C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 355 (2017) 455–459

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Géométrie algébrique

Faîte du cône tangent à une singularité : un théorème oublié

Ridge of the tangent cone of a singularity: A forgotten theorem

Vincent Cossart [a], Olivier Piltant [a], Bernd Schober [b,c]

[a] *Laboratoire de mathématiques, LMV UMR 8100, Université de Versailles, 45, avenue des États-Unis, 78035 Versailles cedex, France*
[b] *The Fields Institute, 222 College Street, Toronto ON M5T 3J1, Canada*
[c] *University of Toronto, Department of Mathematics, 40 St. George Street, Toronto ON M5S 2E4, Canada*

I N F O   A R T I C L E

Historique de l'article :
Reçu le 18 novembre 2016
Accepté après révision le 11 février 2017
Disponible sur Internet le 11 mars 2017

Présenté par Claire Voisin

R É S U M É

Soit $\mathcal{X}$ un schéma excellent ; on note $\mathrm{H}_{\mathcal{X}}$ la fonction de Hilbert–Samuel modifiée. Cette fonction est semi-continue supérieurement le long de $\mathcal{X}$ et décroissante (au sens large) par éclatements permis. Dans le cas où $\mathcal{X}$ est plongé dans un ambiant régulier, pour tout $x \in \mathcal{X}$, le « τ stable de x », noté $\tau_{\mathrm{st}}(x)$, est la codimension du faîte du cône tangent de $\mathcal{X}$ en x dans le cône tangent de $\mathcal{W}$ en x. Il est connu que la fonction

$$\iota\,:\,\mathcal{X} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times -\mathbb{N},\ x \mapsto (\mathrm{H}_{\mathcal{X}}(x), -\tau_{\mathrm{st}}(x)),$$

est décroissante (au sens large) par éclatements permis pour l'ordre lexicographique. Dans cette note, nous montrons que ι est semi continue supérieurement sur $\mathcal{X}$. Nous généralisons au cas non plongé.

A B S T R A C T

Let $\mathcal{X}$ be an excellent scheme; we denote by $\mathrm{H}_{\mathcal{X}}$ the modified Hilbert–Samuel function. This function is upper semi-continuous along $\mathcal{X}$ and does not increase for the lexicographical ordering after permissible blowing ups. When $\mathcal{X}$ is embedded in a regular ambient scheme, for all $x \in \mathcal{X}$, the "stable τ at x" ("τ stable de x"), denoted by $\tau_{\mathrm{st}}(x)$, is the codimension of the ridge of the tangent cone of $\mathcal{X}$ at x in the tangent cone of $\mathcal{W}$ at x. It is well known that the function

$$\iota\,:\,\mathcal{X} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times -\mathbb{N},\ x \mapsto (\mathrm{H}_{\mathcal{X}}(x), -\tau_{\mathrm{st}}(x)),$$

does not increase for the lexicographical ordering after permissible blowing ups. In this note, we show that ι is upper semi-continuous along $\mathcal{X}$. This result is generalized to the non-embedded case.

Adresses e-mail : cossart@math.uvsq.fr (V. Cossart), piltant@math.uvsq.fr (O. Piltant), schober@math.toronto.edu (B. Schober).

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2017.02.006
1631-073X/

1. Introduction

Il s'agit du théorème 1.2 que l'on peut trouver en langage subliminal dans [3] et [4] et que Jean Giraud semble avoir oublié d'énoncer tant il était proche de ce résultat. Les auteurs ne s'attribuent donc pas la primeur du théorème 1.2 ; ils veulent simplement l'énoncer, le prouver et le diffuser très largement.

Soient $\mathcal{X}$ un schéma excellent, c'est-à-dire admettant un recouvrement – pas nécessairement fini – par des ouverts affines excellents (et donc nœthériens) et un point $x \in \mathcal{X}$. On note $\mathrm{H}_{\mathcal{X}}$ la fonction d'Hilbert–Samuel modifiée (définie en 1.1(iv) ci-dessous). Cette fonction est semi-continue supérieurement le long de $\mathcal{X}$ [2] (théorème **1.33**, p. 25) et décroissante (au sens large) par éclatements permis [2] (théorème **2.10**, p. 35).

Le plus souvent, $\mathcal{X}$ est plongé dans un schéma ambiant régulier excellent $\mathcal{W}$. Par définition, un schéma régulier $\mathcal{W}$ est un schéma localement nœthérien, c'est-à-dire admettant un recouvrement – pas nécessairement fini – par des ouverts affines nœthériens, tel que, pour tout $x \in \mathcal{W}$, l'anneau local $\mathcal{O}_{\mathcal{W},x}$ est régulier. Notons qu'il existe des schémas réguliers pas excellents (voir [6], Ch. 13 (34.B), p. 260).

Un autre invariant intéressant est le faîte $F_x(\mathcal{X})$ du cône tangent $C_x(\mathcal{X})$ de $\mathcal{X}$ en x (voir [3] définition 5.2). Intuitivement, il s'agit du plus grand sous-groupe additif de l'espace tangent de Zariski

$$T_x(\mathcal{X}) := \mathrm{Spec}\, k(x)[\frac{\mathfrak{M}_{\mathcal{X},x}}{\mathfrak{M}^2_{\mathcal{X},x}}], \text{ où } \mathfrak{M}_{\mathcal{X},x} \text{ est l'idéal maximal de } \mathcal{O}_{\mathcal{X},x},$$

laissant stable $C_x(\mathcal{X})$ par translation. Dans le cas où $\mathcal{X}$ est plongé, $T_x(\mathcal{X})$ est naturellement un sous-$k(x)$-espace vectoriel de $C_x(\mathcal{W})$. Le faîte est noté $F_x(\mathcal{X})$, sa dimension $f_x(\mathcal{X})$. La codimension du faîte dans $C_x(\mathcal{W})$ est notée $\tau_{st}(x)$ et est appelée le « τ-stable de x » :

$$\tau_{st}(x) = \dim \mathcal{O}_{\mathcal{W},x} - f_x(\mathcal{X}) \in \mathbb{N}.$$

Dans le cas général, nous utilisons $\tau_{\mathrm{modif}}(x)$ défini ci-dessous.

Rappelons que la fonction d'Hilbert–Samuel d'un anneau local nœthérien d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de corps résiduel k est définie par :

$$\mathrm{H}^0_{\mathcal{O}}(n) := \dim(\frac{\mathfrak{m}^n}{\mathfrak{m}^{n+1}}),\ n \in \mathbb{N};$$

par récurrence, on définit :

$$\mathrm{H}^t_{\mathcal{O}}(n) := \sum_{0 \le i \le n} \mathrm{H}^i_{\mathcal{O}}(n),\ n \in \mathbb{N}.$$

Définition 1.1 *([2], definition **1.28** p. 23).*

(i) Pour tout $x \in \mathcal{X}$, on note $\mathrm{Irr}(x)$ l'ensemble des composantes irréductibles $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{X}$ contenant x.
(ii) On définit la fonction

$$\Psi_{\mathcal{X}}(x) := \min\{\mathrm{codim}_{\mathcal{Z}}(x) \mid \mathcal{Z} \in \mathrm{Irr}(x)\}.$$

(iii) On définit $\tau_{\mathrm{modif}}(x)$ par :

$$\tau_{\mathrm{modif}}(x) := \Psi_{\mathcal{X}}(x) - f_x(\mathcal{X}) \in \mathbb{Z}.$$

(iv) On appelle fonction d'Hilbert–Samuel modifiée de $\mathcal{X}$ en x et on note $\mathrm{H}_{\mathcal{X}}(x)$:

$$\mathrm{H}_{\mathcal{X}}(x) := \mathrm{H}^{N-\Psi_{\mathcal{X}}(x)}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X},x}},$$

où N est un entier $\geq \dim(\mathcal{X})$.

J. Giraud a donné une définition fonctorielle du faîte et a montré qu'il s'agissait d'un foncteur représentable ([3], définition **5.2** et proposition **5.3** p. I-24). Ce résultat lui permet de prouver les lemmes fondamentaux (2.1) et (2.3) ci-dessous, d'où nous déduisons le théorème suivant.

Théorème 1.2 *(Théorème oublié). Avec les notations ci-dessus, les fonctions*

$$\iota_{\mathrm{modif}} : \mathcal{X} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{Z},\ x \mapsto (\mathrm{H}_{\mathcal{X}}(x), -\tau_{\mathrm{modif}}(x))$$

et, quand $\mathcal{X}$ est plongé

$$\iota : \mathcal{X} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times -\mathbb{N},\ x \mapsto (\mathrm{H}_{\mathcal{X}}(x), -\tau_{st}(x)),$$

sont semi-continues supérieurement sur $\mathcal{X}$ pour l'ordre lexicographique. Dans cet énoncé, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est muni de l'ordre produit :

$$\nu \geq \mu \Leftrightarrow \nu(n) \geq \mu(n)\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. Preuve du théorème

Lemme 2.1 *(J. Giraud). Avec les notations ci-dessus, soit $\mathcal{Y}$ un fermé régulier de $\mathcal{X}$ tel que $\mathrm{gr}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$ est plat sur $\mathcal{Y}$ (c'est-à-dire que $\mathcal{Y}$ est permis pour $\mathcal{X}$ au sens de Hironaka), alors la fonction*

$$x \in \mathcal{Y} \longrightarrow f_x(\mathcal{X}) - \dim(\mathcal{O}_{\mathcal{Y},x})$$

est semi-continue supérieurement sur $\mathcal{Y}$.

Démonstration. Voir [3] (**5.3.3**, p. I-26) dans le cas général et [4] (**4.3(ii)**) (avec les notations de [4] $s_i \in \mathbf{P}^{q_i}$) dans le cas où il y a un corps de base.

Donnons une idée de la preuve. Giraud définit le faîte $F_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$ de $C_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) := \mathrm{gr}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$ (cône de sommet $\mathcal{Y}$) et montre que, $\mathrm{gr}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$ étant plat sur $\mathcal{Y}$, c'est un foncteur représentable. Comme $\mathcal{Y}$ est régulier, la dimension des fibres $F_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})(x)$ est une fonction de $x \in \mathcal{Y}$ semi-continue supérieurement. Le critère de platitude normale de Hironaka ([3], **2.2.2 (ii ter)**, p. II-14 ou [2], theorem **2.2 (iv)**) permet d'identifier $F_x(\mathcal{Y})$ comme un sous-groupe de $F_x(\mathcal{X})$. La fibre $F_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})(x)$ est « naturellement » isomorphe au quotient $\frac{F_x(\mathcal{X})}{F_x(\mathcal{Y})}$. Comme $\mathcal{Y}$ est régulier, $F_x(\mathcal{Y}) = C_x(\mathcal{Y})$, cela donne le résultat annoncé. □

Corollaire 2.2. *Avec les hypothèses et notations de (2.1) ci-dessus,*

(i) *la fonction ι_{modif} est semi-continue supérieurement sur $\mathcal{Y}$,*
(ii) *dans le cas où $\mathcal{X}$ est plongée dans un régulier $\mathcal{W}$, ι est semi-continue supérieurement sur $\mathcal{Y}$.*

Démonstration. (ii) est une conséquence immédiate de (i). Pour prouver (i), il suffit de montrer que la fonction $-\tau_{\mathrm{modif}}$ est semi-continue supérieurement sur $\mathcal{Y}$. La décomposition évidente :

$$-\tau_{\mathrm{modif}}(x) = (f_x(\mathcal{X}) - \dim(\mathcal{O}_{\mathcal{Y},x})) + (\dim(\mathcal{O}_{\mathcal{Y},x}) - \Psi_{\mathcal{X}}(x)) :$$

montre que $-\tau_{\mathrm{modif}}$ est la somme de deux fonctions semi-continues supérieurement sur $\mathcal{Y}$. □

Lemme 2.3 *(J. Giraud). Avec les notations ci-dessus, soit $\mathcal{Y}$ un fermé de $\mathcal{X}$ permis en $x \in \mathcal{Y}$ et soit*

$$\pi : \mathcal{X}' \longrightarrow \mathcal{X}$$

l'éclatement de $\mathcal{X}$ le long de $\mathcal{Y}$ et soit $x' \in \pi^{-1}(x)$, un point fermé. Si x' est un point proche de x (c'est-à-dire que $\mathrm{H}_{\mathcal{X}}(x) = \mathrm{H}_{\mathcal{X}'}(x')$), on a

$$f_{x'}(\mathcal{X}') \leq f_x(\mathcal{X}).$$

À notre connaissance, ce lemme est entièrement dû à J. Giraud.

Démonstration. Voir [3] proposition **4.2** (p. II-33), qui donne un résultat plus précis. Dans le cas où il y a un corps de base, c'est une conséquence de [4] (théorème **5.2**).

Donnons une idée de la longue preuve. En passant si nécessaire au complété et en appliquant le théorème de structure de Cohen, on se ramène d'abord au cas d'une singularité plongée $\mathcal{X} \subset \mathcal{W}$. Ensuite, l'ingrédient fondamental est le critère de platitude normale de Hironaka ([3] **2.2.2 (ii ter)** p. II.14 ou [2] theorem **2.2 (iv)**). En simplifiant beaucoup, ce critère montre que, dans le cas plongé, on peut trouver localement des générateurs $(f_1, \cdots, f_m)$ de l'idéal I définissant $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{W}$ tels que leurs formes initiales au point générique de $\mathcal{Y}$ engendrent $\mathrm{gr}_{\mathcal{Y}}(I)$ et leurs formes initiales en x engendrent $\mathrm{gr}_x(I)$. D'après Hironaka, les transformés stricts des f_i, $1 \leq i \leq m$ engendrent l'idéal du transformé strict de $\mathcal{X}$. On effectue alors les calculs en contrôlant systématiquement ces transformés stricts et leurs formes initiales en un point x' de la fibre de x. □

Corollaire 2.4. *Avec les notations ci-dessus et les hypothèses du lemme (2.3)*

(i) $\iota_{\mathrm{modif}}(x') \leq \iota_{\mathrm{modif}}(x)$,
(ii) *dans le cas où $\mathcal{X}$ est plongée dans un régulier $\mathcal{W}$, $\iota(x') \leq \iota(x)$.*

Démonstration. Pour (i), rappelons d'abord qu'on a supposé $\mathrm{H}_{\mathcal{X}}(x) = \mathrm{H}_{\mathcal{X}'}(x')$. Remarquons ensuite qu'une composante irréductible $\mathcal{Z}'$ de $\mathcal{X}'$ passant par x' est la transformée stricte d'une composante irréductible $\mathcal{Z} = \pi(\mathcal{Z}')$ de $\mathcal{X}$ passant par x. Comme x' est un point fermé de $\pi^{-1}(x)$, on a $\operatorname{codim}_{\mathcal{Z}'}(x') = \operatorname{codim}_{\pi(\mathcal{Z}')}(x)$ et donc $\Psi_{\mathcal{X}}(x) \leq \Psi_{\mathcal{X}'}(x')$, par (2.3)

$$f_{x'}(\mathcal{X}') - \Psi_{\mathcal{X}'}(x') \leq f_x(\mathcal{X}) - \Psi_{\mathcal{X}}(x).$$

(ii) est une conséquence immédiate de (2.3). $\square$

Fin de la preuve du théorème. Soit $x \in \mathcal{X}$, prouvons que si $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ est un voisinage suffisamment petit de x,

$$\forall x' \in \mathcal{U} \ : \ \iota_{\mathrm{modif}}(x') \leq \iota_{\mathrm{modif}}(x) \text{ (resp. } \iota(x') \leq \iota(x) \text{ dans le cas plongé).} \tag{1}$$

Cela impliquera le théorème.

Rappelons que la strate de Samuel $\mathrm{HS}_{\mathcal{X}}(x)$ de $x \in \mathcal{X}$ est le fermé de $\mathcal{X}$ défini par :

$$\mathrm{HS}_{\mathcal{X}}(x) := \{x' \in \mathcal{X} \mid \mathrm{H}_{\mathcal{X}}(x') \geq \mathrm{H}_{\mathcal{X}}(x)\}.$$

Bien sûr, l'assertion (1) est vraie pour tout $x' \notin \mathrm{HS}_{\mathcal{X}}(x)$. Soit $\mathcal{Y} \ni x$ un sous fermé irréductible de la strate de Samuel de x, pour terminer la preuve du théorème, il suffit de montrer que si $x' \in \mathcal{Y}$, x' vérifie l'égalité (1). C'est ce que nous prouvons par récurrence sur $\dim(\mathcal{Y})$.

1) Remarquons d'abord que si $\mathcal{Y}$ est régulier en x, (1) résulte de (2.2).

2) Ensuite, on traite le cas où $\dim(\mathcal{O}_{\mathcal{Y},x}) = 1$ en résolvant les singularités de $\mathcal{Y}$ par une suite d'éclatements centrés en des points au-dessus de x. On conclut alors par (2.4).

3) Enfin, si $\dim(\mathcal{O}_{\mathcal{Y},x}) \geq 2$, soit $\mathcal{Z} \subsetneq \mathcal{Y}$ un fermé irréductible contenant x avec $\dim(\mathcal{Z}) = \dim(\mathcal{Y}) - 1$. Soit z le point générique de Z et y celui de $\mathcal{Y}$. Par récurrence,

$$\iota_{\mathrm{modif}}(x) \geq \iota_{\mathrm{modif}}(z) \text{ (resp. } \iota(x) \geq \iota(z) \text{ cas plongé).}$$

En se localisant en z, 2) donne

$$\iota_{\mathrm{modif}}(z) \geq \iota_{\mathrm{modif}}(y) \text{ (resp. } \iota(z) \geq \iota(y) \text{ cas plongé).}$$

Ce qui montre que l'égalité (1) est vérifiée. $\square$

Pour conclure cette note, rappelons que si $\mathcal{X}$ est plongée dans un régulier $\mathcal{W}$, on appelle directrice du cône tangent $C_x(\mathcal{X})$ en x et on note $\mathrm{dir}(x)$ le plus grand sous-espace vectoriel de translations de $C_x(\mathcal{W}) \cong k^n$ laissant stable ce cône.

En caractéristique 0, directrice et faîte coïncident. Le *théorème oublié* 1.2 a d'ailleurs été établi par Bennett et Hironaka dans ce cas [1]. En caractéristique positive, la directrice peut être strictement contenue dans le faîte : c'est le cas dans l'exemple que nous donnons ci-dessous. Dans cet exemple, on a $F_x(\mathcal{X}) = C_x(\mathcal{X})$, alors que la directrice $\mathrm{dir}(x)$ est le sommet du cône $C_x(\mathcal{X})$.

De plus, en caractéristique 0 ou si $\mathrm{car}(k) \geq \dim(\mathcal{X})/2 + 1$, quand on éclate $\mathcal{X}$ le long d'un point fermé $x \in \mathcal{X}$, un point $x' \in \mathcal{X}'$ proche de x est sur le $\mathrm{Proj}(\mathrm{dir}(x)) \subset \mathrm{Proj}(C_x(\mathcal{X}))$, ce dernier étant identifié à la fibre de x [2] (Théorème 2.14) : c'est un argument essentiel de la preuve de Hironaka [5] en caractéristique 0 et de la preuve de désingularisation des surfaces [2]. Ce n'est évidemment pas le cas dans l'exemple où $\mathrm{Proj}(\mathrm{dir}(x)) = \emptyset$.

Exemple 2.5 *([3], p. III-26, [7] (3.1.5)).* On considère un corps k de caractéristique 2 et $a_1, a_2, a_3 \in k$ tels que $[k^2(a_1, a_2, a_3) : k^2] = 8$. Soit $\mathcal{X} := \mathbf{V}(h) \subset \mathbb{A}_k^8$, $h \in k[Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, X_1, X_2, X_3, X_4]$,

$$h := Y_4^2 + a_1 Y_1^2 + a_2 Y_2^2 + a_3 Y_3^2 + a_2 a_3 X_1^2 + a_1 a_3 X_2^2 + a_1 a_2 X_3^2 + a_1 a_2 a_3 X_4^2.$$

Soit $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{A}_k^8$ l'origine. On a, en notant $\mathrm{Idir}(x)$ l'idéal de la directrice $\mathrm{dir}(x)$ dans $k[Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, X_1, X_2, X_3, X_4]$:

$$\tau_{st}(x) = 1, \quad \mathrm{Idir}(x) = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, X_1, X_2, X_3, X_4).$$

Éclatons l'origine et regardons la carte où X_4 est l'équation du diviseur exceptionnel. Notons :

$$\begin{gathered} x'_i = X_i/X_4, \quad y'_j = Y_j/X_4, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad 1 \leq j \leq 4, \\ \mathcal{X}_1 = {x'_1}^2 + a_1, \quad \mathcal{X}_2 = {x'_2}^2 + a_2, \quad \mathcal{X}_3 = {x'_3}^2 + a_3, \quad \mathcal{X}_4 = X_4, \\ \mathcal{Y}_1 = y'_1 + x'_2 x'_3, \quad \mathcal{Y}_2 = y'_2 + x'_1 x'_3, \quad \mathcal{Y}_3 = y'_3 + x'_1 x'_2, \\ \mathcal{Y}_4 = y'_4 + x'_1 x'_2 x'_3 + x'_1 \mathcal{Y}_1 + x'_2 \mathcal{Y}_2 + x'_3 \mathcal{Y}_3. \end{gathered}$$

Soit $x' \in \mathcal{X}'$ le point fermé de paramètres $(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \mathcal{X}_4, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \mathcal{Y}_3, \mathcal{Y}_4)$.

$$h' := \frac{h}{X_4^2} = \mathcal{Y}_4^2 + \mathcal{X}_1\mathcal{Y}_1^2 + \mathcal{X}_2\mathcal{Y}_2^2 + \mathcal{X}_3\mathcal{Y}_3^2 + \mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\mathcal{X}_3,$$
$$k(x') = k(x)[\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_3}],$$
$$\tau_{st}(x) = \tau_{st}(x') = 1,\ \mathrm{Idir}(x') = (\overline{\mathcal{Y}_4}) \subset k(x')[\frac{\mathfrak{M}_{\mathcal{X}',x'}}{\mathfrak{M}^2_{\mathcal{X}',x'}}],$$

où $\overline{\mathcal{Y}_4} := \mathrm{in}_{x'}(\mathcal{Y}_4)$. Dans cet exemple, la codimension de la directrice baisse strictement en un point proche de x : elle passe de 8 à 1. En caractéristique 0, cette codimension ne baisse pas après éclatement permis. En revanche, $\tau_{\mathrm{st}}(x) = 1 \leq \tau_{\mathrm{st}}(x') = 1$: conformément à (2.4), on a bien $\iota(x') \leq \iota(x)$.

Références

[1] B.M. Bennett, On the characteristic functions of a local ring, Ann. of Math. (2) 91 (1) (1970) 25–87.
[2] V. Cossart, U. Jannsen, S. Saito, Canonical embedded and non-embedded resolution of singularities for excellent two-dimensional schemes, preprint, 0905.2191, 2009, pp. 1–169.
[3] J. Giraud, Étude locale des singularités, Cours de 3e cycle, Publ. Math. d'Orsay, vol. 26, Université Paris-11, Orsay, France, 1972.
[4] J. Giraud, Contact maximal en caractéristique positive, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 8 (1975) 201–234.
[5] H. Hironaka, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, Ann. Math. 79 (1964) 109–326.
[6] H. Matsumura, Commutative Algebra, 2nd edition, Mathematics Lecture Note Series, vol. 56, Benjamin/Cummings Publishing Co., 1980.
[7] A. Voitovich, Reduction to directrix-near points in resolution of singularities of schemes, thèse, Université de Ratisbonne, Allemagne, 2015.