C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 355 (2017) 1099–1103

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Statistique

Inférence fondée sur la vraisemblance pour des modèles de records

Likelihood-based inference for record models

Anis S. Hoayek [a], Gilles R. Ducharme [a], Zaher Khraibani [b]

[a] *Institut montpelliérain Alexander-Grothendieck, CNRS, université de Montpellier, France*
[b] *Université libanaise, Beyrouth, Liban*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 17 juin 2017
Accepté après révision le 4 octobre 2017
Disponible sur Internet le 9 octobre 2017

Présenté par le comité de rédaction

RÉSUMÉ

Dans une série chronologique $\{X_t, t \geq 1\}$, X_j est un record supérieur si $X_j > \max\{X_1, \dots, X_{j-1}\}$. Des modèles populaires pour de telles données sont le modèle de Yang–Nevzorov et le modèle à dérive linéaire. Dans cette note, nous présentons la vraisemblance jointe de la suite des records et de leur indicatrice d'occurrence. Cette vraisemblance peut ensuite être utilisée pour estimer les paramètres inconnus des modèles. Elle peut aussi être utilisée pour construire des procédures inférentielles pour la sélection d'un modèle adapté à ces données.

ABSTRACT

In a time series $\{X_t, t \geq 1\}$, X_j is said to be an upper record if $X_j > \max\left\{X_1, \dots, X_{j-1}\right\}$. Some popular models for records are the Yang–Nevzorov and the Linear Drift models. In this note, we introduce for these models the joint likelihood of the record sequence and the indicators of their occurrence. This likelihood can then be used to obtain estimators of the unknown parameters in the models. It can also be used to derive inferential procedures associated with the selection of a proper model for such data.

1. Introduction

Dans une série chronologique $\{X_t, t \geq 1\}$, une observation X_j est un record (supérieur) au temps j si sa valeur est supérieure à toutes les valeurs précédentes, c'est-à-dire si $X_j > \max\{X_1, ..., X_{j-1}\}$. Dans cette note, nous considérons les records supérieurs, mais les records inférieurs peuvent être définis de manière similaire, par exemple en multipliant les séries chronologiques par « -1 ». L'intérêt des records apparaît quand ils sont les seules données facilement accessibles dans une série chronologique, comme, par exemple, les records dans les manifestations sportives ou les crues de cours d'eau.

Adresses e-mail : anisshoayek@hotmail.com (A.S. Hoayek), gilles.ducharme@umontpellier.fr (G.R. Ducharme), zaher.khraibani@gmail.com (Z. Khraibani).

https://doi.org/10.1016/j.crma.2017.10.001

Considérons la suite des valeurs de records $\{R_n, n \geq 1\}$, la suite des indices d'occurrence des records $\{L_n, n \geq 1\}$, où L_n est l'indice d'occurrence du n-ième record de valeur $R_n = X_{L_n}$. La suite $\{\delta_t, t \geq 1\}$ contient les indicatrices de records : $\delta_t = 1$, $t \in \{L_n, n \geq 1\}$ et $\delta_t = 0$, $t \notin \{L_n, n \geq 1\}$. En pratique, seuls les records de la série chronologique sont jusqu'à l'instant T qui désigne le temps présent, de sorte que les données disponibles à l'analyse statistique sont les couples $\{(R_n, L_n), n = 1, ..., N_T\}$, où N_T est le nombre de records dans $\{X_t, t = 1, ..., T\}$, considéré non aléatoire. Cette information limitée a un coût : on ne pourra apporter de réponses statistiques à de nombreuses questions concernant le comportement de la série chronologique $\{X_t, t \geq 1\}$, à moins de disposer d'information externe. Mais plusieurs questions importantes, telles la prédiction de la valeur R_{N_T+1} du record suivant et son indice L_{N_T+1}, sont amenables à l'analyse statistique.

Dans de telles analyses, il est souvent plausible de supposer que les X_t sont indépendants. En revanche, il n'est pas raisonnable de supposer qu'ils sont identiquement distribuées. Deux modèles utilisés pour ajuster un tel comportement sont :

1) le modèle de Yang–Nevzorov,

$$X_t \sim F(\cdot;\beta)^{\rho_t},$$

où les ρ_t $(t \geq 1)$ sont des constantes réelles ≥ 1 et $F(\cdot;\beta)$ est une fonction de répartition admettant pour densité $f(\cdot;\beta)$; ici, nous allons considérer le cas particulier initialement proposé par Yang [6], où $\rho_t = \gamma^t$ et où $\gamma \geq 1$ et β sont des paramètres à estimer ;

2) le modèle à dérive linéaire (LDM) :

$$X_t = Y_t + \theta\, t,$$

où $\{Y_t, t \geq 1\}$ est une suite de *va iid* de fonction de répartition $F(\cdot;\beta)$ et de densité $f(\cdot;\beta)$; ici $\theta > 0$ et β sont des paramètres à déterminer.

Notons que Hoayek et al. [2] ont montré que, si $F(\cdot;\beta)$ est la loi de Gumbel $G(\mu,\lambda)$, les modèles LDM et Yang coïncident.

Dans le cas où seule la suite $\{\delta_t, t = 1, ..., T\}$ est considérée et où β est connu, Hoayek et al. [2] ont développé des méthodes pour estimer les paramètres γ ou θ en utilisant la vraisemblance de ces δ_t et ont obtenu le comportement asymptotique de ces estimateurs. Ils ont déduit de cette vraisemblance quelques procédures d'inférence, dont un test d'adéquation du modèle de Yang–Nevzorov. Mais l'information dans cette suite est limitée, de sorte que la portée de l'inférence qui en découle reste grossière. En particulier, si le paramètre β est inconnu, il est passé inaperçu jusqu'à ce jour que certaines composantes de ce vecteur ne peuvent être estimées à partir de la vraisemblance des δ_t, car celle-ci ne fait pas intervenir ces composantes de façon exploitable. Un exemple de ce phénomène est le cas LDM, où $F(\cdot;\beta)$ est la loi de Gumbel $G(\mu,\lambda)$. Dans ce cas, le paramètre μ n'est pas estimable, car il n'entre pas dans l'expression de la vraisemblance des δ_t, alors que le paramètre λ n'est pas identifiable, car il apparaît dans la vraisemblance sous la forme $\frac{\theta}{\lambda}$.

D'où l'importance de considérer le cas, souvent rencontré en pratique, où l'information plus riche contenue dans $\{(R_n, L_n), n = 1, ..., N_T\}$ est disponible. Ceci ouvre la porte à l'estimation du paramètre β et à des procédures d'inférence plus complètes, précises et efficaces. Cependant, pour y arriver, il faut développer la vraisemblance associée aux données $\{(R_n, L_n), n = 1, ..., N_T\}$. Le but de ce travail est de construire cette fonction de vraisemblance et de montrer quelques-unes de ses utilisations, notamment concernant l'estimation de β et l'ajustement de ce type de modèle.

La note est organisée comme suit. Dans la Section 2, nous construisons les fonctions de vraisemblance des modèles de Yang et LDM basées sur $\{(R_n, L_n), n = 1, ..., N_T\}$. Dans la Section 3, nous discutons des estimateurs des paramètres des différents modèles qui découlent de la maximisation de ces fonctions et nous présentons quelques éléments concernant le comportement asymptotique de ces estimateurs. Nous présentons aussi quelques applications possibles de ces résultats, notamment des méthodes de sélection de modèle et de tests d'adéquation permettant de vérifier la conformité du choix du modèle sous-jacent. Une conclusion décrivant quelques pistes de recherche futures clôt le travail.

2. Estimation basée sur les couples (R_n, L_n)

Nous considérons d'abord le problème de l'estimation des paramètres γ et $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_k)$ pour un modèle de Yang–Nevzorov de la forme $X_t \sim F(\cdot;\beta)^{\rho_t}$ avec $\rho_t = \gamma^t$. Dans ce but, nous montrons le résultat suivant.

Théorème 1. *Soit $\{X_t, t = 1, ..., T\}$ une série chronologique obéissant au modèle de Yang–Nevzorov. La vraisemblance basée sur les valeurs observées $\{(x_{l_n}, l_n), n = 1, ..., N_T\}$ des couples $\{(R_n = X_{L_n}, L_n), n = 1, ..., N_T\}$, notée $\mathcal{L}(\gamma;\beta) = \mathcal{L}\left(l_1, x_{l_1}, \ldots, l_{N_T}, x_{l_{N_T}};\gamma;\beta\right)$, est de la forme :*

$$\mathcal{L}(\gamma;\beta) = \gamma^{\sum_{n=1}^{N_T} l_n} \prod_{n=1}^{N_T} \left(f\left(x_{l_n};\beta\right) F\left(x_{l_n};\beta\right)^{\gamma^{l_n}-1} \right) \prod_{n=1}^{N_T-1} \left(F\left(x_{l_n};\beta\right)^{\frac{\gamma^{l_n+1}-\gamma^{l_{n+1}}}{1-\gamma}} \right). \tag{2.1}$$

Démonstration. De par la définition des (R_n, L_n), on a :

$$\mathcal{L}(\gamma;\beta) = \mathcal{L}\left(L_1 = 1, R_1 = x_1, L_2 = l_2, R_2 = x_{l_2}, \ldots, L_{N_T} = l_{N_T}, R_{N_T} = x_{l_{N_T}}; \gamma, \beta\right). \tag{2.2}$$

On peut ensuite remarquer que la suite des couples $\{(R_n, L_n), n = 1, ..., N_T\}$ forme une chaîne de Markov homogène, de probabilité de transition :

$$\mathbb{P}\left[L_{n+1} = l_{n+1}, R_{n+1} > x_{l_{n+1}} \mid L_n = l_n, R_n = x_{l_n}\right] = \left(1 - F\left(x_{l_{n+1}};\beta\right)^{\gamma^{l_{n+1}}}\right) \times F\left(x_{l_n};\beta\right)^{\sum_{t=l_n+1}^{l_{n+1}-1}\gamma^t}. \tag{2.3}$$

Une idée de la preuve est :

$$\mathbb{P}\left[L_{n+1} = l_{n+1}, R_{n+1} > x_{l_{n+1}} \mid L_n = l_n, R_n = x_{l_n}, \ldots, L_1 = l_1, R_1 = x_{l_1}\right] =$$

$$\mathbb{P}\left[X_{l_n+1} < x_{l_n}, \ldots, X_{l_{n+1}-1} < x_{l_n}, X_{l_{n+1}} > x_{l_{n+1}}\right] = \left(1 - F\left(x_{l_{n+1}};\beta\right)^{\gamma^{l_{n+1}}}\right) \times \prod_{t=l_n+1}^{l_{n+1}-1} F\left(x_{l_n};\beta\right)^{\gamma^t}.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left[L_{n+1} = l_{n+1}, R_{n+1} > x_{l_{n+1}} \mid L_n = l_n, R_n = x_{l_n}\right] &= \mathbb{P}\left[X_{l_n+1} < x_{l_n}, \ldots, X_{l_{n+1}-1} < x_{l_n}, X_{l_{n+1}} > x_{l_{n+1}}\right], \\ &= \left(1 - F\left(x_{l_{n+1}};\beta\right)^{\gamma^{l_{n+1}}}\right) \times \prod_{t=l_n+1}^{l_{n+1}-1} F\left(x_{l_n};\beta\right)^{\gamma^t}.\end{aligned}$$

La coïncidence de ces deux expressions montre que l'information utile pour la prédiction du futur est contenue dans l'état présent du processus $\{(R_n, L_n), n \geq 1\}$. Et simplifiant la dernière expression on obtient (2.3). Maintenant, en derivant les deux membres de l'Eq. (2.3) par rapport à $x_{l_{n+1}}$, on peut en déduire la densité de la loi conditionnelle de $(L_{n+1}; R_{n+1})$ sachant $(L_n; R_n)$:

$$f\left[L_{n+1} = l_{n+1}, R_{n+1} = x_{l_{n+1}} \mid L_n = l_n, R_n = x_{l_n}\right] = \gamma^{l_{n+1}} \times f\left(x_{l_{n+1}};\beta\right) \times F\left(x_{l_{n+1}};\beta\right)^{\gamma^{l_{n+1}}-1} \times F\left(x_{l_n};\beta\right)^{\sum_{t=l_n+1}^{l_{n+1}-1}\gamma^t}, \tag{2.4}$$

qui permet d'écrire, par conditionnements successifs, la vraisemblance (2.1). □

Remarque 2. Le résultat du Théorème 1 porte sur le cas où $L_{N_T} = T$. Il pourrait y avoir des situations où $L_{N_T} < T$, auquel cas les observations non records entre L_{N_T} et T contiennent aussi de l'information sur β et γ. La vraisemblance complétée (par cette information) des données serait alors l'Eq. (2.1) multipliée par :

$$\mathbb{P}\left[X_{l_{N_T}+1} < x_{l_{N_T}}, \ldots, X_T < x_{l_{N_T}}\right] = F\left(x_{l_{N_T}};\beta\right)^{\frac{\gamma^{l_{N_T}+1} - \gamma^{T+1}}{1-\gamma}}. \tag{2.5}$$

Remarque 3. Kukush et al. [3] donnent la log-vraisemblance de toute la série chronologique $\{X_t, t \geq 1\}$ dans le cas d'un modèle de Yang–Nevzorov de la forme $X_t \sim F(\cdot;\beta)^{\rho_t}$ avec $\rho_t = \gamma^t$ et quand la loi sous-jacente est la loi de Fréchet $F(x;\beta) = \exp\left(-(Ax)^{-\alpha}\right)$, avec $\beta = (A, \alpha)$ et où $A > 0$ et $\alpha > 0$. Cette log-vraisemblance est :

$$\log \mathcal{L}^K(\gamma; A; \alpha) = T \log\left(\alpha A^{-\alpha}\right) - (\alpha + 1)\sum_{t=1}^{T} \log x_k + \frac{T(T+1)}{2}\log\gamma - \sum_{t=1}^{T}\gamma^t (Ax_t)^{-\alpha}. \tag{2.6}$$

Il est intéressant de comparer leur log-vraisemblance, basée sur des données complètes, avec celle obtenue en utilisant les Eqs. (2.1) et (2.5), qui utilisent l'information incomplète venant des records. En injectant dans ces équations cette loi de Fréchet, on obtient la log-vraisemblance :

$$\begin{aligned}\log \mathcal{L}(\gamma; A; \alpha) = {}& N_T \log\left(\alpha A^{-\alpha}\right) - (\alpha + 1)\sum_{n=1}^{N_T} \log x_{l_n} + \left(\sum_{n=1}^{N_T} l_n\right)\log\gamma \\ & - \sum_{n=1}^{N_T-1} \frac{\gamma^{l_n} - \gamma^{l_{n+1}}}{1-\gamma}\left(Ax_{l_n}\right)^{-\alpha} - \frac{\gamma^{l_{N_T}} - \gamma^{T+1}}{1-\gamma}\left(Ax_{l_{N_T}}\right)^{-\alpha}.\end{aligned} \tag{2.7}$$

On peut remarquer la proximité des trois premiers termes de ces deux log-vraisemblances, qui sont essentiellement les mêmes fonctions des données disponibles dans les deux scénarios. Elles diffèrent par leurs derniers termes. Mais lorsque $l_{n+1} = l_n + 1$ pour tout n (toutes les données sont des records), les derniers termes aussi coïncident.

Théorème 4. *Soit $\{X_t, t=1,\ldots,T\}$ une série chronologique obéissant au modèle LDM. La vraisemblance basée sur les valeurs observées $\{(x_{l_n}, l_n), n=1,\ldots,N_T\}$ des couples $\{(R_n = X_{L_n}, L_n), n=1,\ldots,N_T\}$ est de la forme :*

$$\mathcal{L}(\theta;\beta) = f\left(x_{l_1} - \theta l_1;\beta\right) \times f\left(x_{l_2} - \theta l_2;\beta\right) \times \left(\prod_{t=l_1+1}^{l_2-1} F\left(x_{l_1} - \theta t;\beta\right)\right) \times \ldots \\ \times f\left(x_{l_{N_T}} - \theta l_{N_T};\beta\right) \times \left(\prod_{t=l_{N_T-1}+1}^{l_{N_T}-1} F\left(x_{l_{N_T-1}} - \theta t;\beta\right)\right), \tag{2.8}$$

où $\theta > 0$ est le drift et $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_k)$ le vecteur des paramètres de la distribution sous-jacente d'un modèle LDM de la forme $X_t = Y_t + \theta t$.

Démonstration. On montre ce théorème en suivant de près la preuve du Théorème 1 et en utilisant le résultat de Borovkov [1], auquel nous renvoyons pour les détails, qui montre que, dans le cas LDM, la suite des couples $\{(R_n, L_n), n \geq 1\}$ forme aussi une chaîne de Markov homogène, de probabilité de transition :

$$\mathbb{P}\left[L_{n+1} = l_{n+1}, R_{n+1} > x_{l_{n+1}} \mid L_n = l_n, R_n = x_{l_n}\right] = \left(1 - F\left(x_{l_{n+1}} - \theta l_{n+1}\right)\right) \times \prod_{t=l_n+1}^{l_{n+1}-1} F\left(x_{l_n} - \theta t\right). \quad \square$$

Remarque 5. Le résultat du Théorème 4 porte aussi sur le cas où $L_{N_T} = T$. Ainsi, comme dans le cas d'un modèle de Yang, il pourrait y avoir des situations où $L_{N_T} < T$, auquel cas les observations non records entre L_{N_T} et T contiennent de l'information sur β et θ. Comme les données sont indépendantes, la vraisemblance complétée des données serait alors l'Eq. (2.8) multipliée par :

$$\mathbb{P}\left[X_{l_{N_T}+1} < x_{l_{N_T}}, \ldots, X_T < x_{l_{N_T}}\right] = \prod_{t=l_{N_T}+1}^{T} F\left(x_{l_{N_T}} - \theta t\right).$$

Remarque 6. Notons aussi qu'en considérant la vraisemblance complétée (par ce dernier terme) d'un modèle LDM, on retrouve la vraisemblance que Smith [5] avait posée intuitivement en établissant une similitude entre une suite de records générée selon un modèle LDM et une suite de données censurées. Cette intuition est donc validée dans ce cas particulier.

3. Applications

En exploitant le Théorème 1 (resp. 4) on peut estimer, en maximisant la log-vraisemblance, le paramètre β de la distribution sous-jacente $F(x;\beta)$ en plus du paramètre γ (resp. θ) du modèle de Yang (resp. LDM), ce qui était impossible en utilisant uniquement les indicatrices de records (voir [2]). On notera $\hat{\beta}$ et $\hat{\gamma}$ (resp. $\hat{\theta}$) les estimateurs correspondants. Par ailleurs, un développement de Taylor montre que les quantitées $-\left(\frac{\partial^2 \log \mathcal{L}\left(\hat{\gamma};\hat{\beta}\right)}{\partial \gamma^2}\right)^{-1}$ et $-\left(\frac{\partial^2 \log \mathcal{L}\left(\hat{\gamma};\hat{\beta}\right)}{\partial \beta\, \partial \beta'}\right)^{-1}$ sont des approximations des variances de $\hat{\gamma}$ et de $\hat{\beta}$. Ainsi, en supposant la normalité asymptotique on a, pour un modèle de Yang,

$$\frac{\hat{\gamma} - \gamma}{\sqrt{-\left(\frac{\partial^2 \log \mathcal{L}(\gamma;\beta)}{\partial \gamma^2}\right)^{-1}}} \sim N(0,1),$$

et l'équivalent en version multidimensionnelle pour $\hat{\beta}$. On peut ainsi obtenir des intervalles de confiance pour γ et des régions de confiance pour β, de niveau approximatif $1-\alpha$. Des résultats similaires tiennent pour $\hat{\theta}$ et $\hat{\beta}$ dans le cas LDM.

En utilisant les résultats de la Section 2, nous pouvons aussi résoudre le problème lié à la sélection d'un bon modèle parmi une famille de modèles $M_k : X_t \sim F_k(x;\beta_k)^{\gamma^t}$ $(k = 0,\ldots,K)$ avec (γ, β_k) inconnus, et où β_k est le vecteur de paramètres de F_k de dimension p_k. Il suffit de maximiser (en k) une version pénalisée de la log-vraisemblance du modèle M_k, par exemple $2\log \mathcal{L}_k\left(\hat{\gamma};\hat{\beta}_k\right) - 2(p_k+1)$ si on considère le critère AIC. Il est possible de faire de même pour une famille de modèles LDM, et même de combiner dans la famille considérée des modèles de Yang et LDM. Par ailleurs, les modèles de Yang avec $\rho_t = \gamma^t$, ou LDM avec dérive θt, sont très simples. Smith [5] a considéré des modèles LDM avec des dérives plus complexes, de la forme $\theta_1 t + \theta_2 t^2 + \ldots$. Il est aussi possible d'imaginer des modèles de Yang comportant plusieurs paramètres. En adaptant les log-vraisemblances, on peut faire de la sélection dans ces familles plus détaillées de modèles LDM et de Yang.

Les méthodes de sélection de modèles décrites plus haut ne fournissent pas toujours une réponse adéquate. Par exemple, considérons le cas où la famille comporte les deux modèles $M_0 : X_t \sim F_0(x;\beta_0)^{\gamma^t}$ et $M_1 : X_t \sim F_1(x;\beta_1)^{\gamma^t}$. Il est alors naturel de considérer le cadre de travail du test des hypothèses : H_0 : « le modèle est M_0 » contre $H_1 =$ « le modèle est M_1 », ce qui offre l'avantage, dans un contexte de prise de décision, de contrôler les risques d'erreur de types I et II. Une statistique de test est celle du rapport des log-vraisemblances maximales : $\lambda = \log \mathcal{L}_1\left(\hat\gamma_1;\hat\beta_1\right) - \log \mathcal{L}_0\left(\hat\gamma_0;\hat\beta_0\right)$. Cependant, ici H_0 et H_1 ne sont pas nécessairement emboîtées et le comportement de λ n'obéit pas à la loi χ^2 asymptotique du théorème de Wilks (déjà, λ peut prendre des valeurs négatives). Ce problème, connu dans la littérature sous le nom de *non-nested hypothesis*, peut être partiellement résolu en appliquant la méthode du *bootstrap* paramétrique pour obtenir une région critique approximative. Pour préciser cette région critique, une suite de données *bootstrap* indépendantes $\{X_t^*, 1 \le t \le T\}$ est d'abord générée $\sim F_0\left(\cdot;\hat\beta_0\right)^{\hat\gamma_0^t}$. La suite des records et indicatrices des records $\left\{(R_n^*, L_n^*), n = 1, ..., N_T\right\}$ est extraite, et les quantités $(\hat\gamma_0^*, \hat\beta_0^*)$ et $(\hat\gamma_1^*, \hat\beta_1^*)$ sont calculées et injectées dans la statistique de test λ^*. En répétant un grand nombre de fois, on obtient les quantiles approchés de la loi *bootstrap* des λ^*, desquels on obtient une région critique de niveau approximatif α. Voir [4] pour davantage de détails.

4. Conclusion

L'obtention d'une vraisemblance plus complète, basée sur les valeurs et les indices des records, permet plusieurs avancées dans l'analyse statistique de séries de records. La Section 3 décrit quelques-unes des avancées qui sont à portée de main.

Pour aller plus loin, des recherches complémentaires sont nécessaires. Signalons en particulier le problème de la maximisation numérique des vraisemblances de la Section 2. Une piste est l'utilisation des estimateurs plus simples, mais moins efficaces, de Hoayek et al. [2] comme point de départ d'un algorithme de maximisation. Dans le cas où β est connu, ceci mène au développement d'estimateurs de type *one step*. Ce type d'estimateur est beaucoup plus facile à calculer, et ses propriétés asymptotiques sont typiquement comparables à celles de l'estimateur de vraisemblance maximale.

Une autre perspective concerne les tests d'adéquation de paires de modèles emboîtés et non emboîtés. En particulier, pour des hypothèses non emboîtées, plusieurs méthodes basées sur la vraisemblance de données *iid* ont été développées (voir [4] pour un panorama récent). Il serait intéressant de voir comment ces différentes approches s'adaptent au cas de records et se comparent à l'approche simple décrite à la Section 3. Notons que ce problème est important en analyse des records, car, ces derniers pouvant être vus comme étant des extrêmes de valeurs extrêmes, il est naturel de considérer que les choix possibles pour $F(x;\beta)$ peuvent se limiter à l'une ou l'autre des trois lois asymptotiques de valeurs extrêmes, soit la loi de Gumbel, de Fréchet ou de Weibull.

Références

[1] K. Borovkov, On records and related processes for sequences with trends, J. Appl. Probab. 36 (1999) 668–681.
[2] A.S. Hoayek, G.R. Ducharme, Z. Khraibani, Distribution-free inference in record series, Extremes (2017), http://dx.doi.org/10.1007/s10687-017-0283-7.
[3] A. Kukush, Y. Chernikov, D. Pfeifer, Maximum likelihood estimators in a statistical model of natural catastrophe claims with trend, Extremes 7 (4) (2004) 309–336.
[4] M.H. Pesaran, M. Weeks, Non-nested hypothesis testing: an overview, in: B.H. Baltagi (Ed.), A Companion to Theoretical Econometrics, Wiley-Blackwell, 2001, pp. 279–309.
[5] R.L. Smith, Forecasting records by maximum likelihood, J. Amer. Stat. Assoc. 83 (1988) 331–338.
[6] M.C. Yang, On the distribution of the inter-record times in an increasing population, J. Appl. Probab. (1975) 148–154.