



Géométrie/Problèmes mathématiques de la mécanique

Sur la détermination du périmètre de l'ovale à huit centres

*On the determination of the perimeter of the eight-centered oval*Jean-Marc Ginoux^a, Jean-Claude Golvin^b^a Laboratoire LIS, CNRS, UMR 7020, université de Toulon, BP 20132, 83957, La Garde cedex, France^b CNRS, Université Bordeaux-3 – Michel-de-Montaigne, France

I N F O A R T I C L E

Historique de l'article :

Reçu le 29 juillet 2018

Accepté après révision le 31 octobre 2018

Disponible sur Internet le 12 novembre 2018

Présenté par Charles-Michel Marle

R É S U M É

L'objet de cette note est de présenter l'histoire des principales recherches réalisées pour représenter une ellipse au moyen d'un ovale à huit centres et de les compléter en donnant une démonstration géométrique des formules exprimant les coordonnées des centres, des rayons et des angles aux centres des arcs de cercle constituant cet ovale. Ces formules permettront de déterminer son périmètre et donc d'approximer la valeur de celui de l'ellipse. Ce résultat pourrait s'avérer utile pour les archéologues, qui vérifieront ainsi l'hypothèse selon laquelle certains amphithéâtres romains, comme le Colisée, ont bien été construits à partir d'ovales à huit centres.

© 2018 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Cet article est publié en

Open Access sous licence CC BY-NC-ND

[\(http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/\)](http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).

A B S T R A C T

This note aims to present the history of the main researches carried out to represent an ellipse by means of an eight-centered oval and to complete them by giving a geometrical demonstration of the formulas expressing the coordinates of the centers, the radii and the central angles of these arcs of circles making up this oval. These formulas will make it possible to determine its perimeter and thus to approximate the value of that of the ellipse. This result could be useful for archaeologists, who will test the hypothesis according to which some Roman amphitheatres, such as the Coliseum, were built from eight-centered ovals.

© 2018 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Cet article est publié en

Open Access sous licence CC BY-NC-ND

[\(http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/\)](http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).**1. Introduction***1.1. L'ellipse*

Dans son traité sur les *Coniques*, composé de huit livres et dont seulement quatre nous sont parvenus, Apollonius de Pergé (ca. 240 av. J.-C.) étudia la parabole, l'hyperbole et l'ellipse [8]. Alors que les principales propriétés de l'ellipse furent

Adresses e-mail : ginoux@univ-tln.fr (J.-M. Ginoux), jean-claude.golvin@wanadoo.fr (J.-C. Golvin).<https://doi.org/10.1016/j.crma.2018.10.009>1631-073X/© 2018 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Cet article est publié en Open Access sous licence CC BY-NC-ND (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

découvertes assez rapidement, la détermination de son périmètre devait rester, pendant plusieurs siècles, inaccessible aux géomètres. Aussi, dès l'antiquité grecque, puis romaine, et tout au long des siècles qui suivirent, de nombreuses approximations du périmètre de l'ellipse furent proposées par de célèbres astronomes ou mathématiciens. En 1609, Johannes Kepler présenta une formule (1) consistant à approcher la circonférence de l'ellipse par celle de deux cercles dont les rayons étaient respectivement égaux à la moyenne géométrique et à la moyenne arithmétique des longueurs de son demi grand axe a et de son demi petit axe b :

$$L(a, b) = \pi(a + b) \quad (1)$$

On remarque que si l'ellipse se réduit à un cercle de rayon R , on a $a = b = R$ et l'on retrouve la valeur bien connue du périmètre du cercle. Après l'invention du calcul infinitésimal à la fin du XVII^e siècle par Isaac Newton et Gottfried Wilhelm Leibniz [4] et celle des développements en séries, réalisée au début du XVIII^e siècle par Brook Taylor, le mathématicien écossais Colin Mc Laurin [21, p. 659] fournit l'expression exacte du périmètre de l'ellipse sous la forme d'une série infinie de termes :

The same elliptic quadrant is to the quadrant of the circle of a radius equal to SB the semi-transverse axis, supposing $SB = a$, as $1 - \frac{k^2}{4a^2} - \frac{3k^4}{64a^4} - \frac{5k^6}{256a^6} - \&c.$ to 1.

D'après Carl Gustav Jakob Jacobi, le mathématicien et physicien suisse Léonard Euler [11, p. 128] présenta devant les membres de l'Académie des sciences de Berlin, le 11 septembre 1749, une description de la circonférence de l'ellipse au moyen d'une série infinie de termes :

§. XV. Quodsi jam isti valores pro formulis integralibus, ex quibus longitudo quadrantis elliptici q conflari inventus est, substituantur, reperietur

$$q = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}mn \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{4} n^4 \cdot \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{3}{6} n^6 \cdot \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \frac{\pi}{2} - \&c.$$

quæ ad sequentem seriem fatis concinnam revocatur

$$q = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{2} n^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{3}{4} n^4 - \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{3}{4} \frac{5}{6} n^6 - \&c. \right)$$

cujus lex progressionis est manifesta.

L'année suivante, le comte Giulio Fagnano, un mathématicien italien autodidacte, introduisit une série de transformations analytiques ingénieuses jetant les bases de la théorie des *intégrales elliptiques*. Ses travaux furent publiés en 1750 sous la forme de deux volumes intitulés *Produzioni matematiche* [12]. Euler, à qui on avait demandé d'examiner les deux traités de Fagnano, généralisa ses résultats et fournit la fameuse formule de l'intégrale elliptique (2) permettant de calculer la valeur du périmètre d'une ellipse en fonction de son excentricité $\varepsilon = c/a$ avec $c = \sqrt{a^2 - b^2}$:

$$L(a, b) = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2(t)} dt = 2\pi a \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{3\varepsilon^4}{64} - \frac{5\varepsilon^6}{256} - \dots \right] \quad (2)$$

Cette intégrale elliptique (2), dite de « deuxième espèce », ne pouvant s'exprimer en termes de fonctions élémentaires, de nouvelles approximations furent régulièrement proposées jusqu'à nos jours. On peut citer, pour mémoire, celle du mathématicien écossais James Ivory [19] en 1796, celle du mathématicien italien Giuseppe Peano [23] en 1889, ou encore celles fournies par le mathématicien indien Srinivasa Ramanujan [3] en 1914. (Pour plus de détails concernant les différentes méthodes d'approximation du périmètre de l'ellipse, voir, par exemple les travaux [1,2,7].)

Parallèlement, dès l'antiquité grecque, différents instruments, comme l'ellipsographe de Proclus (410–485 ap. J.-C.), furent imaginés pour dessiner une ellipse [24]. De même, plusieurs méthodes, comme celle dite du « jardinier », due au mathématicien, ingénieur et architecte byzantin Anthémios de Tralles (474–558 ap. J.-C.), furent développées. Du point de vue technique, la construction de monuments ou d'éléments architecturaux de forme apparemment elliptique, comme les amphithéâtres romains, incita les ingénieurs à rechercher un moyen de représenter une ellipse le plus fidèlement possible. Ainsi, Balbus, l'arpenteur romain de Trajan qui vécut au I^{er} siècle de notre ère, écrivit :

Ex pluribus circulis forma sine angulo, ut harenae ex quattuor circulis.¹

¹ Voir Y. Guillaumin [16, p. 72].

Cette phrase, que l'on peut traduire par « Il s'agit d'une forme non angulaire tracée à partir de plusieurs cercles comme les arènes [amphithéâtres] le sont à partir de quatre cercles », semble indiquer que les formes ovales ont pu être privilégiées pour la construction des amphithéâtres romains. D'après les archéologues qui ont étudié depuis ces édifices [10,22,31,14], il apparaît que la méthode employée par ces bâtisseurs consistait à approcher la représentation graphique d'une ellipse par une courbe polycentrique, c'est-à-dire par un ovale à plusieurs centres. Ainsi, en 1682, Antoine Desgodetz, architecte du roi Louis XIV, étudia, à la demande de Colbert, les plus célèbres monuments de Rome. Il écrivit à propos du Colisée [9] :

J'ai trouvé l'ovale qui forme le mur [...] pour cela j'ai séparé la circonférence en plusieurs arcs que j'ai trouvé pouvoir être tracés au compas par huit centres.

Dans son analyse concernant la construction des amphithéâtres romains, Jean-Claude Golvin a montré que certains d'entre eux sont construits à partir d'ovales à quatre centres [15]. Mark Wilson Jones [31], qui considère que le plan du Colisée est un ovale à huit centres, a écrit :

By contrast the oval is a compound form, approximating to the ellipse by means of segmental arcs of different radius which meet where they share the same tangent. The simplest oval has four arcs drawn from two pairs of focal points on the main axes. More arcs and focal points may be added on this principle; the greater their number the closer the oval resembles the ellipse.

Depuis, plusieurs recherches ont confirmé, analytiquement et numériquement, que le tracé de l'ellipse pouvait être approché par un ovale à huit centres ou plus [17,20,25–27].

1.2. L'ovale

Si l'ovale paraît donc avoir été utilisé lors de l'édification d'amphithéâtres romains au tout début de l'ère chrétienne, il faut attendre, semble-t-il, la Renaissance italienne pour que des méthodes de construction d'ovales soient formalisées et publiées. Ainsi, l'architecte et sculpteur italien Sebastiano Serlio (1475–1554) proposa, dans son célèbre traité d'architecture, quatre constructions géométriques possibles d'ovales permettant d'approximer le tracé d'une ellipse [28]. Elles furent ensuite utilisées pendant des siècles par différents architectes à travers l'Europe pour la réalisation de nombreux monuments [26].

Néanmoins, si le problème du tracé d'une ellipse à partir de ses foyers avait été résolu au XVII^e siècle par différentes méthodes, celui de la construction d'un ovale à partir de ses axes restait encore à résoudre. La solution fut finalement apportée par le mathématicien, architecte, philosophe et théologien espagnol Tomas Vicente Tosca (1651–1723). Dans le premier volume de son *Compendio Mathematico*, Tosca définit l'ovale à quatre centres par la mesure de ses deux axes principaux [29]. Ayant ainsi déterminé le premier centre, il déduit le second de la bissectrice [13,14]. Sa méthode fournit alors une infinité de solutions pour les ovales d'axes similaires [20].

Concernant le tracé d'un ovale à huit centres, différentes méthodes étaient déjà connues au XVII^e siècle, comme en attestent les écrits de Desgodetz ci-dessus. D'autres furent ensuite proposées tout au long du XVIII^e siècle comme, par exemple, celles présentées par le mathématicien et astronome français Charles Étienne Louis Camus (1699–1768) dans les derniers chapitres de ses *Éléments de géométrie théorique et pratique* [6]. Ces méthodes consistaient alors à déterminer les centres et les rayons de trois cercles permettant de tracer trois arcs de cercle, qui forment ainsi une approximation circulaire par morceaux du quart de l'ellipse. Dans le cas de l'ovale à huit centres, cette détermination présentait, jusqu'à présent, comme le rappelait en 1999 Camille Trevisan [30], la difficulté suivante :

Non seulement il y a des combinaisons infinies pour le rayon mineur (R_1) et le majeur (R_3), comme dans l'ovale à quatre centres ; mais aussi autant de possibilités infinies de choix pour le rayon intermédiaire (R_2).

Ce n'est qu'en 1908 que cette difficulté, qui réside dans la détermination des centres et des rayons des trois arcs de cercle, fut levée par Frederic Robertson Honey [18]. Dans son très court article, il propose d'utiliser comme cercle mineur le cercle (C_1) osculateur à l'ellipse en l'extrémité du grand axe de coordonnées $(a, 0)$, et comme cercle majeur le cercle (C_2) osculateur à l'ellipse en l'extrémité du petit axe de coordonnées $(0, b)$. Notons e et g les centres, r et R les rayons, respectivement, de (C_1) et de (C_2). En remarquant que (C_1) est contenu à l'intérieur de (C_2), Honey voit que le choix de la valeur ρ du rayon du cercle intermédiaire suffit pour déterminer la position de son centre. Ce cercle, qui doit être tangent à la fois à (C_1) et à (C_2), contient nécessairement (C_1) et est nécessairement contenu dans (C_2). Son centre est donc à une distance $\rho - r$ de e et $R - \rho$ de g . Honey propose de choisir pour valeur du rayon ρ du cercle intermédiaire la moyenne arithmétique $(a + b)/2$ du demi-grand axe a et du demi-petit axe b de l'ellipse. Comme nous le verrons au paragraphe suivant, ce choix de la valeur du rayon ρ assure l'existence du cercle intermédiaire, tangent à la fois à (C_1) et à (C_2). Honey ne donne pas l'expression des angles au centre γ , β et δ des trois arcs de cercle formant une approximation du quart de l'ellipse. Nous établirons l'expression de ces angles au moyen des longueurs a et b des demi-axes de l'ellipse dans le paragraphe suivant. La connaissance de ces trois angles associée aux valeurs des trois rayons fournis par Honey permet de déterminer le périmètre de l'ovale à huit centres et donc d'approximer la valeur du périmètre de l'ellipse. Ce résultat pourrait s'avérer utile pour les géomètres et les archéologues. On montrera notamment que, dans le cas du Colisée, le périmètre de l'ovale à huit centres fournit une excellente approximation du périmètre de ce monument calculé au moyen de l'intégrale elliptique.

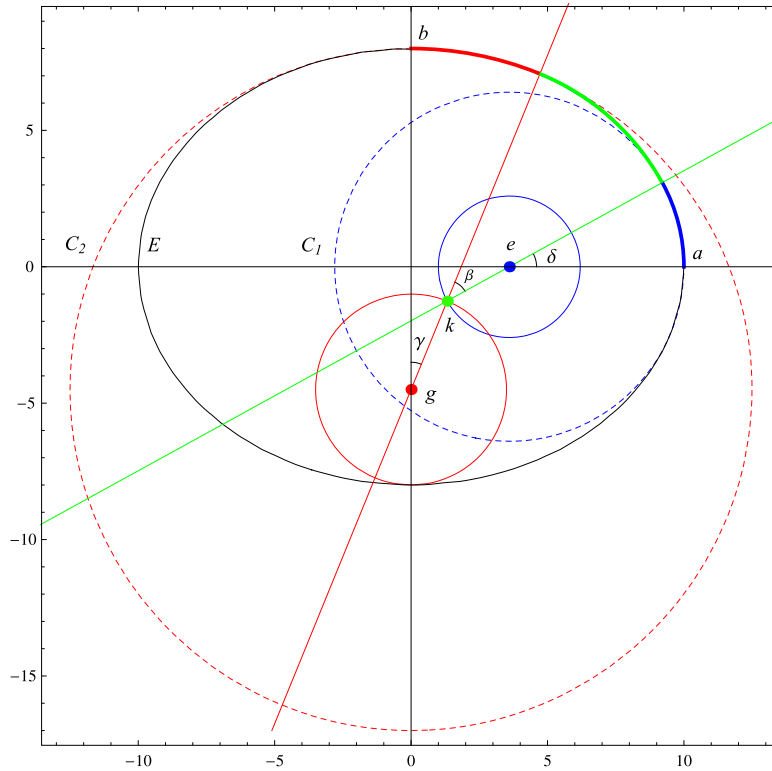


Fig. 1. Centres et rayons des cercles mineur, intermédiaire et majeur.

2. Détermination des angles aux centres

Honey [18] choisit pour *cercle mineur* (en tiretés bleus sur la Fig. 1) le centre du cercle osculateur à l'ellipse en son sommet a , de coordonnées $(a, 0)$. Son rayon est $r = \frac{b^2}{a}$. Son centre est le point e de coordonnées $e(a - r, 0)$. Il choisit pour le *cercle majeur* (en rouge sur la Fig. 1) le cercle osculateur à l'ellipse au sommet b de coordonnées $(0, b)$. Son rayon est $R = \frac{a^2}{b}$. Son centre est le point g de coordonnées $g(0, b - R)$. Il choisit $\frac{a + b}{2}$ pour valeur du rayon ρ du *cercle intermédiaire*. Le centre k de ce cercle est nécessairement un des deux points d'intersection des *cercles auxiliaires*, l'un de centre e et de rayon $\rho - r$ (en bleu sur la Fig. 1), l'autre de centre g et de rayon $R - \rho$ (en rouge sur la Fig. 1). Il faut bien sûr choisir ce point de telle manière que l'arc de cercle intermédiaire se raccordant tangentiellement aux cercles *majeur* et *mineur* (en vert sur la Fig. 1) soit contenu dans le quart de plan formé par les points de coordonnées positives. Nous avons déterminé les coordonnées du centre k du cercle *intermédiaire* et les angles aux centres des trois arcs de cercle formant une approximation du quart d'ellipse contenu dans le quart de plan formé par les points de coordonnées positives, de deux manières, l'une algébrique, l'autre géométrique. Nous présentons ici la démonstration géométrique, basée sur une construction à la règle et au compas. Nous tenons la démonstration algébrique à la disposition des lecteurs, qui peuvent l'obtenir sur simple demande.

Honey [18] définit le rayon du centre auxiliaire de centre e par

$$|ek| = \frac{(a - b)(a + 2b)}{2a} = \rho - r \tag{3}$$

et le rayon du centre auxiliaire de centre g par

$$|gk| = \frac{(a - b)(b + 2a)}{2b} = R - \rho \tag{4}$$

On remarque alors sur la Fig. 1 que la détermination du périmètre de l'ovale à huit centres nécessite d'explicitier l'expression de la valeur des trois angles aux centres γ , β et δ en fonction des longueurs du demi-axe majeur a et du demi-axe mineur b de l'ellipse. Pour y parvenir, nous proposons d'employer une méthode dont les différentes étapes sont décrites ci-dessous (voir Fig. 2).

1. Calcul de l'angle α' dans le triangle (gek) avec la « loi des cosinus ».
2. Calcul de l'angle $\gamma = \theta - \alpha'$ avec $\theta = \hat{g}$ dans le triangle rectangle (geo) .

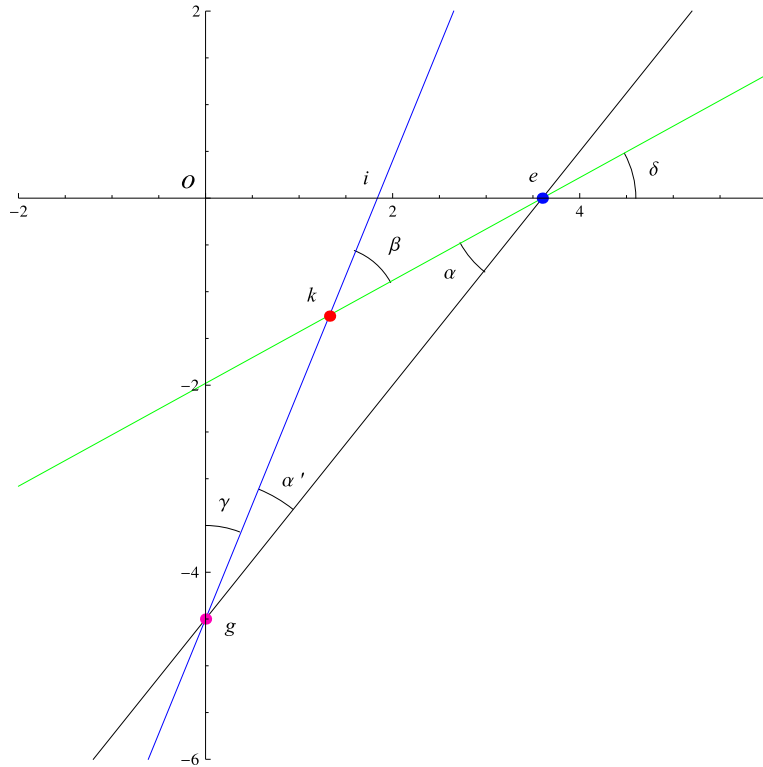


Fig. 2. Triangles (geo) et (gek) pour la détermination des trois angles aux centres.

3. Calcul de l'angle α dans le triangle (gek) avec la « loi des sinus ».
4. Calcul de l'angle β dans le triangle (gek) avec la « loi des sinus ».
5. Calcul de l'angle $\delta = \theta' - \alpha$ avec $\theta' = \hat{e}$ dans le triangle rectangle (geo) .

Au préalable, en appliquant le théorème de Pythagore au triangle rectangle (geo) , il est facile de déduire l'expression de la longueur de l'hypoténuse $|ge|$. En effet, des coordonnées des points g et e , on déduit les distances $|go|$ et $|oe|$. On obtient : $|ge|^2 = |go|^2 + |oe|^2$. Il vient alors :

$$|ge|^2 = \frac{(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)^2}{a^2 b^2} \tag{5}$$

2.1. Calcul de l'angle α' dans le triangle (gek) avec la « loi des cosinus »

Considérons le triangle (gek) (voir Fig. 2) et appliquons la « loi des cosinus ». On a :

$$|ke|^2 = |ge|^2 + |gk|^2 - 2|ge||gk| \cos \alpha'$$

On en déduit que :

$$\cos(\alpha') = \frac{|ge|^2 + |gk|^2 - |ke|^2}{2|ge||gk|} \tag{6}$$

Les valeurs de $|gk|$, $|ke|$ et $|ge|$ étant données par les expressions (3)–(5), on obtient finalement :

$$\cos(\alpha') = \frac{2a^2 + ab + b^2}{(b + 2a)\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{7}$$

De l'identité $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, on déduit la valeur de $\sin(\alpha')$:

$$\sin(\alpha') = \frac{b}{2a + b} \sqrt{\frac{2ab}{a^2 + b^2}} \tag{8}$$

2.2. Calcul de l'angle $\gamma = \theta - \alpha'$ avec $\theta = \hat{g}$ dans le triangle rectangle (*geo*)

Considérons le triangle rectangle (*geo*) (voir Fig. 2) et utilisons les relations métriques. On a :

$$\sin(\theta) = \frac{|oe|}{|ge|} = \frac{(a^2 - b^2)/a}{(a^2 - b^2)\sqrt{a^2 + b^2}/ab} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (9)$$

On en déduit que

$$\sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{and} \quad \cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (10)$$

De $\gamma = \theta - \alpha'$, il vient $\sin(\gamma) = \sin(\theta - \alpha') = \sin(\theta)\cos(\alpha') - \cos(\theta)\sin(\alpha')$. En remplaçant $\cos(\alpha')$, $\sin(\theta)$, $\sin(\alpha')$ et $\cos(\theta)$ par les expressions (7)–(10), on obtient :

$$\boxed{\sin(\gamma) = \frac{b}{2a+b} \frac{2a+b+\sqrt{2ab}}{a+b+\sqrt{2ab}}} \quad (11)$$

2.3. Calcul de l'angle α dans le triangle (*gek*) avec la « loi des sinus »

Considérons de nouveau le triangle (*gek*) (voir Fig. 2) et appliquons la « loi des sinus ». On a :

$$\frac{|ek|}{\sin(\alpha')} = \frac{|gk|}{\sin(\alpha)} = \frac{|ge|}{\sin(\pi - \beta)} \quad (12)$$

Les deux premières parties de cette égalité conduisent à $\sin(\alpha) = \frac{|gk|}{|ek|} \sin(\alpha')$. En remplaçant $|gk|$, $|ek|$ et $\sin(\alpha')$ par les expressions ((3), (4) & (8)), on obtient :

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{a+2b} \sqrt{\frac{2ab}{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad \cos(\alpha) = \frac{a^2+ab+2b^2}{(a+2b)\sqrt{a^2+b^2}} \quad (13)$$

2.4. Calcul de l'angle β dans le triangle (*gek*) avec la « loi des sinus »

Considérons maintenant la première et dernière partie de l'égalité (12), on a : $\sin(\pi - \beta) = \frac{|ge|}{|ek|} \sin(\alpha')$. Alors, en remplaçant $|ek|$, $|ge|$ et $\sin(\alpha')$ par les expressions (4), (5) et (8), et, en tenant compte du fait que : $\sin(\pi - \beta) = \sin(\beta)$, on obtient :

$$\boxed{\sin(\beta) = \frac{2(a+b)\sqrt{2ab}}{(a+2b)(2a+b)}} \quad (14)$$

2.5. Calcul de l'angle $\delta = \theta' - \alpha$ avec $\theta' = \hat{e}$ dans le triangle rectangle (*geo*)

Considérons le triangle rectangle (*geo*) (voir Fig. 2); la somme de ces angles est : $\theta + \theta' + \pi/2 = \pi$. Il s'ensuit que $\theta' = \pi/2 - \theta$. Ce qui implique que : $\cos(\theta') = \cos(\pi/2 - \theta) = \sin(\theta)$ et $\sin(\theta') = \sin(\pi/2 - \theta) = \cos(\theta)$. Ainsi, à partir des Eqs. (10), on obtient :

$$\sin(\theta') = \cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{et} \quad \cos(\theta') = \sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (15)$$

De $\delta = \theta' - \alpha$, il vient $\sin(\delta) = \sin(\theta' - \alpha) = \sin(\theta')\cos(\alpha) - \cos(\theta')\sin(\alpha)$. Alors, en remplaçant $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$, $\sin(\theta')$ et $\cos(\theta')$ par les expressions (13)–(15), on obtient :

$$\boxed{\sin(\delta) = \frac{a}{a+2b} \frac{a+2b+\sqrt{2ab}}{a+b+\sqrt{2ab}}} \quad (16)$$

Remarque. Il est important de remarquer que les expressions (11), (14) et (16) présentent une parfaite symétrie. En effet, en remplaçant a par b dans l'expression (11) de $\sin(\gamma)$, on retrouve l'expression (16) de $\sin(\delta)$ et *vice versa*. De plus, l'expression (14) de $\sin(\beta)$ est invariante si l'on remplace a par b et *vice versa*. Les principaux résultats obtenus ci-dessus sont résumés dans le Tableau 1 ci-dessous.

Tableau 1
Angles aux centres et rayons des cercles majeure, intermédiaire et mineur.

Cercles	Angles aux centres	Rayons
Majeur	$\sin(\gamma) = \frac{b}{2a+b} \frac{2a+b+\sqrt{2ab}}{a+b+\sqrt{2ab}}$	$R = \frac{a^2}{b}$
Intermédiaire	$\sin(\beta) = \frac{2(a+b)\sqrt{2ab}}{(a+2b)(2a+b)}$	$\rho = \frac{a+b}{2}$
Mineur	$\sin(\delta) = \frac{a}{a+2b} \frac{a+2b+\sqrt{2ab}}{a+b+\sqrt{2ab}}$	$r = \frac{b^2}{a}$

On peut ainsi construire, comme approximation du quart de l'ellipse (E) dans le plan $x \geq 0, y \geq 0$, un quart d'ovale formé de trois arcs de cercle : un arc du cercle majeure de centre g , de rayon R et d'angle au centre γ (en rouge sur la Fig. 1); un arc du cercle mineur de centre e , de rayon r et d'angle au centre δ (en bleu sur la Fig. 1); un arc du cercle intermédiaire, tangent aux deux autres, de centre k , de rayon ρ et d'angle au centre β (en vert sur la Fig. 1).

3. Détermination du périmètre de l'ovale à huit centres

En utilisant les expressions des angles et des rayons présentées dans le Tableau 1, le calcul du périmètre de l'ovale à huit centres est donc égal à :

$$O(a, b) = 4 \left[\arcsin(\gamma) \frac{a^2}{b} + \arcsin(\beta) \frac{a+b}{2} + \arcsin(\delta) \frac{b^2}{a} \right] \tag{17}$$

Dans le cas de l'amphithéâtre Flavien, plus connu sous le nom de Colisée, les dimensions de ce monument fournies par Golvin [15], Trevisan [30] et Wilson [31] ainsi que celles relevées sur site sont égales à 188 m pour sa plus grande longueur et 156 m pour sa plus grande largeur. En supposant que ce monument a la forme d'une ellipse de demi grand axe $a = 94$ et de demi petit axe $b = 78$, la valeur de l'excentricité est $\varepsilon = 0,55$. En utilisant l'expression (2), on obtient pour la valeur du périmètre du Colisée $L(94, 78) = 541,524$ m. En utilisant l'expression (17) du périmètre de l'ovale à huit centres, on obtient alors $O(94, 78) = 541,523$ m. L'erreur relative entre ces deux expressions est, dans le cas du Colisée, de l'ordre de $1,85 \times 10^{-4}\%$. Des tests numériques ont été réalisés afin de calculer les expressions (2) et (17) pour différentes valeurs de a et b variant entre 1 et 10. Ces tests, qui pourraient facilement être étendus à des intervalles plus importants, ont montré que l'erreur relative entre les deux expressions (2) et (17) reste inférieure à 0,029%.

Remarque. En posant $a = b = R$, l'expression (17) permet de retrouver le périmètre du cercle de rayon R . On a :

$$O(a, b) = 4R [\arcsin(\gamma) + \arcsin(\beta) + \arcsin(\delta)] \tag{18}$$

Les trois sinus (11), (14), and (16) sont alors égaux à $\sin(\gamma) = \frac{4-\sqrt{2}}{6}$, $\sin(\beta) = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ et $\sin(\delta) = \frac{4-\sqrt{2}}{6}$. En remplaçant ces sinus dans l'expression (18) on a :

$$O(a, b) = 4R \left[2 \arcsin\left(\frac{4-\sqrt{2}}{6}\right) + \arcsin\left(\frac{4\sqrt{2}}{9}\right) \right] \tag{19}$$

En utilisant les formules d'addition des fonctions arcsinus fournies par Bronstein et Semendiaev [5, p. 281–282], on obtient alors :

$$2 \arcsin\left(\frac{4-\sqrt{2}}{6}\right) = 2 \arcsin\left(\frac{7}{9}\right) \quad \text{et} \quad \arcsin\left(\frac{7}{9}\right) + \arcsin\left(\frac{4\sqrt{2}}{9}\right) = \pi - \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi, en remplaçant dans l'expression (19), on démontre que, lorsque $a = b = R$, $O(a, b) = 2\pi R$.

4. Conclusion

On peut donc en conclure, d'une part, que l'ovale à huit centres coïncide presque parfaitement avec l'ellipse construite sur les mêmes axes et peut être considéré comme une représentation de celle-ci et, d'autre part, que le périmètre de l'ovale à huit centres fournit une excellente approximation de celui de l'ellipse construite sur les mêmes axes.

Références

- [1] G. Almkvist, B. Berndt, Gauss, Landen, Ramanujan, the arithmetic-geometric mean, ellipses, Π , and the ladies diary, *Amer. Math. Mon.* 95 (7) (1988) 585–608.
- [2] R.W. Barnard, K. Pearce, L. Schovanec, Inequalities for the perimeter of an ellipse, *J. Math. Anal. Appl.* 260 (2) (2001) 295–306.
- [3] B. Berndt, *Ramanujan's Notebooks*, vol. 3, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [4] C.B. Boyer, *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*, Dover, 1949.
- [5] I.N. Bronstein, K.A. Semendiaev, *Aide-mémoire de mathématiques*, Eyrolles, Paris, 1990.
- [6] C.E.L. Camus, *Éléments de géométrie théorique et pratique (Cours de mathématique, seconde partie)*, Durand, 1750, pp. 526–536.
- [7] T.R. Chandrupatla, T.J. Osler, The perimeter of an ellipse, *Math. Sci.* 35 (2010) 122–131.
- [8] M. Decorps-Foulquier, *Recherches sur les Coniques d'Apollonius de Perge et leurs commentateurs grecs*, Klincksieck, Paris, 2000.
- [9] A. Desgodetz, *Les édifices antiques de Rome*, 1682.
- [10] M. Docci, La forma del Colosseo: dieci anni di ricerche. Il dialogo con i gromatici romani, in: *Disegnare idee immagini*, vol. 18–19, Dipartimento del Rappresentazione e Rilievo dell'Università degli Studi "La Sapienza" di Roma, Gangemi, Rome, 1999, pp. 23–32.
- [11] L. Euler, *Animadversiones in rectificationem ellipsis (Observations sur la rectification des ellipses)*, in: *Opuscula varii argumenti* 2, 1750, pp. 121–166, *Opera Omnia* : 1(20) 21–55.
- [12] G. Fagnano, *Produzioni matematiche*, vol. 1 & 2, Nella Stamperia Gavelliana, In Pesaro, 1750.
- [13] J.L. Ginovart, J.M. Toldra Domingo, G. Fortuny Anguera, A. Costa Jover, P. de Sola-Morales Serra, The ellipse and the oval in the design of Spanish military defence in the eighteenth century, *Nexus Netw. J.* 16 (3) (2014) 587–612.
- [14] J.L. Ginovart, A. Costa-Jover, S. Coll-Pla, R.M. Jori, The legacy of the geometry of Durer: the Fort of San Jorge (c.1724), *Fort, Int. J. Fortif. Mil. Archit.* 43 (2015) 156–167.
- [15] J.-C. Golvin, *L'Amphithéâtre romain*, Boccard, Paris, 1988.
- [16] Y. Guillaumin, *Balbus présentation systématique de toutes les figures, Podismus et textes connexes*, Jovene, Naples, Italie, 1996.
- [17] B. Herrera, A. Samper, Definition and calculation of an eight-centered oval which is quasi-equivalent to the ellipse, *J. Geom. Graph.* 19 (2) (2015) 257–268.
- [18] F.R. Honey, The eight-centered oval and ellipse, *Pop. Astron.* 16 (1908) 617–619.
- [19] J. Ivory, A new series for the rectification of the ellipsis; together with some observations on the evolution of the formula $(a^2 + b^2 - 2ab \cos \phi)^p$, *Trans. R. Soc. Edinb.* 4 (1796) 177–190.
- [20] A.A. Mazzotti, *All Sides to an Oval*, Springer-Verlag International Publishing, 2017.
- [21] C. McLaurin, *A Treatise of Fluxions in Two Books*, vol. 2, T.W. and T. Ruddimans, Edinburgh, 1742.
- [22] R. Migliari, Principi teorici e prime acquisizioni nel rilievo del colosseo, in: *Disegnare idee immagini*, vol. 18–19, Dipartimento del Rappresentazione e Rilievo dell'Università degli Studi "La Sapienza" di Roma, Gangemi, Rome, 1999, pp. 33–50.
- [23] G. Peano, Sur une formule d'approximation pour la rectification de l'ellipse, *C. R. hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris* 109 (1889) 960–961.
- [24] D. Raynaud, Le tracé continu des sections coniques à la Renaissance : applications optico-perspectives, héritage de la tradition mathématique arabe, *Arabic Sci. Philos.* 17 (2007) 239–345.
- [25] P.L. Rosin, A survey and comparison of traditional piecewise circular approximations to the ellipse, *Comput. Aided Geom. Des.* 16 (4) (1999) 269–286.
- [26] P.L. Rosin, On Serlio's constructions of ovals, *Math. Intelligencer* 23 (1) (2001) 58–69.
- [27] P.L. Rosin, E. Trucco, The amphitheatre construction problem, in: *Incontro Internazionale di Studi Rileggere L'Antico*, Rome, 13–15 December, 2004.
- [28] S. Serlio, *Il primo libro d'Architettura di Sebastiano Serlio, bolognese, Le premier livre d'architecture de Sebastiano Serlio, Bolonoi, mis en langue francoyse par lehan Martin*, 1545.
- [29] T.V. Tosca, Compendio Mathematico, en que se contienen todas las materias más principales de las ciencias, que tratan de la cantidad, in: *Tomo I: Geometría Elemental, Aritmética Inferior, Geometría Práctica*, Antonio Bordazar, 1707, pp. 292–295.
- [30] C. Trevisan, Sullo schema geometrico costruttivo degli anfiteatri romani: gli esempi del Colosseo e dell'Arena di Verona, in: *Il Colosseo. Studi e ricerche in Disegnare idee immagini*, vol. 18–19, Dipartimento del Rappresentazione e Rilievo dell'Università degli Studi "La Sapienza" di Roma, Gangemi Editore, Rome, 1999, pp. 117–132.
- [31] M. Wilson Jones, Designing amphitheatres, *Mitt. Dtsch. Archäol. Inst.* 100 (1993) 391–441.