C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 353 (2015) 671–675

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Combinatoire

Tournois indécomposables et leurs sous-tournois indécomposables à six sommets ☆,☆☆

Indecomposable tournaments and their indecomposable subtournaments with six vertices

Imed Boudabbous

Université de Sfax, Institut préparatoire aux études d'ingénieurs de Sfax, Tunisie

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 5 juillet 2014
Accepté après révision le 19 mars 2015
Disponible sur Internet le 25 juin 2015

Présenté par le comité de rédaction

RÉSUMÉ

Étant donné un tournoi $T := (S, A)$, une partie X de S est un intervalle de T lorsque, pour tous $a, b \in X$ et $x \in S - X$, $(a, x) \in A$ si et seulement si $(b, x) \in A$. Par exemple, $\emptyset$, $\{x\}(x \in S)$ et S sont des intervalles de T, appelés intervalles triviaux. Un tournoi dont tous les intervalles sont triviaux est indécomposable ; sinon, il est décomposable. On dit qu'un tournoi T abrite un tournoi T' si T' est isomorphe à un sous-tournoi de T. Dans cet article, nous classifions les tounois indécomposables à partir des tournois indécomposables à six sommets qu'ils abritent.

ABSTRACT

Given a tournament $T = (V, A)$, a subset X of V is an interval of T provided that, for any $a, b \in X$ and $x \in V - X$, $(a, x) \in A$ if and only if $(b, x) \in A$. For example, $\emptyset$, $\{x\}(x \in V)$ and V are intervals of T, called trivial intervals. A tournament, all the intervals of which are trivial, is indecomposable; otherwise, it is decomposable. We say that a tournament T' embeds in a tournament T when T' is isomorphic to a subtournament of T. In this article, we classify the indecomposable tournaments according to the indecomposable tournaments with six vertices embedding in T.

1. Préliminaires et présentation du résultat

Un *tournoi* T est un couple (S, A), où S est un ensemble fini, appelé ensemble des *sommets* de T, et A est un ensemble de couples de sommets distincts de T, appelé ensemble des *arcs* de T, tel que pour tous $x \neq y \in S$, $(x, y) \in A$ si et seulement si $(y, x) \notin A$. Pour deux sommets distincts x et y d'un tournoi T, la notation $x \longrightarrow y$, signifie que $(x, y) \in A$. Parfois, il est

☆ Nous adressons nos vifs remerciements pour le rapporteur pour toutes ses remarques et suggestions qui ont bien amélioré la présentation de notre papier.

☆☆ Ce travail a été supporté par le projet PHC : 14 MAG 14.

Adresse e-mail : imed.boudabbous@gmail.com.

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2015.03.021
1631-073X/

commode de désigner par $S(T)$ l'ensemble des sommets de T et par $A(T)$ l'ensemble de ses arcs. À chaque partie X de S est associé le *sous-tournoi* $T[X]$ de T, *induit* par X défini par $T[X] := (X, A \cap (X \times X))$. Pour tout $x \in S$, on pose $V_T^-(x) := \{y \in S\ ;\ (y, x) \in A\}$ et $V_T^+(x) := \{y \in S\ ;\ (x, y) \in A\}$.

Un tournoi T est *acyclique* si $A(T)$ est une relation transitive, ou encore si $A(T)$ est un ordre total strict. Le tournoi acyclique usuel sur $\{0, \ldots, n\}$ est noté L_{n+1}. On note aussi : $L_{n+1} := 0 < \cdots < n$.

Étant donnés deux tournois $T := (S, A)$ et $T' := (S', A')$, une bijection f de S sur S' est un *isomorphisme* de T sur T' si pour tous $x, y \in S$, $(x, y) \in A$ si et seulement si $(f(x), f(y)) \in A'$. Lorsqu'un tel isomorphisme existe, on dit que T et T' sont *isomorphes* et on note $T \simeq T'$. Un tournoi T *abrite* un tournoi T' si T' est isomorphe à un sous-tournoi de T.

À tout tournoi $T := (S, A)$ est associé son tournoi *dual* $T^\star := (S, A^\star)$, où $A^\star := \{(x, y);\ (y, x) \in A\}$. Un tournoi est *autodual* s'il est isomorphe à son dual.

Étant donné un tournoi $T := (S, A)$, une partie I de S est un *intervalle* ([8,15]) (ou un *clan* [6] ou un ensemble *homogène* [9]) de T lorsque, pour $a, b \in I$ et $x \in S - I$, $(a, x) \in A$, si et seulement si $(b, x) \in A$: par exemple, $\emptyset$, $\{x\}$ où $x \in S$, et S sont des intervalles de T, appelés les intervalles *triviaux* de T. Un tournoi est *indécomposable* ([10,15]) (ou *primitif* [6]) si tous ses intervalles sont triviaux, et il est *décomposable* dans le cas contraire. Par exemple, le cycle $C_3 := (\{0, 1, 2\}, \{(0, 1), (1, 2), (2, 0)\})$ est un tournoi indécomposable. Un sommet x d'un tournoi indécomposable T est dit *critique* si le tournoi $T[S - \{x\}]$ est décomposable. Soit T un tournoi indécomposable à au moins cinq sommets. Le tournoi T est dit *critique* si tous ses sommets sont critiques. On généralise cette définition en disant que le tournoi T est $(-k)$-*critique* lorsqu'il admet exactement k sommets non critiques. Un tournoi est dit (-1)-*critique* en a si a est l'unique sommet non critique de T.

Ces dernières années, le concept d'indécomposabilité est devenu fondamental dans l'étude des structures finies. Ce concept et d'autres notions voisines ont fait l'objet de plusieurs articles, par exemple [2,4,5,7,13].

En 2012, M. Chudnovsky et P. Seymour [4] ont présenté une méthode de construction des graphes indécomposables à partir des sous-graphes indécomposables qu'ils abritent. Le principal résultat de cette note (théorème 1.1) est une classification des tournois indécomposables à partir des tournois indécomposables à six sommets qu'ils abritent. Comme corollaire de ce théorème, on montre que, si T est un tournoi qui n'est, ni critique, ni (–1)-critique, alors pour tout entier $3 \leq m \leq |S(T)|$ et $m \neq 4$, l'ensemble $S(T)$ de ses sommets est l'union de ses parties X à m éléments telles que chaque tournoi induit $T[X]$ soit indécomposable.

Théorème 1.1. *Soit T un tournoi indécomposable à au moins 7 sommets.*

(i) *T est critique si et seulement si, sur chaque ensemble de sommets à six éléments, le tournoi induit est décomposable.*
(ii) *T est (–1)-critique en un sommet a si et seulement si a est le seul sommet tel que, sur chaque ensemble de sommets à six éléments contenant a, le tournoi induit soit décomposable.*
(iii) *T n'est ni critique ni (–1)-critique si et seulement si, pour tout sommet x, il existe un ensemble de sommets à six éléments contenant x sur lequel le tournoi induit est indécomposable.*

2. Tournois indécomposables

Rappelons quelques résultats sur les tournois indécomposables.

Lemme 2.1. *(Voir A. Ehrenfeucht et G. Rozenberg [6].) Soit T un tournoi indécomposable. Si X est une partie de l'ensemble S de ses sommets telle que $|X| \geq 3$, $|S - X| \geq 2$ et $T[X]$ est indécomposable, alors il existe deux éléments distincts x et y de $S - X$ tels que le tournoi $T[X \cup \{x, y\}]$ est indécomposable.*

Proposition 2.2. *(Voir J.H. Schmerl et W.T. Trotter [15].) Étant donné un tournoi indécomposable T d'au moins sept sommets, il existe deux sommets distincts tels que T diminué de ces deux sommets est indécomposable.*

En 2011, M.Y. Sayar a obtenu l'amélioration suivante de la proposition 2.2.

Proposition 2.3. *(Voir M.Y. Sayar [14].) Soit T un tournoi indécomposable. Si X est une partie de l'ensemble S de ses sommets telle que $|X| \geq 3$, $|S - X| \geq 4$ et $T[X]$ est indécomposable, alors il existe deux sommets distincts de $S - X$ tels que T diminué de ces deux sommets est indécomposable.*

Cette proposition est en fait une amélioration dans le cas spécial des tournois d'un résultat de P. Ille sur les digraphes [10], dans lequel la valeur 4 est remplacée par 6.

3. Tournois critiques, (–1)-critiques et théorème de Latka

La preuve de notre résultat n'utilise pas la caractérisation des tournois critiques et des tournois (-1)-critiques. Mais nous présentons ici la caractérisation de ces tournois pour une bonne illustration de notre principal résultat.

Afin de rappeler la caractérisation des tournois critiques, nous introduisons, pour tout entier $n \geq 1$, les tournois T_{2n+1}, U_{2n+1} et V_{2n+1} définis sur $\{0, \ldots, 2n\}$ comme suit.

(i) $A(T_{2n+1}) := \{(i, j) : j - i \in \{1, \ldots, n\}$ *modulo* $2n + 1\}$.
(ii) U_{2n+1} est le tournoi obtenu à partir de l'ordre total L_{2n+1} en inversant les arcs reliant deux sommets pairs, de sorte que $A(U_{2n+1}) := \{(i, j) : i < j$ et i ou j est impair $\} \cup \{(i, j) : i > j$ et i et j sont pairs $\})$.
(iii) $V_{2n+1}(\{0, \ldots, 2n - 1\}) := 0 < \cdots < 2n - 1$ et $V^+_{V_{2n+1}}(2n) := \{2i : i \in \{0, \ldots n - 1\}\}$.

Proposition 3.1. *(Voir J.H. Schmerl et W.T. Trotter [15].) À un isomorphisme près, les tournois critiques sont les tournois T_{2n+1}, U_{2n+1} et V_{2n+1}, où $n \geq 2$.*

Afin de rappeler la caractérisation des tournois (–1)-critiques, nous introduisons, pour $n \geq 3$ et pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n - 2\}$, les tournois E^{2k+1}_{2n+1}, F^{2k+1}_{2n+1}, G^{2k+1}_{2n+1} et H^{2k+1}_{2n+1}, définis sur $\{0, \ldots, 2n\}$ comme suit.

(i) $E^{2k+1}_{2n+1}(V^-_{E^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1)) := L_{2k+1}$, $E^{2k+1}_{2n+1}(V^+_{E^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1)) := 2k+2 < \ldots < 2n$ et pour tout $(x, y) \in V^+_{E^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1) \times V^-_{E^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1)$, $x \longrightarrow y$ si et seulement si x et y sont pairs.
(ii) $F^{2k+1}_{2n+1}(V^-_{F^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1)) := U_{2k+1}$, $F^{2k+1}_{2n+1}(V^+_{F^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1)) := 2k+2 < \ldots < 2n$ et pour tout $(x, y) \in V^+_{F^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1) \times V^-_{F^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1)$, $x \longrightarrow y$ si et seulement si x et y sont pairs.
(iii) $G^{2k+1}_{2n+1}(V^-_{G^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1)) := U_{2k+1}$, $G^{2k+1}_{2n+1}(V^+_{G^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1)) \simeq V_{2n-2k-1}$ avec $2k+2 < \ldots < 2n-1$ et pour tout $(x, y) \in V^+_{G^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1) \times V^-_{G^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1)$, $x \longrightarrow y$ si et seulement si $x = 2n$ et y est pair.
(iv) $H^{2k+1}_{2n+1}(V^-_{H^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1)) = V_{2k+1}$, $H^{2k+1}_{2n+1}(V^+_{H^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1)) \simeq V_{2n-2k-1}$ avec $2k+2 < \ldots < 2n-1$ et pour tout $(x, y) \in V^+_{H^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1) \times V^-_{H^{2k+1}_{2n+1}}(2k+1)$, $x \longrightarrow y$ si et seulement si $x = 2n$ et $y = 2k$.

Proposition 3.2. *(Voir H. Belkhechine, I. Boudabbous et J. Dammak [1].) À un isomorphisme près, les tournois (-1)-critiques sont les tournois E^{2k+1}_{2n+1}, F^{2k+1}_{2n+1}, $(F^{2k+1}_{2n+1})^\star$, G^{2k+1}_{2n+1}, $(G^{2k+1}_{2n+1})^\star$ et H^{2k+1}_{2n+1}, où $n \geq 3$ et $1 \leq k \leq n-2$. De plus, $2k+1$ est l'unique sommet non critique de chacun de ces tournois.*

Une caractérisation des tournois indécomposables n'abritant pas V_5 est obtenue par B.J. Latka [12]. Afin de rappeler cette caractérisation, nous introduisons le tournoi de *Paley* P_7 [11] défini sur $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ par $A(P_7) := \{(i, j) : j - i \in \{1, 2, 4\}\}$. Posons $B_6 := P_7 - 6$. Notons que, pour tout $x \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, $P_7 - x \simeq B_6$.

Proposition 3.3. *(Voir B.J. Latka [12].) À un isomorphisme près, les tournois indécomposables à au moins cinq sommets et n'abritant pas V_5 sont les tournois B_6, P_7, U_{2n+1} et T_{2n+1}, où $n \geq 2$.*

4. Preuve du théorème 1.1

Nous rappelons tout d'abord la remarque suivante.

Remarque 1.

(i) Tout sommet d'un tournoi indécomposable d'au moins trois sommets appartient à un cycle à trois sommets.
(ii) Moyennant le théorème de Latka, un tournoi indécomposable à six sommets est isomporphe à la dualité près à B_6 ou à un tournoi T défini sur $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ comme suit : $T[\{0, 1, 2, 3, 4\}] := V_5$ et $V^+_T(5) \in \{\{2\}, \{0, 1\}, \{0, 3\}, \{1, 3\}, \{0, 4\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2\}\}$.

Rappelons la proposition suivante, qui présente une autre caractérisation des tournois critiques à partir des tournois indécomposables qu'ils abritent.

Proposition 4.1. *(Voir Y. Boudabbous, J. Dammak et P. Ille [3].) Un tournoi indécomposable d'au moins cinq sommets est critique si et seulement si sur chaque ensemble à six sommets le tournoi induit est décomposable.*

Pour la preuve du théorème 1.1, nous utilisons en outre le lemme suivant.

Lemme 4.2. *Soit T un tournoi indécomposable d'au moins six sommets. Si $|S(T)|$ est pair, alors, pour tout sommet x, il existe un ensemble à six sommets contenant x tel que le tournoi induit soit indécomposable.*

Preuve. Par la remarque 1, tout sommet x d'un tournoi indécomposable T appartient à un cycle à trois sommets. Une suite d'applications de la proposition 2.3 prouve l'existence d'un ensemble à six éléments contenant x tel que le tournoi induit soit indécomposable. □

Preuve du théorème.

(i) C'est la proposition 4.1.

(ii) Soit $T := (S, A)$ un tournoi indécomposable. Supposons que T est (−1)-critique en a. Notons tout d'abord que $|S|$ est impair. En effet, il existe une partie Y de S contenant a et telle que le sous-tournoi $T[Y]$ est isomorphe à C_3. Si $|S|$ est pair, une suite d'applications du lemme 2.1 montre qu'il existe un sommet $x \in S - \{a\}$ tel que $T[S - \{x\}]$ soit indécomposable ; ceci est impossible. Supposons, par l'absurde, qu'il existe une partie X à six éléments de S contenant a et telle que $T[X]$ soit indécomposable. Une suite d'applications du lemme 2.1 prouve qu'il existe un sommet $x \in S - \{a\}$ tel que $T[S - \{x\}]$ est indécomposable ; ce qui est impossible. Ensuite, comme le tournoi $T[S - \{a\}]$ est indécomposable et $|S - \{a\}|$ est pair, alors par le lemme 4.2 pour tout $x \in S - \{a\}$, il existe une partie X à six éléments de $S - \{a\}$ contenant x telle que le tournoi $T[X]$ soit indécomposable. Inversement, supposons que a est le seul sommet tel que, sur chaque ensemble de sommets à six éléments contenant a, le tournoi induit soit décomposable. Par le lemme 4.2, $|S|$ est impair. Considérons un élément x de $S - \{a\}$. Comme $|S - \{x\}|$ est pair et il n'existe pas une partie X à six éléments de $S - \{x\}$ contenant a et telle que $T[X]$ soit indécomposable, alors le lemme 4.2 prouve que le tournoi $T[S - \{x\}]$ est décomposable. Enfin, par la proposition 4.1, T n'est pas critique et par suite, T est un tournoi (−1)-critique en a.

(iii) Soit $T := (S, A)$ un tournoi indécomposable. Supposons que T n'est ni critique ni (−1)-critique. Si $|S|$ est pair, alors le lemme 4.2 permet de conclure. Supposons alors que $|S|$ est impair. Comme T n'est, ni critique, ni (−1)-critique, alors il existe deux sommets distincts a et b tels que $T[S - \{a\}]$ et $T[S - \{b\}]$ soient indécomposables. Comme, de plus, $|S - \{a\}|$ et $|S - \{b\}|$ sont pairs, le lemme 4.2 permet de conclure. Inversement, si pour tout sommet x de T, il existe un ensemble de sommets à six éléments contenant x tel que le tournoi induit soit indécomposable, alors, d'après la proposition 4.1 et l'assertion ii) du théorème 1.1, le tournoi T n'est ni critique ni (−1)-critique. □

Du théorème 1.1 et du lemme 2.1 découle le corollaire suivant.

Corollaire 4.3. *Soient T un tournoi indécomposable et m un entier tel que $3 \leq m \leq |S(T)|$ et $m \neq 4$. Si T n'est pas critique, alors il existe un ensemble de sommets à m éléments tel que le tournoi induit soit indécomposable. Si, de plus, T n'est pas (−1)-critique, alors l'ensemble $S(T)$ de ses sommets est l'union de ses parties X à m éléments telles que chaque tournoi induit $T[X]$ soit indécomposable.*

Preuve. Soient T un tournoi indécomposable et m un entier tel que $3 \leq m \leq |S(T)|$ et $m \neq 4$.

Premièrement, supposons que l'entier m est impair. En utilisant la première assertion de la remarque 1 et le lemme 2.1, on voit que, pour tout sommet x de T, il existe un ensemble de sommets à m éléments contenant x sur lequel le tournoi induit est indécomposable ; ce qui permet de conclure.

Deuxièmement, supposons que l'entier m est pair et que T n'est pas critique. Par la proposition 4.1, il existe un ensemble de sommets à six éléments sur lequel le tournoi induit est indécomposable. Ainsi, une suite d'applications du lemme 2.1 prouve qu'il existe un ensemble de sommets à m éléments sur lequel le tournoi induit est indécomposable. Finalement, supposons qu'en plus T n'est pas (−1)-critique. Par le théorème 1.1, pour tout sommet x, il existe un ensemble à six sommets contenant x sur lequel le tournoi induit est indécomposable. Ainsi, une suite d'applications du lemme 2.1 prouve que, pour tout sommet x, il existe un ensemble de sommets à m éléments sur lequel le tournoi induit est indécomposable. Ainsi, l'ensemble $S(T)$ est l'union de ses parties X à m éléments telles que chaque tournoi induit $T[X]$ soit indécomposable. □

Références

[1] H. Belkhechine, I. Boudabbous, J. Dammak, Morphologie des tournois (−1)-critiques, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007) 663–666.
[2] Y. Boudabbous, M. Pouzet, The morphology of infinite tournaments; application to the growth of their profile, Eur. J. Comb. 31 (2) (2010) 461–481.
[3] Y. Boudabbous, J. Dammak, P. Ille, Indecomposablity and duality of tournaments, Discrete Math. 223 (2000) 55–82.
[4] M. Chudnovsky, P. Seymour, Growing without cloning, SIAM J. Discrete Math. 26 (2012) 860–880.
[5] E. Clarou, G. Lopez, Configurations inévitables dans un tournoi indécomposable, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 324 (1997) 1201–1204.
[6] A. Ehrenfeucht, G. Rozenberg, Primitivity is hereditary for 2-structures, Theor. Comput. Sci. 3 (70) (1990) 343–358.
[7] A. Ehrenfeucht, T. Harju, G. Rozenberg, The Theory of 2-Structures. A Framework for Decomposition and Transformation of Graphs, World Scientific, Singapore, 1999.
[8] R. Fraïssé, L'intervalle en théorie des relations, ses généralisations, filtre intervallaire et clôture d'une relation, in : M. Pouzet, D. Richard (Eds.), Orders, Description and Roles, North-Holland, 1984, pp. 313–342.
[9] T. Gallai, Transitiv orientierbare Graphen, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 18 (1967) 25–66.
[10] P. Ille, Indecomposable graphs, Discrete Math. 173 (1997) 71–78.
[11] W.M. Kantor, Automorphism groups of designs, Math. Z. 109 (1969) 246–252.
[12] B.J. Latka, A structure theorem of tournaments omitting N_5, J. Graph Theory 42 (2003) 165–192.

[13] M. Pouzet, I. Zaguia, On minimal prime graphs and posets, Order 26 (4) (2009) 357–375.
[14] M.Y. Sayar, Partially critical indecomposable tournaments and partially critical supports, Contrib. Discrete Math. 6 (2011) 52–76.
[15] J.H. Schmerl, W.T. Trotter, Critically indecomposable partially ordered sets, graphs, tournaments and other binary relational structures, Discrete Math. 113 (1993) 191–205.