C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 353 (2015) 705–709

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Analyse complexe/Géométrie analytique

Approximation polynômiale des jets de Whitney $\bar{\partial}$-plats

Polynomial approximation of $\bar{\partial}$-flat Whitney jets

Moulay Taïb Belghiti [a,1], Laurent P. Gendre [b], Boutayeb El Ammari [a]

[a] *Université Ibn Tofail, 14000 Kénitra, Maroc*
[b] *Université Paul-Sabatier, Institut de mathématiques de Toulouse, France*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 15 décembre 2014
Accepté après révision le 23 avril 2015
Disponible sur Internet le 3 juillet 2015

Présenté par Bernard Malgrange

RÉSUMÉ

Nous obtenons des résultats d'approximation polynômiale de type Bernstein–Jackson pour les jets de Whitney $\bar{\partial}$-plats sur des compacts de $\mathbb{C}^N$. Nous généralisons, en particulier, les résultats de Pawłucki et Pleśniak dans le cas réel et ceux de Siciak pour une dimension complexe.

ABSTRACT

We obtain results of Bernstein–Jackson type on polynomial approximation of Whitney jets that are $\bar{\partial}$-flat on compact subsets of $\mathbb{C}^N$. We extend in particular the results of Pawłucki and Pleśniak to the real case and those of Siciak in the one-dimensional complex case.

1. Notations et résultats

Soit K un compact de $\mathbb{C}^N$. La fonction extrémale de Siciak–Zaharjuta de K est définie comme suit :

$$V_K(z) := \sup\left\{u(z) : u \in L_K(\mathbb{C}^N)\right\}, \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}^N,$$

où $L_K(\mathbb{C}^N) := \{u \in PSH(\mathbb{C}^N) : (\exists c \in \mathbb{R}),\ (\forall z \in \mathbb{C}^N),\ u(z) \leqslant c + \log(1+|z|) \text{ et } u|_K \leqslant 0\}$, est la classe de Lelong de K.

Suivant Pawłucki et Pleśniak [6], K vérifie la condition (**HCP**) (Hölder Continuity Property), s'il existe des constantes $\delta_0,\ C,\ \kappa > 0$ telles que :

$$(\forall z \in \mathbb{C}^N,\ d(z,K) \leqslant \delta_0),\ V_K(z) \leqslant Cd(z,K)^{\kappa}.$$

Des exemples de tels compacts se trouvent dans [6]. Suivant [1] et [4], K vérifie la condition (**ŁS**) (Łojasiewicz–Siciak), s'il existe des constantes $\delta_0,\ C,\ \beta > 0$ telles que :

$$(\forall z \in \mathbb{C}^N,\ d(z,K) \leqslant \delta_0),\ V_K(z) \geqslant Cd(z,K)^{\beta}.$$

Adresses e-mail : belghititaib@yahoo.fr (M.T. Belghiti), lgendre@math.univ-toulouse.fr (L.P. Gendre), elammari@hotmail.fr (B. El Ammari).

[1] Avec le soutien moral du Centre Marocain de Recherches Polytechniques et d'Innovation (CMRPI).

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2015.04.019
1631-073X/

Des exemples de tels compacts se trouvent dans [1,4,2,7].

Soit K un compact de $\mathbb{C}^N \simeq \mathbb{R}^{2N}$, $\mathcal{E}^\infty(K)$ est l'espace de Fréchet des jets $F = (F^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^{2N}}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ au sens de Whitney muni de sa topologie définie par la famille des semi-normes

$$\|F\|_K^m := |F|_K^m + \sup_{\substack{(x,y) \in K \times K, x \neq y \\ \alpha \in \mathbb{N}^{2N}, |\alpha| \leqslant m}} \left| \frac{R_y^{\alpha, m-|\alpha|} F(x)}{(x-y)^{m-|\alpha|}} \right|, \tag{1}$$

où $|F|_K^m := \max_{\alpha \in \mathbb{N}^{2N}, |\alpha| \leqslant m} \left\| F^\alpha \right\|_K$ et $(R_x^{\alpha,m} F)(y) := F^\alpha(y) - \sum_{|\beta| \leqslant m} F^{\alpha+\beta}(x) \frac{(y-x)^\beta}{\beta!}$, pour $(m, \alpha, x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{2N} \times K \times K$, $\|.\|_K$ est la norme uniforme sur K. Soit $F = (F^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^{2N}} \in \mathcal{E}^\infty(K)$, on pose $\widetilde{D}^\beta(F) := (F^{\beta+\alpha})_{\alpha \in \mathbb{N}^{2N}}$, pour $\beta \in \mathbb{N}^{2N}$, et $\widetilde{D}_j := \widetilde{D}^{<j>}$ avec $<j> = (\delta_{j,1}, \ldots, \delta_{j,2N})$ où $\delta_{j,k}$ est le symbole de Kronecker. Pour $j \in \{1, \ldots, N\}$, on pose : $\widetilde{D}''_j := \frac{\widetilde{D}_j + i\widetilde{D}_{j+N}}{2}$. On définit $\mathcal{A}^\infty(K) := \{F \in \mathcal{E}^\infty(K) : \widetilde{D}^\alpha \left(\widetilde{D}''_j F\right) = 0,$ pour tout $j \in \{1, \ldots, N\}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^{2N}\}$, le sous-espace de $\mathcal{E}^\infty(K)$ des jets $\bar{\partial}$-plats sur K. Nous avons les résultats suivants.

Pour $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2N}) \in \mathbb{N}^{2N}$ et $f \in \mathcal{C}^\infty$, on pose $D_z^\alpha f := D^\alpha \widetilde{f}$ où $f(z_1, \ldots, z_N) := \widetilde{f}(\Re(z_1), \ldots, \Re(z_N), \Im(z_1), \ldots, \Im(z_n))$ et $D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_{2N}^{\alpha_{2N}}}$.

Théorème 1. *Soient K un compact de $\mathbb{C}^N$ vérifiant (**HCP**) et (**ŁS**) et $F := \left(F^\alpha\right)_{\alpha \in \mathbb{N}^{2N}}$ un jet de $\mathcal{A}^\infty(K)$. Il existe une suite $(\mathbf{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N]$ avec $\deg(\mathbf{P}_n) \leq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{N}^{2N}$, il existe $C(k, \alpha) > 0$ tel que*

$$\left\| F^\alpha - D_z^\alpha \mathbf{P}_n \right\|_K \leq C(k, \alpha) \frac{1}{n^k} \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}^*. \tag{2}$$

Théorème 2. *Soient K un compact de $\mathbb{C}^N$ vérifiant (**HCP**) et (**ŁS**), $F := \left(F^\alpha\right)_{\alpha \in \mathbb{N}^{2N}}$ un jet de $\mathcal{A}^\infty(K)$ et $(\mathbf{P}_n)_n$ une suite de polynômes donnée par le Théorème 1. Si l'on pose $\mathbf{e}_n^\alpha(z) := F^\alpha(z) - D_z^\alpha \mathbf{P}_n(z)$, pour $(\alpha, n, z) \in \mathbb{N}^{2N} \times \mathbb{N}^* \times K$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{N}^{2N}$, tels que $|\alpha| \leq m$, il existe $C(k, m, \alpha, K) > 0$ tel que*

$$\frac{\left| R_\xi^{\alpha, m-|\alpha|} \mathbf{e}_n(z) \right|}{|\xi - z|^{m-|\alpha|}} \leq \frac{C(k, m, \alpha, K)}{n^k}, \tag{3}$$

pour tous $\xi, z \in K$ tels que $\xi \neq z$ et pour tout n entier assez grand.

Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^N)$, on pose $J_K^\infty(f) := ((D_z^\alpha f)|K)_{\alpha \in \mathbb{N}^{2N}}$, où $(.)|K$ est la restriction sur K de la fonction $(.)$.

Théorème 3. *Soit K un compact de $\mathbb{C}^N$ vérifiant (**HCP**) et (**ŁS**), et F un jet de $\mathcal{A}^\infty(K)$. Il existe une suite $(\mathbf{P}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de polynômes de $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N]$ tels que $\deg(\mathbf{P}_n) \leq n$ et tels que, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $C(k, m) > 0$ vérifiant*

$$\|F - \Pi_n\|_K^m \leq C(m, k) \frac{1}{n^k}, \quad \textit{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}^*, \tag{4}$$

et où $\Pi_n := J_K^\infty(\mathbf{P}_n)$. Réciproquement, si F est un jet sur K pour lequel il existe une suite $(\mathbf{P}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de polynômes de $\mathbb{C}[z_1, \ldots, z_N]$ telle que $\deg(\mathbf{P}_n) \leq n$ et si, pour tout $(m, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, il existe $C(m, k) > 0$ vérifiant (4), alors $F \in \mathcal{A}^\infty(K)$.

2. Démonstration des résultats

2.1. Preuve du Théorème 1

Les propriétés (**HCP**) et (**ŁS**) entrainent que K est s-H convexe pour un $s \geq 1$. La proposition 3 de [3] stipule que pour $\rho > 0$, il existe B, C, $0 < B < 1 < C$, dépendant de K, ρ, s, N, et il existe des fonctions w_i $i = 1, \ldots, N$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $O(B, s) := \{(\zeta, z) \in (\mathcal{V}(K) \setminus K) \times \mathbb{C}^N : d(z, K) < B \cdot d(\zeta, K)^s\}$ et holomorphes en z dans $O(B, s, \zeta) := \{z \in \mathbb{C}^N : d(z, K) < B \cdot d(\zeta, K)^s\}$ pour tout $\zeta \in V(K) \setminus K$, où $\mathcal{V}(K) := \{z \in \mathbb{C}^N : d(z, K) < 1\}$. Soit f une extension de Whitney de $F \in \mathcal{A}^\infty(K)$. La $\bar{\partial}$-platitude de F implique que, pour tout $t > 0$, il existe $c_t > 0$ telle que

$$\left| \bar{\partial} f(\zeta) \right| \leq c_t d(\zeta, K)^t, \quad \text{pour tout } \zeta \in \mathbb{C}^N. \tag{5}$$

Par le théorème 18 de [3], on a la représentation intégrale

$$F^\alpha(z) = \int_{\mathcal{V}(K)} \bar{\partial} f(\zeta) \wedge D_z^\alpha H(\zeta, z), \quad z \in K, \tag{6}$$

avec $H(\zeta,z)=\frac{(N-1)!}{(2i\pi)^N}\omega'_{\zeta}\left(\frac{w(\zeta,z)}{\phi(\zeta,z)}\right)\wedge\omega(\zeta)$ et $\phi(\zeta,z)=\sum_{j=1}^N w_j(\zeta,z)(z_j-\zeta_j)$, où $\omega'_{\zeta}\left(\frac{w(\zeta,z)}{\phi(\zeta,z)}\right)$ et $\omega(\zeta)$ sont définies comme en pp. 140 et 141 de [3], cf. aussi [5]. De plus, il existe $E>0$ tel que, pour tout $\alpha\in\mathbb{N}^{2N}$:

$$\left|D_z^\alpha H(\zeta,z)\right|\le E^{|\alpha|+1}\,|\alpha|!d(\zeta,K)^{-(Ns+\rho)(2N-2)-1-|\alpha|\cdot s}. \tag{7}$$

Nous obtiendrons une approximation polynômiale de F^α en remplaçant dans (6) $D_z^\alpha H(\zeta,z)$ par un approximant polynômial convenable. On écrit que $F^\alpha(z)=\sum_{j=1}^N F_j^\alpha(z)$, avec $F_j^\alpha(z):=\int_{\mathcal{V}(K)}(-1)^{j-1}\frac{\partial f}{\partial\bar\zeta_j}(\zeta)D_z^\alpha H_{J(j)}(\zeta,z)\omega(\bar\zeta)\wedge\omega(\zeta)$, $z\in K$, et $H_{J(j)}(\zeta,z)$ est la composante de $H(\zeta,z)$ qui correspond à $J(j)=(1<..<j-1<j+1<..<N)$.

Au couple (B,s) on associe la jauge $R(\zeta):=\sup\{\lambda>1:\mathcal{U}_\lambda\subset O(B,s,\zeta)\}$ de la fonction extrémale V_K, pour $\zeta\in\mathcal{V}(K)\setminus K$, avec $\mathcal{U}_\lambda=\{z\in\mathcal{V}(K)\setminus K:V_K(z)<\log(\lambda)\}$. Pour tout $A>0$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on considère la zone de niveau $L_{A,n}:=\{\zeta\in\mathcal{V}(K)\setminus K: R(\zeta)\ge 1+\frac{A}{n}\}$.

Maintenant, pour tout $z\in K$, on pose :

$$P_{n\cdot d_n,j}(z):=\int_{L_{A,n}}(-1)^{j-1}\frac{\partial f}{\partial\bar\zeta_j}\mathbf{L}_{n\cdot d_n}\left(H_{J(j)}(\zeta,z)\right)\omega(\bar\zeta)\wedge\omega(\zeta)\quad\text{et}\quad P_{n\cdot d_n}(z):=\sum_{j=1}^N P_{n\cdot d_n,j}(z), \tag{8}$$

où (d_n) est une suite croissante d'entiers à choisir ultérieurement, $\mathbf{L}_{nd_n}$ est l'opérateur d'interpolation polynômiale de Lagrange associé à un sytème de $m_{n\cdot d_n}\left(:=\binom{N+n\cdot d_n}{n\cdot d_n}\right)$ points extrémaux de Fekete–Leja du compact K. On écrit que :

$$\begin{aligned}\left|F_j^\alpha(z)-D_z^\alpha P_{n\cdot d_n,j}(z)\right|\le&\int_{\mathcal{V}(K)\setminus L_{A,n}}\left|\frac{\partial f}{\partial\bar\zeta_j}(\zeta)\right|\left|D_z^\alpha H_{J(j)}(\zeta,z)\right|\left|\omega(\bar\zeta)\wedge\omega(\zeta)\right|\\&+\int_{L_{A,n}}\left|\frac{\partial f}{\partial\bar\zeta_j}(\zeta)\right|\left|D_z^\alpha H_{J(j)}(\zeta,z)-D_z^\alpha\mathbf{L}_{n\cdot d_n}(H_{J(j)})(\zeta,z)\right|\left|\omega(\bar\zeta)\wedge\omega(\zeta)\right|.\end{aligned} \tag{9}$$

Par l'inégalité de Markov, vérifiée puisque K satisfait la condition (**HCP**), on a :

$$\begin{aligned}&\left|D_z^\alpha\mathbf{L}_{(n+1)\cdot d_{n+1}}H_{J(j)}(\zeta,z)-D_z^\alpha\mathbf{L}_{n\cdot d_n}(H_{J(j)})(\zeta,z)\right|\\&\quad\le C\left((n+1)d_{n+1}\right)^{r|\alpha|}\left\|\mathbf{L}_{(n+1)\cdot d_{n+1}}H_{J(j)}(\zeta,.)-\mathbf{L}_{n\cdot d_n}(H_{J(j)})(\zeta,.)\right\|_K.\end{aligned} \tag{10}$$

La fonction $H_{J(j)}(\zeta,.)$ est holomorphe en $z\in O(B,s,\zeta)$, $(\zeta\in\mathcal{V}(K)\setminus K)$, de sorte qu'on peut appliquer la méthode développée par A. Zeriahi dans [9], pour aboutir à

$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{L}_{n\cdot d_n}(H_{J(j)})(\zeta,z)-H_{J(j)}(\zeta,z)\right\|_K\leqslant& C.(nd_n)^N\frac{1}{R(\zeta)^{\frac{n\cdot d_n}{2}\left((2\delta-1)-\frac{3(N+M)}{n}\right)}}\\&\times\left(\frac{2(1+N+M)}{R(\zeta)^{\frac{d_n}{2}\left((2\delta-1)-\frac{3(N+M)}{n}\right)}}\right)^n\times\frac{1}{\left(R(\zeta)^{\delta\cdot d_n}-1\right)^{2(N+M)}}\times\frac{1}{(R(\zeta)-1)^{\frac{q}{\kappa}}},\end{aligned} \tag{11}$$

où C,M,q,κ et δ sont des constantes positives dépendant de K et H. Soit $k_0\in\mathbb{N}^*$, avec le choix $d_n:=k_0\cdot n$ on peut trouver $A>0$ pour lequel il existe $\widetilde{C}>0$ et $\eta\in]0,1[$ tel que, pour $\zeta\in L_{A,n}$, on a : $\left\|\mathbf{L}_{n\cdot d_n}(H_{J(j)})(\zeta,z)-H_{J(j)}(\zeta,z)\right\|_K\leqslant\widetilde{C}\eta^n$; ce qui donne :

$$\left\|D_z^\alpha\mathbf{L}_{(n+1)\cdot d_{n+1}}H_{J(j)}(\zeta,z)-D_z^\alpha\mathbf{L}_{n\cdot d_n}(H_{J(j)})(\zeta,z)\right\|_K\le C_{A,\alpha}\eta^n. \tag{12}$$

Par suite, $D_z^\alpha(H_{J(j)})(\zeta,z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(D_z^\alpha\mathbf{L}_{(n+1)\cdot d_{n+1}}H_{J(j)}(\zeta,z)-D_z^\alpha\mathbf{L}_{n\cdot d_n}(H_{J(j)})(\zeta,z)\right)+D_z^\alpha\mathbf{L}_{d_1}(H_{J(j)})(\zeta,z)$. À partir de (9) on obtient :

$$\left|F_j^\alpha(z)-D_z^\alpha P_{n\cdot d_n,j}(z)\right|\le C(f,\alpha).\eta^n+\int_{\mathcal{V}(K)\setminus L_{A,n}}\left|\frac{\partial f}{\partial\bar\zeta_j}(\zeta)\right|\left|D_z^\alpha H_{J(j)}(\zeta,z)\right|\left|\omega(\bar\zeta)\wedge\omega(\zeta)\right|. \tag{13}$$

Par la condition (**ŁS**), la jauge vérifie $R(\zeta)\geqslant 1+cd(\zeta,K)^\beta$, $\zeta\in\mathcal{V}(K)\setminus K$, et donc $\mathcal{V}(K)\setminus L_{A,n}\subseteq\{\zeta\in\mathcal{V}(K)\setminus K:d(\zeta,K)\le\left(\frac{A}{c\cdot n}\right)^{\frac{1}{\beta}}\}$, de sorte qu'en utilisant (7) et pour $p\in\mathbb{N}^*$ et $c(p)>0$ correspondante dans (5), le deuxième terme du second membre de (13) est majoré par la quantité $C'\cdot c(p).E^{|\alpha|+1}(|\alpha|)!\left(\frac{A}{c\cdot n}\right)^{\frac{p-(N.s+\rho)(2N-2)-1-|\alpha|.s}{\beta}}$. Avec le choix $p>(N.s+\rho)(2N-2)+1+|\alpha|s+k\beta$ et pour $\eta\in]0,1[$ convenable, il existe $C(\alpha,f)>0$ vérifiant $\left\|F^\alpha-D_z^\alpha P_{n\cdot d_n}\right\|_K\le\frac{C(\alpha,f)}{n^{2k}}$. Avec le choix sur $(d_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$, si l'on pose $\mathbf{P}_n:=P_{j\cdot d_j}$, pour n et j tels que $jd_j\le n<(j+1)d_{j+1}$, la suite $(\mathbf{P}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est alors une solution du problème.

2.2. Preuve du Théorème 2

Soient $A > 0$ et $(d_n)_n$ une suite croissante d'entiers positifs choisie comme dans la preuve du Théorème 1. Pour $(\alpha, n, z) \in \mathbb{N}^{2N} \times \mathbb{N}^* \times K$, on pose : $e^{\alpha}_{n\cdot d_n}(z) := F^{\alpha}(z) - D^{\alpha}_z P_{n\cdot d_n}(z)$. On écrit que $e^{\alpha}_{n\cdot d_n}(z) = I^{\alpha}_{n\cdot d_n}(z) + J^{\alpha}_{n\cdot d_n}(z)$, où :

$$I^{\alpha}_{n\cdot d_n}(z) = \frac{(N-1)!}{(2i\pi)^N} \int\limits_{L_{A,n}} \bar{\partial} f(\zeta) \wedge D^{\alpha}_z \left(H(\zeta, z) - \mathbf{L}_{n\cdot d_n}(H)(\zeta, z)\right), \quad \text{et}$$

$$J^{\alpha}_{n\cdot d_n}(z) = \frac{(N-1)!}{(2i\pi)^N} \int\limits_{\mathcal{V}(K)\setminus L_{A,n}} \bar{\partial} f(\zeta) \wedge D^{\alpha}_z \left(H(\zeta, z)\right).$$

Comme $\bar{\partial} f$ vérifie (5), alors avec les notations (légèrement modifiées) de la preuve de la proposition 10 en pages 137, 138 et 139 de [3], pour $\alpha \in \mathbb{N}^{2N}$, les coefficients de la forme :

$$a^{\alpha}(\zeta, z) := \begin{cases} \bar{\partial} f(\zeta) \wedge D^{\alpha}_z H(\zeta, z), \text{ si } \zeta \in \mathcal{V}(K) \setminus K \\ 0, \text{ si } \zeta \in K \end{cases}$$

sont des fonctions continues sur $O(B, s) \cup (K \times K)$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}^{2N}$, $\zeta \in \mathcal{V}(K)$ et $\xi, z \in K$, on pose :

$$R^{\alpha,m}_{\xi} \mathbb{A}(\zeta, z) = a^{\alpha}(\zeta, z) - \sum_{|\mu| \le m} \frac{(z-\xi)^{\mu}}{\mu!} a^{\alpha+\mu}(\zeta, \xi).$$

Par la propriété (**ŁS**) on a $\mathcal{V}(K) \setminus L_{A,n} \subseteq \{\zeta \in \mathcal{V}(K) \setminus K : d(\zeta, K) \le \left(\frac{A}{c\cdot n}\right)^{\frac{1}{\beta}}\}$ (pour un certain $\beta > 0$) ; par ailleurs, de (7) combinée avec le choix $p > (m+1+|\alpha|)s + (Ns+\rho)(2N-2)+1$ dans (5), on déduit de la preuve de la proposition 10 de [3] (pp. 137 et 139) que, pour $(\xi, z, n, m, \alpha) \in K \times K \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{2N}$, on a :

$$\left|R^{\alpha,m}_{\xi} J_{n\cdot d_n}(z)\right| \le C^{m+1+|\alpha|} |\alpha|! |\xi - z|^{m+1} c(p) \left(\frac{A}{c\cdot n}\right)^{\frac{p-(m+1+|\alpha|)s-(Ns+\rho)(2N-2)-1}{\beta}};$$

puis avec le nouveau choix $p > k\beta + (m+1+|\alpha|)s + (Ns+\rho)(2N-2)+1$, on a $\frac{\left|R^{\alpha,m-|\alpha|}_{\xi} J_{n\cdot d_n}(z)\right|}{|\xi-z|^{m-|\alpha|}} \le C_1(k, m, \alpha, K)\frac{1}{n^{2k}}$, pour tout $|\alpha| \le m$.

Par ailleurs, comme ci-dessus, les coefficients de la forme :

$$b^{\alpha}(\zeta, z) := \begin{cases} \bar{\partial} f(\zeta) \wedge D^{\alpha}_z \left(H(\zeta, z) - \mathbf{L}_{n\cdot d_n}(H)(\zeta, z)\right), \text{ si } \zeta \in \mathcal{V}(K) \setminus K \\ 0, \text{ si } \zeta \in K \end{cases}$$

sont des fonctions continues sur $O(B, s) \cup (K \times K)$. Pour $(m, \alpha, \xi, z, \zeta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{2N} \times K \times K \times \mathcal{V}(K)$, on pose : $R^{\alpha,m}_{\xi} \mathbb{B}(\zeta, z) = b^{\alpha}(\zeta, z) - \sum_{|\beta| \le m} \frac{(z-\xi)^{\beta}}{\beta!} b^{\alpha+\beta}(\zeta, \xi)$.

On sait qu'il existe $\eta \in]0, 1[$, $C = C(\alpha, \eta, A) > 0$ vérifiant, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\zeta \in L_{A,n}$ et $z \in K$,

$$\left\| D^{\alpha}_z \left(H_{J(j)}(\zeta, z) - \mathbf{L}_{n\cdot d_n}(H_{J(j)})(\zeta, z)\right) \right\|_K \le C\eta^n \le C\eta^n |\alpha|! d(\zeta, K)^{-|\alpha|.s}.$$

Par la propriété (**HCP**) on a $L_{A,n} \subseteq \{\zeta \in \mathcal{V}(K) \setminus K : d(\zeta, K) \ge \left(\frac{A}{c\cdot n}\right)^{\frac{1}{\kappa}}\}$ (pour un certain $\kappa > 0$) ; par ailleurs, de (5) combinée avec le choix $p < (m+1+|\alpha|)s$, on déduit de la preuve de la proposition 10 de [3] que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ assez grand, $m \in \mathbb{N}$, $\xi \ne z$ dans K et $\alpha \in \mathbb{N}^{2N}$ tel que $|\alpha| \le m$:

$$\begin{aligned} \left|R^{\alpha,m}_{\xi} I_{n\cdot d_n}(z)\right| &\le \frac{(N-1)!}{(2\pi)^N} \int\limits_{L_{A,n}} \left|R^{\alpha,m}_{\xi} \mathbb{B}(\zeta, z)\right| \\ &\le C'^{m+1+|\alpha|} |\alpha|! |\xi - z|^{m+1} c(p) \left(\frac{A}{c}\right)^{\frac{p-(m+1+|\alpha|)s}{\kappa}} \lambda_{2N}(\mathcal{V}(K)) n^{\frac{(m+1+|\alpha|)s-p}{\kappa}} \eta^n. \end{aligned}$$

Ce qui donne $\frac{\left|R^{\alpha,m-|\alpha|}_{\xi} e_{n\cdot dn}(z)\right|}{|\xi-z|^{m-|\alpha|}} \le \frac{C(k,m,\alpha,K)}{n^{2k}}$.

Comme $\mathbf{P}_n = P_{jd_j}$ pour tout n et j tels que $jd_j \le n < (j+1)d_{j+1}$, on a $\mathbf{e}^{\alpha}_n = e^{\alpha}_{j\cdot d_j} = F^{\alpha}(z) - D^{\alpha}_z \mathbf{P}_n(z)$ et donc : $\frac{\left|R^{\alpha,m-|\alpha|}_{\xi} \mathbf{e}_n(z)\right|}{|\xi-z|^{m-|\alpha|}} \le \frac{C(k,m,\alpha,K)}{n^k}$.

2.3. Preuve du Théorème 3

La partie directe résulte des Théorèmes 1 et 2 et la réciproque suit une démarche analogue à celle présentée dans le théorème 1.6 en page 146 de [8].

Remarques. 1. Si $K \subset \mathbb{R}^N$, le Théorème 3 est plus précis que le résultat de Pawłucki et Pleśniak dans [6].

2. Si $N = 1$, le Théorème 3 est plus précis que le résultat de Siciak dans [8].

3. Si $K \subset \mathbb{C}^N$ est Whitney 1-régulier et f une extension de Whitney de $F \in \mathcal{A}^\infty$, alors f est holomorphe sur $\overset{\circ}{K}$ et donc $F^\alpha = D_z^\alpha f = (i)^{|\alpha''|} \partial_z^{\widetilde{\alpha}} f$ et cette fonction se prolonge continûment jusqu'au bord ∂K (où $\alpha'' := (\alpha_{N+1}, \ldots, \alpha_{2N}) \in \mathbb{N}^N$ et $\widetilde{\alpha} := (\alpha_1 + \alpha_{N+1}, \ldots, \alpha_N + \alpha_{2N}) \in \mathbb{N}^N$ pour $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2N}) \in \mathbb{N}^{2N}$), de sorte que l'on obtient une approximation polynômiale de toutes les dérivées complexes de f sur K ; donc le Théorème 3 contient le résultat qui a été annoncé sous une forme plus faible dans [1] et [4].

Références

[1] M.T. Belghiti, Éléments pour une théorie constructive des fonctions lisses, Thèse de doctorat d'État ès-sciences déposée pour soutenance en décembre 2004, université Ibn-Tofaïl, Kénitra, Maroc.
[2] L. Białas-Ciez, M. Kosek, Iterated function systems and Łojasiewicz–Siciak condition of Green function, Potential Anal. 34 (2011) 207–221.
[3] J. Chaumat, A.-M. Chollet, Représentation intégrale de certaines classes de jets de Whitney, Contemp. Math. 137 (1992) 133–153.
[4] L. Gendre, Inégalités de Markov singulières et approximation des fonctions holomorphes de la classe M, PhD thesis, Université Paul-Sabatier, Toulouse-3, 2005.
[5] G.M. Henkin, J. Leiterer, Theory of Functions on Complex Manifolds, Monographs in Math., Birkhäuser, 1984.
[6] W. Pawłucki, W. Pleśniak, Markov's inequality and $\mathcal{C}^\infty$ functions on sets with polynomial cusps, Math. Ann. 275 (1986) 467–480.
[7] R. Pierzchała, An estimate for the Siciak extremal function subanalytic and o-minimal geometry approach, Preprint.
[8] J. Siciak, Rapid polynomial approximation on compact sets in $\mathbb{C}^N$, Univ. Iagel. Acta Math. 30 (1993) 145–154.
[9] A. Zeriahi, Meilleure approximation polynômiale et croissance des fonctions entières sur certaines variétés algébriques affines, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 37 (2) (1987) 79–104.