C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 356 (2018) 1085–1089

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Théorie des nombres/Géométrie algébrique

Le nombre des systèmes locaux ℓ-adiques sur une courbe

Number of irreducible ℓ-adic local systems on a curve

Hongjie Yu

Université Paris-Diderot – Paris-7, Institut de mathématiques de Jussieu – Paris Rive Gauche, CNRS UMR 7586, bâtiment Sophie-Germain, case 7012, 75205 Paris cedex 13, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 18 septembre 2018
Accepté après révision le 30 octobre 2018
Disponible sur Internet le 12 novembre 2018

Présenté par Jean-Loup Waldspurger

RÉSUMÉ

Soit X_1 une courbe projective lisse et géométriquement connexe sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ avec $q = p^n$ éléments, où p est un nombre premier. Soit X le changement de base de X_1 à une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$. Le but de cet article est d'annoncer une formule pour le nombre de systèmes locaux ℓ-adiques ($\ell \neq p$) irréductibles de rang donné sur X fixés par l'endomorphisme de Frobenius. Celle-ci est semblable à une formule des points fixes de Grothendieck–Lefschetz pour une variété sur $\mathbb{F}_q$, ce qui généralise un résultat de Drinfeld en rang 2 et prouve une conjecture de Deligne. Nous esquissons notre méthode, qui consiste à passer du côté automorphe, calculer tous les termes de la formule des traces d'Arthur non invariante et relier la partie géométrique de la formule des traces avec le nombre de $\mathbb{F}_q$-points de l'espace des modules des fibrés de Higgs stables.

ABSTRACT

Let X_1 be a projective, smooth, and geometrically connected curve over $\mathbb{F}_q$ with $q = p^n$ elements where p is a prime number, and let X be its base change to an algebraic closure of $\mathbb{F}_q$. The goal of this article is to announce a formula for the number of irreducible ℓ-adic local systems ($\ell \neq p$) with a fixed rank over X fixed by the Frobenius endomorphism. This number behaves like a Grothendieck–Lefschetz fixed point formula for a variety over $\mathbb{F}_q$, which generalises a result of Drinfeld in rank 2 and proves a conjecture of Deligne. We also sketch our method, which consists in passing to the automorphic side by Langlands correspondence, then calculating all the terms in Arthur's non-invariant trace formula and linking the geometric part of trace formula to the number of $\mathbb{F}_q$-points of the moduli space of stable Higgs bundles.

Adresse e-mail : hongjie.yu@imj-prg.fr.

https://doi.org/10.1016/j.crma.2018.10.007
1631-073X/

1. Introduction

Soit X_1 une courbe définie sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ de cardinal q, qui est projective, lisse et géométriquement connexe de genre g_X. Soient $\mathbb{F}$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$ et X la courbe sur $\mathbb{F}$ déduite de X_1 par changement de base. L'endomorphisme de X_1 qui est l'identité sur l'espace topologique sous-jacent, et $f \mapsto f^q$ sur le faisceau structural, est un endomorphisme de $\mathbb{F}_q$-schéma. Nous noterons $\mathbf{F}_X$ l'endomorphisme du $\mathbb{F}$-schéma X qui s'en déduit par extension des scalaires. Fixons un nombre premier $\ell \nmid q$, une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ de $\mathbb{Q}_\ell$, et soit $E_n^{(\ell)}$ l'ensemble des classes d'isomorphie de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-systèmes locaux irréductibles de rang n sur X.

L'image inverse par $\mathbf{F}_X$ induit une permutation de $E_n^{(\ell)}$, notée par $\mathbf{F}_X^*$. Drinfeld [6] a montré, à l'aide de la correspondance de Langlands prouvée par lui-même et la formule des traces pour GL_2 établie par Jacquet–Langlands, que l'on a, quand le genre g_X est supérieur ou égal à 2,

$$|(E_2^{(\ell)})^{\mathbf{F}_X^{*k}}| = q^{k(4g_X-3)} + \sum_{i=1}^{u} m_i \alpha_i^k \quad \forall\, k \geqslant 1 \tag{1}$$

où les α_i sont des q-nombres de Weil de poids strictement inférieurs à $8g_X - 6$ et $(E_2^{(\ell)})^{\mathbf{F}_X^{*k}}$ désigne l'ensemble des éléments de E_2^ℓ fixés par le puissance k^{e} de $\mathbf{F}_X^*$. Pour nous, un q-nombre de Weil α de poids $i \in \mathbb{N}$ est un entier algébrique tel que pour tout plongement $\varsigma : \mathbb{Q}(\alpha) \to \mathbb{C}$, la valeur absolue $|\varsigma(\alpha)|$ est égale à $q^{\frac{i}{2}}$.

Dans l'article [10] de Kontsevich et [4] de Deligne, les auteurs ont fait des observations sur le résultat de Drinfeld et ont suggéré de le généraliser aux cas de rang supérieur. En particulier, Deligne a donné des conjectures précises (cf. conjecture 2.15, conjecture 2.18, conjecture 6.3 et conjecture 6.7 de [4]). Concernant ces conjectures, dans l'article [5], Deligne et Flicker se consacrent au cas où toutes les monodromies locales sont unipotentes avec un seul bloc de Jordan et où ces monodromies sont fixées en un ensemble fini S de points de X au-dessus d'au moins 2 places de X_1. Eux aussi passent du côté automorphe, et les conditions posées leur permettent de passer en plus au groupe multiplicatif d'une algèbre à division où la formule des traces est simple à utiliser. En rang 2, Flicker [7] a calculé le nombre désiré quand la monodromie apparaît en une place de X_1 avec un seul bloc de Jordan. Arinkin a obtenu aussi des résultats intéressants quand les monodromies sont des sommes directes de caractères modérés de position générale (cf. section 3 [4]). Pour tous ces cas, des résultats similaires à ceux de Drinfeld sont montrés.

Le théorème principal généralise les résultats de Drinfeld aux rangs supérieurs.

Supposons $g_X \geqslant 2$. Soient $\sigma_1, \ldots, \sigma_{2g_X}$ les q-nombres de Weil de la courbe X_1, c'est-à-dire les valeurs propres de $\mathbf{F}_X$ agissant sur $H^1(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. Étant donné le fait que la dualité de Poincaré induit une forme symplectique sur $H^1(X, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell(-1)$, on peut indexer ces valeurs propres de telle façon que $\sigma_i \sigma_{i+g_X} = q$ pour tout i tel que $g_X \geqslant i \geqslant 1$.

Théorème 1.1.

1. *Pour tous entiers $g \geqslant 2$ et $n \geqslant 1$, il existe un polynôme de Laurent $P_{g,n}(y, z_1, \ldots, z_g) \in \mathbb{Z}[y, z_1^{\pm 1}, \ldots, z_g^{\pm 1}]$ (nécessairement unique) symétrique en les z_i et invariant par la substitution $z_i \mapsto y z_i^{-1}$ tel que , pour tout $k \geqslant 1$, tout corps fini $\mathbb{F}_q$ de cardinal q, toute courbe X_1 projective lisse et géométriquement connexe sur $\mathbb{F}_q$ de genre $g_X \geqslant 2$ et tout nombre premier $\ell \nmid q$, on ait*
$$|(E_n^{(\ell)})^{\mathbf{F}_X^{*k}}| = P_{g_X,n}(q^k, \sigma_1^k, \ldots, \sigma_{g_X}^k).$$
De plus, chaque monôme $y^m z_1^{n_1} \cdots z_g^{n_g}$ qui apparaît dans $P_{g,n}$ vérifie
$$m + \sum_{i=1}^{g} \min\{n_i, 0\} \geqslant 0.$$
Posons $\deg y = 2$ et $\deg z_i = 1$, alors le terme de poids dominant de $P_{g,n}$ est $y^{(g-1)n^2+1}$. C'est-à-dire que $\deg P_{g,n} = 2((g-1)n^2+1)$ et $\deg(P_{g,n} - y^{(g-1)n^2+1}) < 2((g-1)n^2+1)$.
2. *Il existe un nombre fini de nombres de Weil α_i et des entiers m_i tels que*
$$|(E_n^{(\ell)})^{\mathbf{F}_X^{*k}}| = |\mathrm{Pic}^0_{X_1}(\mathbb{F}_{q^k})| \big(\sum_i m_i \alpha_i^k\big), \quad \forall\, k \geqslant 1.$$
En particulier, pour tout $k \geqslant 1$, $|\mathrm{Pic}^0_{X_1}(\mathbb{F}_{q^k})|$ divise $|(E_n^{(\ell)})^{\mathbf{F}_X^{*k}}|$. De plus, on a
$$\sum_i m_i = \sum_{l|n} \mu(l)\mu(n/l) l^{2g_X-3},$$
où μ est la fonction de Möbius.

Remarque. Le groupe fondamental étale de l'espace projectif sur $\mathbb{F}$ est trivial et celui d'une courbe elliptique sur $\mathbb{F}$ est abélien, donc il n'existe pas de systèmes locaux irréductibles de rang $\geqslant 2$ pour les courbes de genre 0 et 1.

Ce théorème répond positivement à la conjecture 2.15 de [4], et à la conjecture 6.3 de [4] dans le cas partout non-ramifié. Ce théorème réduit la conjecture 6.7 de [4] à une conjecture sur la caractéristique d'Euler des variétés des PGL_n-caractères qu'on énonce dans la suite.

Soit Σ une surface de Riemann de genre g. Soit $\mathcal{U}_n$ la sous-variété affine de GL_n^{2g} définie sur $\mathbb{Z}$:

$$\mathcal{U}_n := \{(A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_g, B_g) \in GL_n^{2g} \mid [A_1, B_1] \cdots [A_g, B_g] = 1\}$$

où $[A_i, B_i] := A_i B_i A_i^{-1} B_i^{-1}$, $1 \leqslant i \leqslant g$. Le groupe $PGL_n \times \mathbb{G}_m^{2g}$ agit sur $\mathcal{U}_n$ par

$$(h, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2g}).(A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_g, B_g) = (\lambda_1 h A_1 h^{-1}, \lambda_2 h B_1 h^{-1}, \ldots, \lambda_{2g-1} h A_g h^{-1}, \lambda_{2g} h B_g h^{-1}).$$

Un point $x \in \mathcal{U}_n$ est appelé stable pour cette action si l'orbite de x est fermée et le stabilisateur de x dans $PGL_n \times \mathbb{G}_m^{2g}$ est de dimension 0. Soit $\mathcal{U}_n^s$ la sous-variété de $\mathcal{U}_n$ des points stables. On sait que le quotient géométrique $\mathcal{U}_n^s/(PGL_n \times \mathbb{G}_m^{2g})$ existe. On définit alors la variété des PGL_n-caractères $\mathcal{M}_{PGL_n}$ associée à Σ comme ce quotient.

Soit Ω un corps algébriquement clos, alors $\mathcal{U}_n^s(\Omega)$ est l'ensemble des représentations irréductibles $\rho : \pi_1(\Sigma, x) \to GL_n(\Omega)$ (cf. Remarque 6.6 [15]). Par un argument analogue à la preuve du théorème 2.2.12 [9], on sait alors que la conjecture 6.7 de [4] équivaut à la conjecture suivante.

Conjecture 1.2. *Soit Σ une surface de Riemann de genre g. La caractéristique d'Euler de $\mathcal{M}_{PGL_n}$ définie ci-dessus est $\sum_{l|n} \mu(l)\mu(n/l) l^{2g-3}$.*

Remarque. Deligne a vérifié cette conjecture quand $n = 2$, cf. [3].

2. Traduction du problème du côté automorphe

Soit $F = \mathbb{F}_q(X_1)$ le corps de fonctions de la courbe X_1. Soit $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles du corps F. Les valuations discrètes normalisées de F s'identifient aux points fermés de X_1. Soit $|X_1|$ leur ensemble. Soit $|\cdot|_{\mathbb{A}^\times}$ la "valeur absolue" adélique normalisée de $\mathbb{A}^\times$. Soit F_x le corps des fractions de $\mathcal{O}_x$. On définit pour $g = (g_x)_{x \in |X_1|} \in \mathbb{A}^\times$:

$$\deg g := \frac{1}{\log q} \log |g|_{\mathbb{A}^\times} = -\sum_{x \in |X_1|} [\kappa(x) : \mathbb{F}_q] x(g_x)$$

où $\kappa(x)$ est le corps résiduel de $\mathcal{O}_x$ et $x(g_x)$ est la valuation normalisée de g_x.

Il suffit de calculer le cardinal de $(E_n^{(\ell)})^{\mathbf{F}_X^{*k}}$ quand $k = 1$. On obtient le cas général en remplacant la courbe X_1 par X_k. Soit $\mathcal{A}_n(X_1)$ l'ensemble des classes d'isomorphie des représentations automorphes cuspidales partout non ramifiées de $GL_n(\mathbb{A})$.

Un caractère $\lambda : GL_n(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^\times$ est appelé inertiel s'il se factorise à travers le morphisme $g \mapsto \deg(\det g)$ de $GL_n(\mathbb{A})$ sur $\mathbb{Z}$. Les caractères inertiels forment un groupe abélien. On définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{A}_n(X_1)$.

Définition 2.1. Soient $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{A}_n(X_1)$. On dit que π_1 et π_2 sont inertiellement équivalentes s'il existe un caractère inertiel λ tel que les représentations $\pi_1 \otimes \lambda$ et π_2 sont isomorphes.

Soit $\pi \in \mathcal{A}_n(X_1)$. On dit que π est absolument cuspidale si π reste cuspidale après changement de base, au sens de la fonctorialité de Langlands, de F à $F \otimes \mathbb{F}_{q^k}$ $\forall\, k \geqslant 1$. Cette notion est compatible avec la relation d'équivalence inertielle. La correspondance de Langlands, montrée par L. Lafforgue ([12]), nous permet de passer du côté automorphe.

Proposition 2.2. *Fixons un isomorphisme $\iota : \overline{\mathbb{Q}}_\ell \to \mathbb{C}$. L'ensemble $(E_n^{(\ell)})^{\mathbf{F}_X^*}$ est en bijection avec l'ensemble des classes d'équivalence inertielle de représentations absolument cuspidales dans $\mathcal{A}_n(X_1)$.*

3. Calculs d'une formule des traces et résultats automorphes

Pour obtenir le comptage des représentations absolument cuspidales, on calcule toute la formule des traces d'Arthur–Lafforgue pour la fonction test $\mathbb{1}_{GL_n(\mathcal{O})}$, la fonction caractéristique de $GL_n(\mathcal{O})$, où $\mathcal{O}$ est l'anneau des adèles entiers de F.

Soit B le sous-groupe de Borel défini sur F des matrices triangulaires supérieures. Soit T le sous-tore maximal déployé sur F de G formé des matrices diagonales. Pour tout sous-groupe parabolique P de G défini sur F, soit M_P le sous-groupe de Levi de P contenant T et soit N_P le radical unipotent de P.

On suit les notations d'Arthur (cf. [1]). Soient $X^*(P) := \mathrm{Hom}_F(P, \mathbb{G}_m)$, $\mathfrak{a}_P^* := X^*(P) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et $\mathfrak{a}_P := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(P), \mathbb{R})$. On dispose de l'application d'Harish-Chandra $H_P : G(\mathbb{A}) \to \mathfrak{a}_P$. On dispose d'ensembles de racines simples Δ_P, *resp.* de poids simples $\widehat{\Delta}_P$ qu'on voit comme des éléments de $\mathfrak{a}_P^*$ et qui définissent des cônes ouverts dans $\mathfrak{a}_P$ dont on note τ_P, *resp.* $\widehat{\tau}_P$, la fonction caractéristique.

On fixe la mesure de Haar $\mathrm{d}g$ sur $GL_n(\mathbb{A})$ normalisée par $\mathrm{vol}(GL_n(\mathcal{O}))=1$. Arthur a défini la trace tronquée par l'intégrale qui converge absolument :

$$J := \int_{GL_n(F)\backslash GL_n(\mathbb{A})/A_G} \sum_P \sum_{\delta\in P(F)\backslash GL_n(F)} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_P - \dim \mathfrak{a}_G} \widehat{\tau}_P(H_B(\delta g))\, k_P(\delta g, \delta g)\, \mathrm{d}g$$

où la somme $\sum_P$ porte sur tout sous-groupe parabolique standard et

$$k_P(g,g) = \sum_{\gamma\in M_P(F)} \int_{N_P(\mathbb{A})} \mathbb{1}_{GL_n(\mathcal{O})}(g^{-1}\gamma n g)\,\mathrm{d}n$$

où $\mathrm{d}n$ est la mesure de Haar normalisée par $\mathrm{vol}(N_P(F)\backslash N_P(\mathbb{A}))=1$. Soit e un entier. On considère

$$J_e := \int_{GL_n(F)\backslash GL_n(\mathbb{A})^e} \sum_{\delta\in P(F)\backslash GL_n(F)} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_P - \dim \mathfrak{a}_G} \widehat{\tau}_P(H_B(\delta g))\, k_P(\delta g, \delta g)\, \mathrm{d}g$$

où $GL_n(\mathbb{A})^e$ est l'ensemble des adèles dans $GL_n(\mathbb{A})$ dont le déterminant est de degré e. Clairement,

$$J = \sum_{e=0}^{n-1} J_e .$$

On exprimera J_e en termes des fibrés vectoriels et fibrés de Higgs sur X_1. Pour tout $\mathcal{E}$ fibré vectoriel non nul, on note $\mu(\mathcal{E})$ la pente de $\mathcal{E}$, c'est-à-dire le quotient du degré de $\mathcal{E}$ par le rang de $\mathcal{E}$.

Définition 3.1. Soit $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel sur X_1. On dit que $\mathcal{E}$ est isocline si pour toute décomposition non-triviale $\mathcal{E}\cong\mathcal{F}\oplus\mathcal{G}$, on a $\mu(\mathcal{F})=\mu(\mathcal{E})$.

Remarque. Si $(e,n)=1$, un fibré vectoriel isocline de degré e sur X_1 est automatiquement un fibré géométriquement indécomposable.

Soit $\mathcal{P}_n^e(X_1)$ le nombre de classes d'isomorphie de fibrés vectoriels isoclines de rang n et de degré e. C'est un nombre fini.

Soit $\mathbf{Higgs}_{n,e}(X_1)$ le $\mathbb{F}_q$-champ algébrique des fibrés de Higgs sur X_1, qui paramètre les couples $(\mathcal{E},\theta)$ tels que :

- $\mathcal{E}$ est un fibré vectoriel sur X_1 de rang n de degré e.
- $\theta:\mathcal{E}\to\mathcal{E}\otimes\omega_{X_1}$ est un morphisme de $\mathcal{O}_{X_1}$-modules, où ω_{X_1} est le fibré en droite canonique.

  On sait que $\mathbf{Higgs}_{n,e}(X_1)$ est localement de type fini. Un couple $(\mathcal{E},\theta)$ est appelé stable, si tout sous-fibré $0\neq\mathcal{F}\subsetneq\mathcal{E}$ qui est θ-stable (i.e. $\theta(\mathcal{F})\subseteq\mathcal{F}\otimes\omega_{X_1}$) satisfait

  $$\mu(\mathcal{F})<\mu(\mathcal{E}).$$

  Soit $\mathbf{Higgs}_{n,e}^{st}(X_1)$ le sous-champ de $\mathbf{Higgs}_{n,e}(X_1)$ des fibrés de Higgs stables. Soit $\mathrm{Higgs}_{n,e}^{st}(X_1)$ le schéma des modules grossiers des fibrés de Higgs stables. On sait que $\mathrm{Higgs}_{n,e}^{st}(X_1)$ est un schéma lisse, quasi projectif et de dimension $2(g_X-1)n^2+2$ (cf. proposition 7.4. [16]).

Par un analogue du côté géométrique de la formule des traces, on a le résultat suivant :

Théorème 3.2. *Soit $e\in\mathbb{Z}$, on a*

$$J_e=\mathcal{P}_n^e(X_1).$$

De plus J_e ne dépend que de l'ordre de e dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. De plus, quand $(n,e)=1$, on a aussi

$$J_e = q^{-n^2(g_X-1)-1}|\mathrm{Higgs}_{n,e}^{st}(X_1)(\mathbb{F}_q)| \,. \tag{2}$$

Remarque.

1. L'égalité (2) est essentiellement un résultat de l'article [2].

2. La première partie du théorème concernant l'indépendance des degrés de $|\mathrm{Higgs}^{st}_{n,e}(X_1)(\mathbb{F}_q)|$ quand $(e,n)=1$ est montrée par Groechenig, Wyss et Ziegler (cf. théoreme 5.15 [8]). Indépendamment, Mellit (cf. théorème 1.1 [13]) a montré l'indépendance des degrés du nombre des fibrés géométriquement indécomposables en utilisant le résultat de Schiffmann [17]. La deuxième partie du théorème ci-dessus est montrée par Mozgovoy et Schiffmann (cf. [17] [14]).

On peut aussi calculer J_e en utilisant le développement spectral.

Nous noterons le cardinal de $|(E_n^{(\ell)})^{\mathbf{F}_X^{*k}}|$ par $C_n(X_k)$:

$$C_n(X_k) := |(E_n^{(\ell)})^{\mathbf{F}_X^{*k}}|. \tag{3}$$

On définit une série formelle

$$\mathrm{aut}_{X_1}(z) = \exp\Big(\sum_{m\geqslant 1}\sum_{k\geqslant 1}\frac{mC_m(X_k)}{k}z^{mk}\Big)\,.$$

On utilise $\mathrm{aut}_{X_1}(z)^s$ ($s\in\mathbb{C}$) pour $\exp(s\sum_{m\geqslant 1}\sum_{k\geqslant 1}\frac{mC_m(X_k)}{k}z^{mk})$ et aut_{X_l} pour l'expression obtenue en remplaçant X_k par X_{kl} dans la formule ci-dessus. De plus, pour tout $\nu\geqslant 1$ et $f(z)\in\mathbb{C}[[z]]$ une série formelle, on désigne par $[z^\nu]f(z)$ le coefficient de z^ν de $f(z)$. Par le développement spectral donné par L. Lafforgue (cf. théorème 11, page 307, de [11]) de la formule des traces, on obtient le résultat suivant.

Théorème 3.3. *Supposons $g_X\neq 1$. Soit $e\in\mathbb{Z}$ tel que $(e,n)=1$, on a*

$$J_e = \sum_{l|n}\frac{\mu(l)}{n(2g_X-2)}\sum_{\lambda\vdash n}\frac{1}{\sum_j a_j}\prod_{j\geqslant 1}[z^{a_j}]\mathrm{aut}_{X_l}(z^l)^{\frac{(2g_X-2)S_j(\lambda)}{l}}$$

où $\sum_{\lambda\vdash n}$ portant sur les partitions non ordonnées $\lambda=(1^{a_1},2^{a_2},\dots)$ de n et $S_j(\lambda):=\sum_{\nu\geqslant 1}a_\nu\min\{\nu,j\}$.

Remarque. Notons que si $l\nmid a_j$, on a $[z^{a_j}]\mathrm{aut}_{X_l}(z^l)^{\frac{(2g_X-2)S_j(\lambda)}{l}}=0$.

En combinant le théorème 3.2 avec le théorème 3.3, on a une identité dont le membre de gauche est relié aux fibrés des Higgs sur la courbe X_1, et celui à droite est relié aux $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-systèmes locaux (corollaire 3.4).

Corollaire 3.4. *Si $(e,n)=1$ et $g_X\neq 1$, on a*

$$q^{-n^2(g_X-1)-1}|\mathrm{Higgs}^{st}_{n,e}(X_1)(\mathbb{F}_q)| = \sum_{l|n}\frac{\mu(l)}{n(2g_X-2)}\sum_{\lambda\vdash n}\frac{1}{\sum_j a_j}\prod_{j\geqslant 1}[z^{a_j}]\mathrm{aut}_{X_l}(z^l)^{\frac{(2g_X-2)S_j(\lambda)}{l}}. \tag{4}$$

Par ce corollaire 3.4 et une formule de Mellit–Schiffmann (cf. théorème 1.1 de [13]), on montre, en raisonnant par récurrence, le théorème 1.1.

Remerciement

Je voudrais remercier profondément mon directeur de thèse Pierre-Henri Chaudouard pour m'avoir proposé ce sujet et m'avoir appris la formule des traces, ainsi que pour nos nombreuses discussions pendant ces trois années.

Références

[1] J. Arthur, A trace formula for reductive groups. I. Terms associated to classes in G(Q), Duke Math. J. 45 (4) (1978) 911–952.
[2] P.-H. Chaudouard, Sur le comptage des fibrés de Hitchin, Astérisque 369 (2015) 223–284.
[3] P. Deligne, Cours à l'IHES, http://www.ihes.fr/~abbes/CAGA/deligne.html.
[4] P. Deligne, Comptage de faisceaux ℓ-adiques, Astérisque 369 (2015) 285–312.
[5] P. Deligne, Y.Z. Flicker, Counting local systems with principal unipotent local monodromy, Ann. of Math. (2) 178 (3) (2013) 921–982.
[6] V.G. Drinfel'd, The number of two-dimensional irreducible representations of the fundamental group of a curve over a finite field, Funkc. Anal. Prilozh. 15 (4) (1981) 75–76.
[7] Y.Z. Flicker, Counting rank two local systems with at most one, unipotent, monodromy, Amer. J. Math. 137 (3) (2015) 739–763.
[8] M. Groechenig, D. Wyss, P. Ziegler, Mirror symmetry for moduli spaces of Higgs bundles via p-adic integration, https://arxiv.org/abs/1707.06417.
[9] T. Hausel, F. Rodriguez-Villegas, Mixed Hodge polynomials of character varieties, Invent. Math. 174 (3) (2008) 555–624.
[10] M. Kontsevich, Notes on motives in finite characteristic, in: Algebra, Arithmetic, and Geometry: in Honor of Yu. I. Manin, vol. II, in: Progress in Mathematics, vol. 270, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, USA, 2009, pp. 213–247.
[11] L. Lafforgue, Chtoucas de Drinfeld et conjecture de Ramanujan–Petersson, Astérisque 243 (1997), ii + 329 p.
[12] L. Lafforgue, Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands, Invent. Math. 147 (1) (2002) 1–241.
[13] A. Mellit, Poincaré polynomials of moduli spaces of Higgs bundles and character varieties (no punctures), https://arxiv.org/abs/1707.04214.
[14] S. Mozgovoy, O. Schiffmann, Counting Higgs bundles, https://arxiv.org/abs/1411.2101.
[15] K. Nakamoto, Representation varieties and character varieties, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 36 (2) (2000) 159–189.
[16] N. Nitsure, Moduli space of semistable pairs on a curve, Proc. Lond. Math. Soc. (3) 62 (2) (1991) 275–300.
[17] O. Schiffmann, Indecomposable vector bundles and stable Higgs bundles over smooth projective curves, Ann. of Math. (2) 183 (1) (2016) 297–362.