$

La structure de $\mathcal{C}$-module sur les objets de $\mathcal{D}$ et l'involution ρ permettent de définir, de façon naturelle, un produit tensoriel de $\mathcal{C}$-modules, qui sera noté $\otimes_{\mathcal{D}}$, à valeurs dans $\mathcal{M}od$:

Définition 2.1. On considère deux objets D et D' dans $\mathcal{D}$, donnés respectivement par :

$$A \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} B \qquad\qquad A' \underset{\beta'}{\overset{\alpha'}{\rightleftarrows}} B'$$

on définit le produit tensoriel $D\otimes_{\mathcal{D}} D'$ comme suit :

$$D\otimes_{\mathcal{D}} D'=(A\otimes A')\oplus(B\otimes B')/(\alpha(x)\otimes y\equiv x\otimes\beta'(y)\,;\,\beta(x)\otimes y\equiv x\otimes\alpha'(y))$$

On note S et P les objets exacts donnés respectivement par :

$$\mathbb{Z} \underset{0}{\overset{pr}{\rightleftarrows}} \mathbb{Z}/2 \qquad\qquad \mathbb{Z}/2 \underset{pr}{\overset{2}{\rightleftarrows}} \mathbb{Z}/4$$

Proposition 2.2. *Si D est un objet de $\mathcal{D}$ donné par* $A \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} B$*, alors on a :*

$$D\otimes_{\mathcal{D}} S=A,\qquad D\otimes_{\mathcal{D}} P=B,\qquad \mathrm{Hom}(S\,,D)=A\quad\text{et}\quad \mathrm{Hom}(P\,,D)=B$$

2.3. Sous-catégorie des objets exacts et équivalence de catégories

On note encore S et P les spectres de Moore $M(\mathbb{Z})$ et $M(\mathbb{Z}/2)$, respectivement. On a alors la suite de cofibrations :

$$\xrightarrow{\theta} P \xrightarrow{\delta} S \xrightarrow{2} S \xrightarrow{\theta} P \xrightarrow{\delta} \tag{2.2}$$

où le degré de θ est 0 alors que δ est de degré -1. Si l'on note λ la composée de δ par l'application de Hopf de S dans S, alors on obtient le diagramme de spectres de Moore

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "2"] & & S \arrow[dl, "\theta"] \\ & P \arrow[ul, "\lambda"] & \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

qui vérifie les propriétés : $2\theta=0$, $2\lambda=0$, $\lambda\theta=0$ et $\theta\lambda=2$.

Étant donné un spectre de Moore M, on obtient à partir de (2.3), et de façon fonctorielle, un diagramme qu'on notera D_M :

$$\begin{tikzcd} {[S\,,M]=H_0(M)} \arrow[rr, "2"] & & {[S\,,M]=H_0(M)} \arrow[dl, "\lambda^*"] \\ & {[P\,,M]} \arrow[ul, "\theta^*"] & \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

Proposition 2.3. *Le diagramme (2.4) est un objet exact de la catégorie $\mathcal{D}$. De plus, le foncteur Φ de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{D}_e$ associant à un spectre de Moore M le diagramme D_M est une équivalence de catégories.*

Preuve. La construction est donnée dans Baues [1] dans un cadre différent. Il est à noter qu'un point clé de la preuve est le fait que le groupe $[P\,,\,P]$ est cyclique d'ordre 4 (voir [2,5]). $\square$

Remarque 2.4. En raison de cette équivalence de catégories, on notera indifféremment le spectre de Moore M et le couple exact qui lui est associé D_M ; c'est ce qui explique que la même notation soit utilisée pour S et P en tant qu'objets de $\mathcal{D}_e$ et en tant que spectres de Moore.

3. Algèbre homologique dans la catégorie $\mathcal{D}$

3.1. Objets projectifs et résolutions projectives dans $\mathcal{D}$

Proposition 3.1. *Les projectifs dans $\mathcal{D}$ sont des sommes directes de copies de S et de copies de P et la catégorie $\mathcal{D}$ possède assez de projectifs.*

On introduit maintenant les objets X_i, $i = 0, 1, 2$, représentés respectivement par les diagrammes suivants :

$$0 \rightleftarrows \mathbb{Z}/2 \qquad \mathbb{Z}/2 \underset{0}{\overset{Id}{\rightleftarrows}} \mathbb{Z}/2 \qquad \mathbb{Z} \rightleftarrows 0$$

Ces objets ont pour résolutions projectives :

$$\longrightarrow S \longrightarrow S \longrightarrow P \longrightarrow X_0$$

$$\longrightarrow P \longrightarrow S \longrightarrow S \longrightarrow X_1$$

$$\longrightarrow S \longrightarrow P \longrightarrow S \longrightarrow X_2$$

et ce sont les seuls objets non exacts qui peuvent s'injecter dans S ou dans P.

Par ailleurs, tout objet D de $\mathcal{D}$, donné par (1.3), peut être vu comme étant un complexe différentiel $\mathbb{Z}/3$-gradué, en indexant B par 0 et A par 2 puis 1, en suivant le sens des flèches. On peut alors déterminer l'homologie de ce complexe, qu'on notera $H_*(D)$, avec $* \in \mathbb{Z}/3$.

Lemme 3.2. *(i) Les diagrammes X_i ont des homologies respectives concentrées seulement en dimension $-i$ et on a : $H_{-i}(X_i) = \mathbb{Z}/2$.*
(ii) $\mathrm{Tor}_k^{\mathcal{D}}(X_i\,,\,X_j) \simeq U_k \oplus V_k$ *avec*

$$U_k = \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & \text{si} \quad i+j+k \equiv 0(3) \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases} \quad \textit{et } V_k = \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & \text{si} \quad k=0, i=j=1 \\ \mathbb{Z} & \text{si} \quad k=0, i=j=2 \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

À l'aide de ce qui précède, on peut prouver facilement :

Lemme 3.3. *Pour tout D objet de la catégorie $\mathcal{D}$, il existe des $\mathbb{Z}$-modules libres E_0, E_1 et E_2 et un morphisme :*

$$\bigoplus_i X_i \otimes E_i \longrightarrow D$$

induisant un isomorphisme sur les modules H_*. De plus, on a, pour tout i :

$$E_i \otimes \mathbb{Z}/2 \simeq H_{-i}(D)$$

Cela permet de déduire :

Théorème 3.4. *Si D et D' sont deux objets de $\mathcal{D}$, alors :*
(i) il existe un morphisme naturel en D et D',

$$\bigoplus_{i+j-k\equiv 0(3)} H_i(D) \otimes H_j(D') \longrightarrow \mathrm{Tor}_k^{\mathcal{D}}(D\,,\,D')$$

qui est un isomorphisme pour $k \geq 2$ et un monomorphisme pour $k = 1$.
(ii) il existe un morphisme naturel en D et D',

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{D}}^k(D, D') \longrightarrow \bigoplus_{-i+j+k\equiv 0(3)} \mathrm{Hom}(H_i(D), H_j(D'))$$

qui est un isomorphisme pour $k \geq 2$ et un épimorphisme pour $k = 1$.

4. Homologie généralisée à coefficients dans un objet exact

4.1. Nouvelle suite exacte de coefficients universels

Soit $\mathcal{H}_*$ une théorie homologique généralisée. Pour chaque degré n et pour chaque paire d'espaces (X, Y) de la catégorie $\mathcal{T}op_2$, on obtient, à partir du diagramme de spectres de Moore (2.3), un objet $\widehat{\mathcal{H}}_n(X, Y)$ de $\mathcal{D}$:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}_n(X, Y; S) \arrow[rr, "2"] & & \mathcal{H}_n(X, Y; S) \arrow[dl] \\ & \mathcal{H}_n(X, Y; P) \arrow[ul] & \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

En utilisant la proposition 2.2, on voit que $\mathcal{H}_n(X, Y; D)$ est isomorphe à $\widehat{\mathcal{H}}_n(X, Y) \otimes_{\mathcal{D}} D$ pour tout objet projectif D de $\mathcal{D}$. Si maintenant D est un objet exact de $\mathcal{D}$, on peut appliquer cela à une résolution projective de D et on en déduit le théorème 1.4.

4.2. Relation entre les deux suites exactes de coefficients universels

La suite exacte (1.2) s'envoie dans (1.4). Cependant, les deux suites sont différentes, comme le montre l'exemple suivant.

Soit D un objet exact donné par le diagramme (1.3). En utilisant les valeurs des premiers groupes d'homotopie stable de la sphère (donnés par exemple dans [3]) et ceux du plan projectif (voir [5]), on trouve que, $D_{\mathbb{Z}/24}$ étant le couple exact associé à $M(\mathbb{Z}/24)$,

$$\widehat{\pi}_0^S = S \quad \widehat{\pi}_1^S = X_1 \quad \widehat{\pi}_2^S = P \quad \widehat{\pi}_3^S = D_{\mathbb{Z}/24} \quad \widehat{\pi}_4^S = X_0$$

En écrivant les deux suites exactes (1.2) et (1.4) pour $i = 3$, on obtient :

$$0 \longrightarrow A \otimes \mathbb{Z}/2 \simeq A/2 \longrightarrow \pi_3^S(D) \longrightarrow \mathrm{Tor}(A, \mathbb{Z}/2) \simeq A_2 \longrightarrow 0 \tag{4.2}$$

$$0 \longrightarrow D_{\mathbb{Z}/24} \otimes_{\mathcal{D}} D \xrightarrow{\simeq} \pi_3^S(D) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^{\mathcal{D}}(\widehat{\pi}_2^S, D) = 0 \longrightarrow 0 \tag{4.3}$$

ce qui prouve que la deuxième suite exacte permet de donner directement $\pi_3^S(D) \simeq D_{\mathbb{Z}/24} \otimes_{\mathcal{D}} D$.

Références

[1] H.-J. Baues, Homotopy Type and Homology, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford, UK, 1996.
[2] A. Hatcher, Algebraic Topology, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2000.
[3] S.O. Kochman, Stable homotopy groups of spheres, Lect. Notes Math. 1423 (1990).
[4] P. Vogel, A solution of the Steenrod problem for G-Moore spaces, K-Theory 1 (4) (1987) 325–335.
[5] J. Wu, Homotopy Theory of the Suspensions of the Projective Plane, 2003, books.google.com.