C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 353 (2015) 871–876

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Théorie des nombres

Un cadre explicite pour les polylogarithmes multiples p-adiques et les multizêtas p-adiques

An explicit framework for p-adic multiple polylogarithms and p-adic multiple zeta values

David Jarossay

Institut de mathématiques de Jussieu Paris Rive-gauche, Université Paris-Diderot, 4, place Jussieu, 75005 Paris, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 24 juin 2015
Accepté le 15 juillet 2015
Disponible sur Internet le 12 août 2015

Présenté par le comité de rédaction

RÉSUMÉ

Nous définissons un cadre explicite, faisant intervenir des sommes de séries, pour exprimer les polylogarithmes multiples p-adiques tordus par Frobenius et les multizêtas p-adiques. Ce cadre est constitué de deux types d'outils : des opérations liées au groupe fondamental de $\mathbb{P}^1\backslash\{0,1,\infty\}$, qui permettent de se ramener à calculer des intégrales itérées régularisées « élémentaires », et le calcul p-adique de chaque telle intégrale itérée élémentaire. Les formules explicites obtenues impliquent des bornes, non optimales, sur la valuation des multizêtas p-adiques. Il s'agit d'un résumé de l'article [6].

ABSTRACT

We define an explicit framework, involving sums of series, for p-adic multiple polylogarithms twisted by Frobenius, and for p-adic multiple zeta values. This framework is made of two types of combinatorial tools: operations related to the fundamental group of $\mathbb{P}^1\backslash\{0,1,\infty\}$, which enable us reduce ourselves to the computation of "elementary" regularized iterated integrals, and the p-adic computation of each such elementary iterated integral. The explicit formulae that are obtained imply non-optimal bounds on the valuation of p-adic multiple zeta values. This is a summary of the paper [6].

1. Préliminaires

1.1. Groupe fondamental de De Rham de $\mathbb{P}^1\backslash\{0,1,\infty\}$

Définition. Soit $X=\mathbb{P}^1\backslash\{0,1,\infty\}$ sur $\mathbb{Q}$. Soit $(\pi_1^{\mathrm{mot}}(X;y,x))_{x,y}$ le groupoïde fondamental motivique de X ([1,2]) ; ses fibres en ses points-base rationnels (y compris tangentiels) sont des schémas dans la catégorie tannakienne $\mathrm{MTM}(\mathbb{Q})$ des motifs

Adresse e-mail : david.jarossay@imj-prg.fr.

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2015.07.007
1631-073X/© 2015 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

de Tate mixtes sur $\mathbb{Q}$ et, pour les points-base que l'on considèrera, dans sa sous-catégorie pleine $\mathrm{MTM}(\mathbb{Z})$ des motifs non ramifiés sur $\mathbb{Z}$. Soit $(\pi_1^{\mathrm{dR}}(X;y,x))_{x,y}$ sa réalisation de De Rham ([1], §12).

Description concrète. Pour R une $\mathbb{Q}$-algèbre, $R\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle$ est l'algèbre des séries formelles à deux variables e_0, e_1 qui ne commutent pas. Soit $\epsilon : R\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle \to R$ le morphisme d'augmentation, qui associe à une série formelle son coefficient constant. Soit $\Delta_{ш} : R\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle \to R\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle \hat{\otimes} R\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle$ l'unique morphisme d'algèbres, continu pour la topologie $\ker(\epsilon)$-adique, vérifiant $\Delta_{ш}(e_i) = e_i\hat{\otimes}1 + 1\hat{\otimes}e_i$, pour $i=0,1$. L'algèbre de Hopf $R\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle$, ayant comme coproduit $\Delta_{ш}$, antipode $S : e_{i_r}\dots e_{i_1} \mapsto (-1)^r e_{i_1}\dots e_{i_r}$, et co-unité ϵ est duale à l'algèbre de Hopf de mélange $\mathcal{H}_{ш} = R\langle e_0,e_1\rangle$. Celle-ci est, pour $R=\mathbb{Q}$, l'algèbre de Hopf du $\mathbb{Q}$-schéma en groupes $R \mapsto \{f \in R\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle \text{ t.q. } \Delta_{ш}(f) = f\hat{\otimes}f, \epsilon(f)=1\}$. Ce schéma en groupes est canoniquement isomorphe à chaque $\pi_1^{\mathrm{dR}}(X;y,x)$, de manière compatible à la structure de groupoïde de $\pi_1^{\mathrm{dR}}(X)$. Son algèbre de Lie est donnée par $R \mapsto \{f \in R\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle \text{ t.q. } \Delta_{ш}(f) = f\hat{\otimes}1 + 1\hat{\otimes}f\}$.

Nous considérerons avant tout les point-bases tangentiels $\vec{1}$ en 0, $-\vec{1}$ en 1, et l'image de $-\vec{1}$ en 1 par $(z\mapsto \frac{z}{z-1})_*$, que nous noterons respectivement 0, 1 et ∞ pour simplifier.

Un élément f de $R\langle\langle e_0,e_1\rangle\rangle$ s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{w \text{ mot en } e_0,e_1} f[w]w$. La notation $f[w]$ s'étend à tous les $w \in \mathcal{H}_{ш}$ par linéarité. Le poids d'un mot est son nombre total de lettres ; sa profondeur est son nombre de lettres égales à e_1.

Connexion KZ et polylogarithmes multiples. Le groupoïde fondamental est muni d'une connexion nilpotente appelée la connexion KZ (Knizhnik–Zamolodchikov). Sur le torseur $(\pi_1^{\mathrm{dR}}(X;z,0))_z$, la connexion est donnée par $\nabla_{\mathrm{KZ}} : f \mapsto \mathrm{d}f - (e_0\frac{\mathrm{d}z}{z} + e_1\frac{\mathrm{d}z}{z-1})f$. Les sections horizontales sont appelées polylogarithmes multiples.

Action du groupe de Galois motivique sur $\pi_1^{\mathrm{dR}}(X;1,0)$. Le groupe de Galois G^ω de $\mathrm{MTM}(\mathbb{Z})$, relatif au foncteur de réalisation de De Rham ω, est un produit semi-direct $G^\omega = \mathbb{G}_m \ltimes U^\omega$, où U^ω est pro-unipotent. L'action de U^ω sur $\pi_1^{\mathrm{dR}}(X;1,0)$ se factorise, via l'application $U^\omega \to \pi_1^{\mathrm{dR}}(X;1,0)$, $f \mapsto f.({}_11_0)$, où ${}_11_0$ est le chemin canonique de [1], §12, par l'opération suivante : pour f,g des points de $\pi_1^{\mathrm{dR}}(X;1,0)$, $g\circ f = g.f(e_0, g^{-1}e_1g)$: c'est une loi de groupe sur $\pi_1^{\mathrm{dR}}(X;1,0)$, appelée la loi de groupe d'Ihara. Le sous-groupe $\mathbb{G}_m$ de G^ω agit par $\lambda \mapsto \tau(\lambda) = $ (multiplication par λ^{poids}), c'est-à-dire : $\tau(\lambda) : f \mapsto f(\lambda e_0, \lambda e_1)$.

1.2. Action de Frobenius et multizêtas p-adiques

On fixe un nombre premier p.

Action de Frobenius. Il existe un pull-back par Frobenius F^* de $(\pi_1^{\mathrm{dR}}(X\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p), \nabla_{\mathrm{KZ}})$ ([1], §11), et on a un isomorphisme horizontal ([1], §11.11, §11.12) :

$$F_* : (\pi_1^{\mathrm{dR}}(X\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p), \nabla_{\mathrm{KZ}}) \xrightarrow{\sim} F^*(\pi_1^{\mathrm{dR}}(X\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}_p), \nabla_{\mathrm{KZ}}).$$

Pour les deux définitions suivantes, plusieurs conventions existent : on peut considérer l'action du Frobenius ou son inverse, et on peut multiplier ou non par un facteur p^{poids}, c'est-à-dire appliquer ou non $\tau(p)$. Nous décidons de considérer à la fois le Frobenius et son inverse, qui joueront des rôles différents, ainsi que tous leurs itérés ; on a donc, pour chaque $k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, une version des multizêtas p-adiques. Le fait de considérer tous les itérés aura des applications aux multizêtas finis dans l'article [7]. Pour ce qui est des facteurs p^{poids}, nous les choisissons de telle sorte que les bornes obtenues pour les valuations des multizêtas p-adiques soient uniformes par rapport à k.

Polylogarithmes multiples p-adiques (version de Deligne). Suivant [1] §19.6, considérons le complété formel de $\mathbb{P}^1/\mathbb{Z}_p$ le long de la réduction modulo p de $\mathbb{P}^1\backslash\{1\}$. Sa fibre générique est l'espace analytique rigide $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}\backslash]1[$ sur $\mathbb{Q}_p$. Il est muni du relèvement du Frobenius $z\mapsto z^p$. Soient pour $k\in\mathbb{N}^*$, les polylogarithmes multiples p-adiques (on les généralise à toutes les valeurs de k) : pour z un point de $\mathbb{P}^{1,an}$ sur $\mathbb{Q}_p$,

$$\mathrm{Li}_{p^k}(z) = {}_01_{F_*^k(z)} F_*^k({}_z1_0) \in \pi_1^{\mathrm{dR}}(X;0,0)(\mathbb{Q}_p) \tag{1}$$

$$\mathrm{Li}_{p^{-k}}(z) = \tau(p^k)\big({}_01_{F_*^{-k}(z)} F_*^{-k}({}_z1_0)\big) \in \pi_1^{\mathrm{dR}}(X;0,0)(\mathbb{Q}_p) \tag{2}$$

Multizêtas p-adiques (version de Deligne). ($\Phi_{p^{-1}}$ est défini dans [2] §5.28) Pour $k\in\mathbb{N}^*$, soit :

$$\Phi_{p^k} = F_*^k({}_11_0) \in \pi_1^{\mathrm{dR}}(X;1,0)(\mathbb{Q}_p) \tag{3}$$

$$\Phi_{p^{-k}} = \tau(p^k)F_*^{-k}({}_11_0) \in \pi_1^{\mathrm{dR}}(X;1,0)(\mathbb{Q}_p) \tag{4}$$

Multizêtas p-adiques (version de Furusho). ([4,5].) On note Φ_{p^∞} l'unique élément de $\pi_1^{\mathrm{dR}}(X;1,0)(\mathbb{Q}_p)$ invariant par F_*, et $\Phi_{p^{-\infty}}$ son inverse pour l'action d'Ihara.

Enfin, pour $k\in(\mathbb{Z}\backslash\{0\})\cup\{\pm\infty\}$, $d\in\mathbb{N}^*$, $(s_d,\dots,s_1)\in(\mathbb{N}^*)^d$, soit $\zeta_{p^k}(s_d,\dots,s_1) = (-1)^d\Phi_{p^k}[e_0^{s_d-1}e_1\dots e_0^{s_1-1}e_1]$.

2. Étapes du calcul des multizêtas p-adiques

On systématise et on revisite la méthode de Ünver [9].

2.1. Lien entre les diverses variantes des multizêtas p-adiques

On peut relier entre eux les coefficients des versions des associateurs p-adiques évoqués plus haut ; en particulier, on peut relier : 1) les Φ_{p^k}, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, et Φ_{p^∞}, $\Phi_{p^{-\infty}}$; 2) les Φ_{p^k}, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, et $\Phi_{p^{\pm 1}}$; 3) tous les associateurs Φ_{p^k}, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \cup \{\pm\infty\}$, et leurs analogues dans $\pi_1^{\mathrm{dR}}(X;\infty,0)(\mathbb{Q}_p)$.

Nous décrivons ici cette troisième comparaison. Si f est l'un des Φ_{p^k}, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \cup \{\pm\infty\}$, alors sa variante f_∞ dans $\pi_1^{\mathrm{dR}}(X;\infty,0)(\mathbb{Q}_p)$, est son image par $(z \mapsto \frac{z}{z-1})_*$, c'est-à-dire :

$$f_\infty(e_0,e_1) = f(e_0,e_\infty) \tag{5}$$

avec $e_\infty = -e_0 - e_1$.

Soit $f \in \pi_1^{\mathrm{dR}}(X;1,0)(\mathbb{Q}_p)$ vérifiant $f[e_0] = f[e_1] = 0$ et les relations d'associateur de Drinfeld avec paramètre 0 ([3]). On a alors ([3], Proposition 5.9) :

$$e_0 + f^{-1}e_1 f = f_\infty^{-1}(e_0+e_1)f_\infty \tag{6}$$

Remarque 2.1. De plus, (5) et (6) ci-dessus donnent chacune une manière d'exprimer les coefficients de f et de f_∞ en fonction les uns des autres. En particulier, l'équation (6) permet d'exprimer, pour tous $n,d \in \mathbb{N}^*$, les familles de nombres suivantes en fonction les unes des autres, par des expressions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{Z}$:

- les coefficients de f_∞ de poids n et profondeur $\le d+1$,
- les coefficients de $f^{-1}e_1 f$ de poids n et profondeur $\le d+1$
- les coefficients de f de poids n et de profondeur $\le d$.

Ceci s'applique à tous les Φ_{p^k}, $k \in (\mathbb{Z}\backslash\{0\}) \cup \{\pm\infty\}$.

2.2. Combinatoire de l'équation d'horizontalité

Pour le reste de l'article, on fixe $k \in \mathbb{N}^*$. L'horizontalité de F_* évoquée plus haut se reformule en termes des polylogarithmes multiples : soient $\omega_0 = \frac{dz}{z}$, $\omega_1 = \frac{dz}{1-z}$, et $\omega_{p^k} = \frac{z^{p^k-1}}{1-z^{p^k}}dz$; on a :

$$\mathrm{dLi}_{p^k} = \Big(e_0\omega_0 - e_1\omega_{p^k}\Big)p^k\mathrm{Li}_{p^k} - p^k\mathrm{Li}_{p^k}\Big(e_0\omega_0 - \Phi_{p^k}^{-1}e_1\Phi_{p^k}\omega_1\Big) \tag{7}$$

$$\mathrm{dLi}_{p^{-k}} = \Big(e_0\omega_0 - e_1\omega_1\Big)p^k\mathrm{Li}_{p^{-k}} - p^k\mathrm{Li}_{p^{-k}}\Big(e_0\omega_0 - \Phi_{p^{-k}}^{-1}e_1\Phi_{p^{-k}}\omega_{p^k}\Big) \tag{8}$$

2.2.1. Définitions

On note $A(\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}\backslash]1[)$ l'anneau des fonctions analytiques rigides sur l'espace affinoïde $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}\backslash]1[$ sur $\mathbb{Q}_p$, qui est l'image du disque unité fermé $\mathbb{Z}_p$ par $z \mapsto \frac{z}{z-1}$.

Soit $\mathcal{H}_{ш}^{1,p^k}$ l'algèbre de Hopf de mélange associée au monoïde des mots en trois lettres u_0, u_1, u_{p^k} sur $\mathbb{Q}_p$. Soit $\mathcal{H}_*^{1,p^k}$, le sous-espace vectoriel engendré par les mots dont la lettre la plus à droite n'est pas u_0.

Définition 2.2. Soit $\mathrm{I} : \mathcal{H}_*^{1,p^k} \to \mathbb{Q}_p[[z]]_{1^-} = \{$séries entières à coefficients dans $\mathbb{Q}_p$, convergentes pour $z \in \mathbb{C}_p$ tel que $|z|_p < 1\}$ la fonction linéaire qui associe à $w = u_0^{s_d-1}u_{x_d}\ldots u_0^{s_1-1}u_{x_1}$ $(x_d,\ldots,x_1 \in \{1,p^k\})$ l'intégrale itérée correspondante $\mathrm{I}(w)$: $z \in p\mathbb{Z}_p \mapsto \sum_{\substack{0=n_0<n_1<\ldots<n_d \\ n_{j-1}\equiv n_j[x_j]}} \frac{z^{n_d}}{n_1^{s_1}\ldots n_d^{s_d}}$.

Il découle de l'équation d'horizontalité, et d'un résultat général d'indépendance linéaire, qu'on peut définir :

Définition 2.3. Soit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, tors^k, resp. tors^{-k} l'unique fonction telle que $w \mapsto \mathrm{Li}_{p^k}[w]$, (resp. $w \mapsto \mathrm{Li}_{p^{-k}}[w]$) se factorise par

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_*^{1,p^k} & \xrightarrow{\mathrm{I}} & \mathbb{Q}_p[[z]]_{1^-} \\ \uparrow \mathrm{tors}^{\pm k} & & \uparrow \\ \mathcal{H}_{ш} & \xrightarrow{\mathrm{Li}_{p^{\pm k}}} & A(\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}\backslash]1[) \end{array}$$

où la flèche $A(\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}\backslash]1[) \to \mathbb{Q}_p[[z]]_{1^-}$ est l'inclusion naturelle ; $\mathrm{tors}^{\pm k}$ exprime le développement en série des $\mathrm{Li}_{p^{\pm k}}(z)$ autour de $z=0$.

Les équations (7), (8) étant régulières en ∞, on ne change pas $\mathrm{Li}_{p^{\pm k}}(z)$ en remplaçant, dans la définition de I, l'intégration usuelle par une version régularisée : $f \mapsto \int_0 (f\omega - \mathrm{Res}_\infty(f\omega)\Omega)$, où Ω est de résidu 1 en ∞ et n'a pas d'autre pôle sur $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}\backslash]1[$. Deux choix naturels sont $\Omega=\omega_1$ (utilisé dans [9] §5) et $\Omega=\omega_{p^k}$.

2.2.2. *Formules pour* $\mathrm{tors}^{\pm k}$

Définition 2.4. Soient $i_{p^k}, i_1 : \mathbb{Q}\langle e_0, e_1\rangle \to \mathbb{Q}\langle u_0, u_1, u_{p^k}\rangle$, les uniques morphismes d'algèbres pour les produits de concaténation qui envoient, respectivement, $(e_0,e_1)\mapsto (u_0,-u_{p^k})$, et $(e_0,e_1)\mapsto(u_0,-u_1)$.

Définition 2.5. Soit $w \in \mathcal{H}_{\text{ш}}$ un mot.

i) Appelons par simplicité *sous-mots de* w les suites $(w_i)_i$ de sous-mots constitués de lettres consécutives de w, disjoints deux à deux, tels que chaque w_i contienne au moins un e_1, et tels que $w\backslash \cup w_i$ n'est constitué que de e_0.
ii) Pour (w_i) un sous-mot, le *quotient* $w/(w_i)$ est le mot obtenu en remplaçant chaque w_i par e_1.
iii) Pour $f \in \mathbb{Q}_p\langle\langle e_0, e_1\rangle\rangle$, soit $\delta_f : \mathbb{Q}\langle e_0,e_1\rangle \to \mathbb{Q}_p\langle e_0,e_1\rangle$ l'unique fonction linéaire définie sur les mots w de $\mathcal{H}_{\text{ш}}$ par $\delta_f(w)=\sum_{\text{sous-mots}(w_i')\text{ de } w}[\prod_{i\in I} f[w_i']]w/(w_i')$. On a $\delta_{e_1}=\mathrm{id}$.

Proposition 2.6 *(Premier type de formule). Notons, pour* $f,g : \mathcal{H}_{\text{ш}} \to \mathcal{H}_*^{1,p^k}$, $f \bullet g = \times \circ (f\otimes g)\circ \Delta_{\text{ш}}$*, où* $\Delta_{\text{ш}}$ *est le coproduit de déconcaténation sur le monoïde des mots en* e_0, e_1*. On a :*

$$\mathrm{tors}^{+k} = i_{p^k} \bullet (i_1 \circ \delta_{\Phi_{p^k}^{-1} e_1 \Phi_{p^k}} \circ S) \ \text{ et } \ \mathrm{tors}^{-k} = i_1 \bullet (i_{p^k} \circ \delta_{\Phi_{p^{-k}}^{-1} e_1 \Phi_{p^{-k}}} \circ S) \tag{9}$$

Proposition 2.7 *(Deuxième type de formule).*

On a, pour tous $d\in\mathbb{N}^*$, $(s_d,\ldots,s_1)\in(\mathbb{N}^*)^d$*, et* $w = e_0^{s_d-1}e_1\ldots e_1 e_0^{s_0-1}$ *:*

$$\begin{aligned}\mathrm{tors}^{+k}(w) = {} & \sum_{\substack{0\le t_0\le s_0-1\\ 0\le t_d\le s_d-1}} \sum_{w=e_0^{t_d}w_1w_2e_0^{t_0}} \binom{-t_d-1}{t_0} (\Phi_{p^k}^{-1}e_1\Phi_{p^k})[w_2] u_0^{t_d+t_0} u_1 \mathrm{tors}^{+k}(w_1)\\ & - \sum_{t_0=0}^{s_0-1}\binom{-s_d}{t_0} u_0^{s_d-1+t_0} u_{p^k}\mathrm{tors}^{+k}(e_0^{s_{d-1}-1}e_1\ldots e_0^{s_1-1}e_1e_0^{s_0-1-t_0})\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{tors}^{-k}(w) = {} & \sum_{\substack{0\le t_0\le s_0-1\\ 0\le t_d\le s_d-1}} \sum_{w=e_0^{t_d}w_1w_2e_0^{t_0}} \binom{-t_d-1}{t_0} (\Phi_{p^{-k}}^{-1}e_1\Phi_{p^{-k}})[w_2] u_0^{t_d+t_0} u_{p^k} \mathrm{tors}^{-k}(w_1)\\ & - \sum_{t_0=0}^{s_0-1}\binom{-s_d}{t_0} u_0^{s_d-1+k_0} u_1\mathrm{tors}^{-k}(e_0^{s_{d-1}-1}e_1\ldots e_0^{s_1-1}e_1e_0^{s_0-1-t_0})\end{aligned} \tag{11}$$

Expliciter directement ces formules pour chaque w permet d'éviter des calculs, comme ceux par récurrence sur les s_i en profondeur 2 dans [9], §5. Ces formules sont récursives uniquement vis-à-vis de la profondeur ; dans (9), la récursivité vient des termes en $\Phi_{p^{\pm k}}^{-1}e_1\Phi_{p^{\pm k}}$.

2.3. *Intégrales itérées sur* $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}\backslash]1[$

Fait 2.8. *Une série entière* $\sum_{n\ge 0} a_n z^n$, $(a_n)\in\mathbb{Q}_p^{\mathbb{N}}$ *est la série de Taylor en* 0 *d'un élément de* $A(\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}\backslash]1[)$ *si et seulement si la restriction à* $\mathbb{N}^*$ *de* $n\mapsto a_n$ *s'étend en une fonction continue* $\mathbb{Z}_p\to\mathbb{Q}_p$*. Si c'est le cas, cette fonction est donnée par, pour* $z\ne\infty$, $f(z)=a_0+z\int_{\mathbb{Z}_p} a_{n+1}\mathrm{d}\mu_z(n)$ *où* μ_z *est la mesure sur* $\mathbb{Z}_p$ *définie par* $\mu_z(n+p^N\mathbb{Z}_p)=\frac{z^n}{1-z^{p^N}}$, $N\in\mathbb{N}^*$, $n\in\{0,\ldots,p^N-1\}$*, et* $f(\infty)=-\lim_{|n|_p\to 0} a_n$*.*

Un énoncé proche de celui-ci est prouvé dans [9], §5.2 mais on peut montrer que c'est essentiellement équivalent à un lemme classique de Mahler [8]. On définit maintenant des sous-espaces de $\{f\in A(\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}\backslash]1[) \mid f(0)=0\}$.

Définition 2.9. i) Pour $m,m'\in\mathbb{N}$, soient Q_m, $Q_{m,m'}$ et $\tilde{Q}_{m,m'}$ les uniques polynômes dont la valeur en tout $q\in\mathbb{N}^*$ est égale respectivement à $\sum_{q'=0}^{q-1} q'^m$, $\sum_{q'=0}^{q-1} q'^m(q-1-q')^{m'}$, $\sum_{q'=1}^{q-1} q'^m(q-q')^{m'}$.

ii) On note, respectivement, $\mathbb{B}_l^m$ $(0 \leq l \leq m+1)$, $\mathbb{B}_l^{m,m'}$ et $\tilde{\mathbb{B}}_l^{m,m'}$ $(0 \leq l \leq m+m'+1)$ leurs coefficients de degré l. Les coefficients de degré 0 sont nuls sauf $\tilde{\mathbb{B}}_0^{m,m'} = -\delta_{m,0}\delta_{m',0}$. On a $\mathbb{B}_l^m = \frac{1}{m+1}\binom{m+1}{l} B_{m+1-l}$ et $\tilde{\mathbb{B}}_l^m = \tilde{\mathbb{B}}_l^{m,0}$.

On a $|\mathbb{B}_l^{m,m'}|_p, |\tilde{\mathbb{B}}_l^{m,m'}|_p \leq p^{1+\frac{\log(m+m'+1)}{\log p}}$. Ceci et le fait que $|n|_p \leq p^{k-1}$ pour $n \in \{1,\ldots,p^k-1\}$ motivent la définition suivante.

Définition 2.10. i) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{S}_k(\mathbb{Q}_p) \subset \mathbb{Q}_p^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites $(t_l)_{l\geq 0}$ telles qu'il existe $C, C', C'' \in \mathbb{R}_+^*$ telles que, pour tout $l \in \mathbb{N}$, on ait $|t_l|_p \leq p^{C+\frac{C'}{\log(p)}\log(l+C'')+(k-1)l}$.

ii) Pour $k \geq 1$, soit $\mathcal{L}_{\mathcal{S}_k}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$ l'espace des fonctions localement analytiques $a : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$, dont la restriction à chaque disque fermé de rayon p^{-k} est analytique, et telle que, en chaque point $n \in \mathbb{Z}_p$, la suite des coefficient de Taylor de a en n, qu'on note $(a^{((l))}(n))_{l\geq 0}$, soit dans $\mathcal{S}_k(\mathbb{Q}_p)$.

iii) Soit $\mathcal{L}'_{\mathcal{S}_k}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$ l'image de $\mathcal{L}_{\mathcal{S}_k}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$ par l'application $a \mapsto a'$ avec $a'(0) = 0$ et $a'(n) = a(n)$ pour $n \in \mathbb{Z}_p \backslash \{0\}$.

$\mathcal{L}'_{\mathcal{S}_k}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$ vu comme inclus dans $A(\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}} \backslash]1[)$ contient les $\mathrm{Li}_{p^{\pm k}}[w]$ pour w de profondeur 1 ; on montre maintenant qu'il est stable par intégration itérée régularisée. On appliquera le lemme suivant avec, pour a', le prolongement continu à $\mathbb{Z}_p$ de la fonction associant à $n \in \mathbb{N}^*$ le coefficient de Taylor en $z = 0$ de degré n de $z \mapsto \frac{z}{1-z}$, respectivement $z \mapsto \frac{z^{p^k}}{1-z^{p^k}}$.

Lemme 2.11. *Soient a, a' dans $\mathcal{L}_{\mathcal{S}_k}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$. Alors $(b_n = \sum_{m=1}^{n-1} a_m a'_{n-m})_{n\in\mathbb{N}}$ définit un élément b dans $\mathcal{L}_{\mathcal{S}_k}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$; pour tout $P \in \mathbb{N}^*$, divisible par p^k, les coefficients de Taylor de b, en respectivement 0 et $n \in \{1,\ldots,P-1\}$, sont donnés par :*

$$b^{((l))}(0) = \sum_{\substack{N\geq -1 \\ m,m'\geq 0 \\ m+m'=l+N}} P^N \left(\tilde{\mathbb{B}}_l^{m,m'} a^{((m))}(0) \cdot a'^{((m'))}(0) + \sum_{n=1}^{P-1} \mathbb{B}_l^{m,m'} a^{((m))}(n) \cdot a'^{((m'))}(P-n) \right) \tag{12}$$

$$\begin{aligned} b^{((l))}(n) = & \sum_{\substack{N\geq -1 \\ m,m'\geq 0 \\ m+m'=l+N}} P^N \left(\tilde{\mathbb{B}}_l^{m,m'} a^{((m))}(0) \cdot a'^{((m'))}(n) + \sum_{n'=1}^{P-1} \mathbb{B}_l^{m,m'} a^{((m))}(n') \cdot a'^{((m'))}(P-n'+n) \right) \\ & + \sum_{n'=0}^{n-1} a^{((l))}(n') \cdot a'^{((0))}(n-n') \end{aligned} \tag{13}$$

On retrouve $b^{((0))}(0) = -a^{((0))}(0)a'^{((0))}(0)$, i.e. $(fg)(\infty) = f(\infty)g(\infty)$.

On considère maintenant les opérations $f \mapsto \int_0 \left(f\frac{\mathrm{d}z}{z} - \mathrm{Res}_\infty(f\frac{\mathrm{d}z}{z})\omega_1 \right)$ et $f \mapsto \int_0 \left(f\frac{\mathrm{d}z}{z} - \mathrm{Res}_\infty(f\frac{\mathrm{d}z}{z})\omega_{p^k} \right)$.

Lemme 2.12. *i) Soient a dans $\mathcal{L}_{\mathcal{S}_k}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$, et $s \in \mathbb{N}^*$. Alors la fonction $\omega_0^s(1)a : n \mapsto \frac{1}{n^s}(a(n) - \sum_{t=0}^{s-1} a^{((t))}(0)n^t)$, resp. $\omega_0^s(p^k)a : n \mapsto \frac{1}{n^s}(a(n) - \mathbb{1}_{p^k|n}\sum_{t=0}^{s-1} a^{((t))}(0)n^t)$ définit un élément de $\mathcal{L}_{\mathcal{S}_k}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$, donné par ses coefficients en 0 et $n \in \mathbb{N}^*$ par :*

$$\omega_0^s(1)a^{((l))}(0) = \omega_0^s(p^k)a^{((l))}(0) = a^{((l+s))}(0) \tag{14}$$

$$\omega_0^s(1)a^{((l))}(n) = \sum_{m=0}^{l} \frac{\binom{-s}{l-m}}{n^{l-m+s}} a^{((m))}(n) - \sum_{t=0}^{s-1} \frac{\binom{-(s-t)}{l}}{n^{l+s-t}} a^{((z))}(0) \tag{15}$$

$$\omega_0^s(p^k)a^{((l))}(n) = \sum_{m=0}^{l} \frac{\binom{-s}{l-m}}{n^{l-m+s}} a^{((m))}(n) - \mathbb{1}_{p^k|n} \sum_{t=0}^{s-1} \frac{\binom{-(s-t)}{l}}{n^{l+s-t}} a^{((t))}(0) \tag{16}$$

Proposition 2.13. *$\mathcal{L}_{\mathcal{S}_k}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$ est stable par intégration itérée régularisée des formes différentielles $\frac{\mathrm{d}z}{z}$, $\frac{\mathrm{d}z}{z-1}$, $\frac{z^{p^k-1}\mathrm{d}z}{z^{p^k}-1}$.*

On peut en particulier écrire une formule simple pour la composée de la multiplication par $\frac{z\mathrm{d}z}{z-1}$, $\frac{z^{p^k}\mathrm{d}z}{1-z^{p^k}}$ et l'opération du lemme 2.12, ce qui revient à une formule de récurrence sur la profondeur pour les intégrales itérées.

On peut aller jusqu'à écrire une formule totalement explicite (mais assez complexe) pour les coefficients de Taylor de chaque intégrale itérée régularisée d'un mot dans $\mathcal{H}_*^{1,p^k}$.

3. Résultats principaux

Définition 3.1. i) (usuelle) Les nombres $H_N(s_d,\ldots,s_1)=\sum_{0<n_1<\ldots<n_d<N}\frac{1}{n_1^{s_1}\ldots n_d^{s_d}}$, sont appelés sommes harmoniques multiples.

ii) Soit, pour $\mathcal{E},\mathcal{E}'\subset\{1,\ldots,d\}$, pour tout $k'\in\mathbb{N}^*$ tel que $k'\geq k$, $H_{p^{k'}}^{k,\mathcal{E},\mathcal{E}'}(s_d,\ldots,s_1)=\sum_{\substack{0=n_0<n_1<\ldots<n_d<p^{k'}\\ n_{j-1}\equiv n_j[p^k] \text{ pour } j\in\mathcal{E}\\ n_{j'}\equiv 0[p^k] \text{ pour } j'\in\mathcal{E}'}}\frac{1}{n_1^{s_1}\ldots n_d^{s_d}}$.

Théorème 1. *Chaque multizêta p-adique $\zeta_{p^k}(s_d,\ldots,s_1)$ admet une expression, pouvant se calculer en particulier par récurrence sur la profondeur, valable pour tout $k'\geq k$, sous la forme suivante :*

$$\begin{aligned}&\sum_{N\geq -d}(\text{combinaison } \mathbb{Q}-\text{linéaire (dans } \prod_p \mathbb{Q}_p,\ \text{i.e. à coefficients indépendants de } p) \text{ de}\\ &(p^{k'})^{N+s_d+\ldots+s_1}H_{p^{k'}}^{k,\mathcal{E},\mathcal{E}'}(t_{d'},\ldots,t_1))\end{aligned}\tag{17}$$

avec $d'\leq d$ et $t_{d'}+\ldots+t_1=s_d+\ldots+s_1+N$.

On peut en déduire que :

Corollaire 3.2. *Pour p assez grand dépendant de $(s_d,\ldots,s_1)$, on a $v_p(\zeta_{p^k}(s_d,\ldots,s_1))\geq s_d+\ldots+s_1-d$.*

Remerciements

Ce travail a été essentiellement effectué en 2013. Je remercie Francis Brown pour plusieurs discussions à ce sujet en 2013. Je remercie aussi Pierre Cartier pour son aide, et ses relectures. Ce travail est financé par la bourse ERC n° 257638, « Periods in Algebraic Geometry and Physics ».

Références

[1] P. Deligne, Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points, in: Galois Groups over $\mathbb{Q}$, Berkeley, CA, 1987, in: Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 16, 1989, pp. 79–297.
[2] P. Deligne, A.B. Goncharov, Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixtes, Ann. Sci. Éc. Norm. Super. 38 (1) (2005) 1–56.
[3] V.G. Drinfeld, On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, Algebra Anal. 2 (4) (1990) 149–181.
[4] H. Furusho, p-Adic multiple zeta values I – p-adic multiple polylogarithms and the p-adic KZ equation, Invent. Math. 155 (2) (2004) 253–286.
[5] H. Furusho, p-Adic multiple zeta values II – Tannakian interpretations, Amer. J. Math. 129 (4) (2007) 1105–1144.
[6] D. Jarossay, p-Adic multiple zeta values and multiple harmonic sums – I: p-adic multiple polylogarithms as explicit functions, prépublication, arXiv:1503.08756.
[7] D. Jarossay, p-Adic multiple zeta values and multiple harmonic sums – II: p-adic decompositions of multiple harmonic sums, prépublication, arXiv:1501.04893.
[8] K. Mahler, An interpolation series for continuous functions of a p-adic variable, J. Reine Angew. Math. 199 (1958) 23–34.
[9] S. Unver, p-Adic multi-zeta values, J. Number Theory 108 (2004) 111–156.