

LES NOMBRES DE TAMAGAWA LOCAUX ET LA CONJECTURE DE BLOCH ET KATO POUR LES MOTIFS $\mathbb{Q}(m)$ SUR UN CORPS ABÉLIEN

PAR DENIS BENOIS ¹ ET THONG NGUYEN QUANG DO

RÉSUMÉ. – Dans cet article nous calculons les nombres de Tamagawa locaux pour les motifs $\mathbb{Q}(m)$ sur un corps abélien. Nos résultats entraînent la compatibilité de la conjecture de Bloch et Kato (usuelle et équivariante) avec l'équation fonctionnelle. Comme le cas $m < 0$ de la conjecture usuelle est équivalent à la version cohomologique de la conjecture de Lichtenbaum, on en déduit la validité de la conjecture de Bloch et Kato pour les corps abéliens.

© 2002 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

ABSTRACT. – In this paper we compute the local Tamagawa numbers for the motives $\mathbb{Q}(m)$ over an abelian number field. Our results imply the compatibility of Bloch–Kato's conjecture (usual as well as equivariant) with the functional equation. It follows that the usual conjecture holds for all abelian fields, since the case $m < 0$ is known to be equivalent to the cohomological version of the Lichtenbaum conjecture.

© 2002 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

0. Introduction

0.1. La conjecture de Bloch et Kato sur les nombres de Tamagawa des motifs peut être considérée comme une vaste généralisation de la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer sur la valeur spéciale en $s = 1$ de la fonction L d'une courbe elliptique (qui elle-même est un analogue de la formule de Dirichlet donnant le résidu en $s = 1$ de la fonction zêta de Dedekind). En utilisant le formalisme des structures motiviques, on peut dire en gros que les conjectures de Deligne et Beilinson (voir e.g. [43]) déterminent la valeur spéciale $L^*(M, 0)$ de la fonction L d'un motif M à coefficients dans \mathbb{Q} à un rationnel non nul près et que la conjecture de Bloch et Kato $C_{BK}(M)$ détermine ce rationnel au signe près (voir [7, 17, 18]).

Énonçons cette conjecture dans le cas du motif $\mathbb{Q}(m)$ sur un corps de nombres F . On peut associer à ce motif les objet suivants :

- (i) un nombre réel $\text{Tam}_{\infty}^0(\mathbb{Z}(m))$, défini via l'application "régulateur" de Beilinson ;
- (ii) pour toute place finie v de F , un nombre rationnel $\text{Tam}_v^0(\mathbb{Z}(m))$, défini via la théorie des périodes p -adiques. Un résultat général de Bloch et Kato [7] affirme que $\text{Tam}_v^0(\mathbb{Z}(m)) = 1$ pour presque toute place v . On peut donc définir un nombre de Tamagawa global en posant

$$\text{Tam}_F^0(\mathbb{Z}(m)) = \prod_v \text{Tam}_v^0(\mathbb{Z}(m)),$$

¹ RFFI grant 97-01-00058-a.

où v parcourt toutes les places finies de F et ∞ ;

(iii) un certain groupe de Safarevič–Tate $\mathbf{III}_F(\mathbb{Z}(m))$.

Soit $\zeta_F(s)$ la fonction zêta de Dedekind de F . On note $r(m)$ l’ordre du zéro de $\zeta_F(s)$ en $s = m$ et l’on appelle *valeur spéciale* de $\zeta_F(s)$ en $s = m$ la limite

$$\zeta_F^*(m) = \lim_{s \rightarrow m} (s - m)^{-r(m)} \zeta_F(s).$$

Bien entendu, si $m > 1$ on a $\zeta_F^*(m) = \zeta_F(m)$, et la notation n’intervient que pour $m \leq 1$. La conjecture de Bloch et Kato [7] pour le motif $\mathbb{Q}(m)$ sur F relie $\zeta_F^*(m)$, l’ordre de $\mathbf{III}_F(\mathbb{Z}(m))$ et les nombres de Tamagawa. Si $m = 0, 1$ elle est équivalente à la formule de Dirichlet (voir [17], section 8.3). Pour $m \neq 0, 1$ on peut l’énoncer sous la forme suivante.

CONJECTURE $C_{BK}(\mathbb{Q}(m))$. – Soit F un corps de nombres. Alors, pour tout entier $m \neq 0, 1$ on a

$$\zeta_F^*(m) = \pm \frac{\#\mathbf{III}_F(\mathbb{Z}(m))}{w_{1-m}(F)w_m(F)} \text{Tam}_F^0(\mathbb{Z}(m))$$

où $w_m(F) = \#H^0(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(m))$.

Dans le cas $F = \mathbb{Q}$ cette conjecture a été démontrée (à une puissance de 2 près) dans l’article original de Bloch et Kato [7]. Remarquons que Bloch et Kato ne considèrent que des motifs purs du poids ≤ -1 ce qui signifie dans notre cas que $m \geq 1$. Le cas général a été introduit dans [17,18]. Dans [18] Fontaine et Perrin-Riou énoncent aussi une conjecture sur les nombres de Tamagawa locaux qui entraîne la compatibilité de la conjecture de Bloch et Kato avec l’équation fonctionnelle.

Pour $m \geq 2$, il est facile de voir ([18], II.5.3) que $C_{BK}(\mathbb{Q}(1 - m))$ est équivalente (à une puissance de 2 près) à la version cohomologique de la conjecture de Lichtenbaum

$$\zeta_F^*(1 - m) \stackrel{2}{=} \pm \frac{\#K_{2m-2}^{\text{coh}}(O_F)}{w_m(F)} R_m(F),$$

où $K_{2m-2}^{\text{coh}}(O_F)$ est la partie “cohomologique” de $K_{2m-2}(O_F)$, $R_m(F)$ est le régulateur de Beilinson et $\stackrel{2}{=}$ signifie l’égalité à une puissance de 2 près. Pour les corps abéliens cette formule a été démontrée dans [28], mais avec des facteurs eulériens erronés qui ont été rectifiés dans [27] (voir aussi l’appendice).

On se propose dans cet article de calculer les nombres de Tamagawa locaux (usuels et équivariants) pour les motifs $\mathbb{Q}(m)$ sur les corps locaux abéliens en utilisant la suite exacte de Perrin-Riou [35] et la structure galoisienne additive de l’anneau des entiers de ces corps. On en déduit la compatibilité à l’équation fonctionnelle (et donc la validité) de la conjecture de Bloch–Kato pour les corps de nombres abéliens.

0.2. Donnons le plan de l’article. Le §1 rappelle la définition des nombres de Tamagawa des représentations l -adiques. Il contient aussi un certain nombre des calculs “bien connus” pour lesquels il est difficile de trouver des références commodes. Le résultat principal est démontré dans le §2 où l’on calcule les nombres de Tamagawa $\text{Tam}_v^0(\mathbb{Z}(m))$ pour un corps abélien, généralisant ainsi le théorème 4.2 de [7] (voir aussi [36]). Dans le reste de l’article, pour la commodité du lecteur, on montre comment en déduire la conjecture $C_{BK}(\mathbb{Q}(m))$ pour les corps abéliens. Le §3 rappelle le formalisme motivique utilisé dans l’énoncé de la conjecture de Bloch et Kato. Dans le §4 on calcule l’ordre du groupe de Safarevič $\mathbf{III}_F(\mathbb{Z}(m))$ en termes

de $K_{2m-2}^{\text{coh}}(O_F)$ en reliant la conjecture $C_{BK}(\mathbb{Q}(m))$ pour un entier m négatif à la conjecture de Lichtenbaum et dans le §4 on montre la compatibilité de $C_{BK}(\mathbb{Q}(m))$ avec l'équation fonctionnelle suivant [18]. Ces calculs sont bien connus pour des spécialistes et se trouvent implicitement dans [17,18].

Par rapport à une première version de ce texte, il y a deux changements importants :

(i) Suivant une suggestion du rapporteur, dans la démonstration du théorème 2.1 nous utilisons, au lieu de la loi de réciprocité explicite, une généralisation de la suite exacte de Coleman établie par Perrin-Riou [35]. Ceci permet de calculer du même coup les nombres de Tamagawa équivariants (voir proposition 2.4.4), ce qui semble utile pour la version équivariante de la conjecture $C_{BK}(\mathbb{Q}(m))$ (voir [8,9]).

(ii) Nous profitons de cette opportunité pour corriger quelques erreurs dans l'article [28]. En particulier, la version cohomologique de la conjecture de Lichtenbaum, démontrée dans [28], théorème 6.4, comportait un facteur eulérien erroné $\mathcal{E}_m(F)$. L'erreur consistait à confondre le groupe des "unités cyclotomiques tordues" avec le sous-module galoisien engendré par l'élément de Deligne-Soulé (voir [28], p. 715). Le facteur $\mathcal{E}_m(F)$ est compensé par l'indice relatif de ces deux réseaux, dont le calcul a été fait dans [27]. Dans l'appendice on refait ce calcul d'indice par une méthode différente et l'on corrige d'autres points de [28] qui sont inexacts.²

0.3. Après avoir soumis à publication une première version de cet article, nous avons pris connaissance des prépublications [22] et [9].

Huber et Kings montrent la conjecture de Bloch et Kato pour tous les motifs de Dirichlet, ce qui donne en particulier la conjecture $C_{BK}(\mathbb{Q}(m))$ sur un corps abélien. Leur démonstration pour les entiers négatifs est complètement différente de celle de [28] et utilise essentiellement les systèmes d'Euler. Pour montrer la compatibilité avec l'équation fonctionnelle ils calculent les nombres de Tamagawa locaux des motifs de Dirichlet suivant la méthode de [7]. Ce calcul résulte de la proposition 2.4.4 ci-dessous (voir aussi la remarque 2.4.5).

Dans [9] Burns et Greither montrent la version équivariante de $C_{BK}(\mathbb{Q}(m))$ dans le cas $m \leq 0$. Leur résultat entraîne aussi la conjecture de Lichtenbaum cohomologique pour les corps abéliens grâce à la fonctorialité par rapport aux sous-extensions. Notons que la proposition 2.4.4 doit donner la compatibilité de la conjecture équivariante avec l'équation fonctionnelle.³

0.4. *Notations.* Dans tout cet article F est une extension finie de \mathbb{Q} . On note O_F l'anneau des entiers de F . On fixe une clôture algébrique \overline{F} de F . Pour toute place v de F (finie ou infinie), on note F_v le complété de F par rapport à v . On pose $\mathcal{G}_F = \text{Gal}(\overline{F}/F)$ et $\mathcal{G}_{F_v} = \text{Gal}(\overline{F}_v/F_v)$. On note r_1 (resp. $2r_2$) le nombre des places réelles (resp. imaginaires) de F .

Si M est un \mathbb{Z}_p -module topologique, muni d'une action continue d'un groupe G , on désigne par $H^i(G, M)$ les groupes de cohomologie continue à coefficients dans M (voir [44]).

Si P est un module projectif de rang n sur un anneau commutatif A , on pose $\det_A P = \bigwedge^n P$. On dit qu'un A -module M est *parfait* s'il admet une résolution finie par des A -modules projectifs de type fini :

$$0 \rightarrow P_m \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Dans ce cas on définit le déterminant de M par la formule :

$$\det_A M = \bigotimes_{0 \leq i \leq m} (\det_A P_i)^{(-1)^i}$$

² Dans la dernière version de leur prépublication [22] (Mars 2002), Huber et Kings continuent à émettre des réserves sur les corrections apportées à [28]. Nous ne comprenons pas ces réserves, et nous invitons le lecteur à juger sur pièces.

³ D. Burns nous a indiqué qu'on a besoin d'un résultat un peu plus général. Voir [5].

(voir [25], section 2.1).

Si deux sous-groupes H_1 et H_2 d'un groupe G sont commensurables (i.e. si $H_1 \cap H_2$ est d'indice fini dans H_1 et H_2) on note $(H_1 : H_2)$ l'indice généralisé

$$\frac{(H_1 : H_1 \cap H_2)}{(H_2 : H_1 \cap H_2)}.$$

1. Rappels sur les nombres de Tamagawa des représentations l -adiques

Soit p un nombre premier. On fixe une extension finie K de \mathbb{Q}_p . Soit O_K l'anneau des entiers de K . On note U_K le groupe des unités de O_K et U_K^1 le groupe des unités principales. Soient K_0 le sous-corps non-ramifié maximal de K et σ le Frobenius absolu, opérant sur K_0 . On note k le corps résiduel de K et l'on pose $q = \text{Card}(k)$.

1.1. Nombres de Tamagawa des représentations l -adiques ($l \neq p$)

(Voir [18].) Soit $l \neq p$ un nombre premier et soit V une représentation l -adique de \mathcal{G}_K . Soit I_K le sous-groupe d'inertie de \mathcal{G}_K . On pose

$$D(V) = V^{I_K}$$

et

$$H_f^1(K, V) = \ker(H^1(K, V) \rightarrow H^1(I_K, V)).$$

Donc $H_f^1(K, V)$ est isomorphe à $H^1(k, V^{I_K})$ et l'on a une suite exacte

$$0 \rightarrow H^0(K, V) \rightarrow D(V) \xrightarrow{1-\varphi} D(V) \rightarrow H_f^1(K, V) \rightarrow 0,$$

ce qui nous fournit un isomorphisme canonique

$$i_V : L_f(V) = \det_{\mathbb{Q}_l} H^0(K, V) \otimes (\det_{\mathbb{Q}_l} H_f^1(K, V))^{-1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_l.$$

Si T est un \mathbb{Z}_l -réseau stable sous l'action de \mathcal{G}_K , on note $\text{Tam}_K^0(T)$ l'unique puissance de l telle que

$$i_V(L_f(T)) = \mathbb{Z}_l \text{Tam}_K^0(T).$$

1.2. Nombres de Tamagawa des représentations p -adiques ($l = p$)

(Voir [7], §2, [17,18].) Soit $B_{\text{dR},p}$ le corps des périodes p -adiques construit par Fontaine et soit $B_{\text{cris},p}$ l'anneau des périodes cristallines [15,16]. Alors $B_{\text{dR},p}$ est muni d'une filtration exhaustive et séparée décroissante $B_{\text{dR},p}^i$ et d'une action continue de \mathcal{G}_K . L'anneau $B_{\text{cris},p}$ est une K_0 -algèbre munie d'une action σ -semi-linéaire du Frobenius φ et d'une action continue de \mathcal{G}_K . On a une injection naturelle

$$B_{\text{cris},p} \otimes_{K_0} K \rightarrow B_{\text{dR},p}.$$

Les anneaux $B_{\text{dR},p}$ et $B_{\text{cris},p}$ sont reliés par la suite exacte fondamentale

$$0 \rightarrow \mathbb{Q}_p \rightarrow B_{\text{cris},p} \xrightarrow{f} B_{\text{cris},p} \oplus (B_{\text{dR},p}/B_{\text{dR},p}^0) \rightarrow 0,$$

où $f(x) = ((1 - \varphi)x, x \pmod{B_{\text{dR},p}^0})$ (voir [7] §2, [16]).

Soit V une représentation p -adique de \mathcal{G}_K et soit

$$D_{\text{cris}}(V) = (B_{\text{cris},p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_K}$$

et

$$D_{\text{dR}}(V) = (B_{\text{dR},p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_K}$$

le module cristallin et le module filtré associés à V par la théorie de Fontaine. Alors $D_{\text{cris}}(V)$ est un K_0 -espace vectoriel de dimension finie muni d'une action semi-linéaire du Frobenius φ et $D_{\text{dR}}(V)$ est un K -espace vectoriel de dimension finie muni de la filtration

$$D_{\text{dR}}^i(V) = (B_{\text{dR},p}^i \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_K}.$$

On appelle *espace tangent* de V le quotient $t_V(K) = D_{\text{dR}}(V)/D_{\text{dR}}^0(V)$. Soit

$$H_f^1(K, V) = \ker(H^1(K, V) \rightarrow H^1(K, B_{\text{cris},p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)).$$

Alors le produit tensoriel de la suite exacte fondamentale par V donne par cohomologie une suite exacte

$$(1) \quad 0 \rightarrow H^0(K, V) \rightarrow D_{\text{cris}}(V) \xrightarrow{f} D_{\text{cris}}(V) \oplus t_V(K) \xrightarrow{\delta_V} H_f^1(K, V) \rightarrow 0.$$

L'application δ_V induit un homomorphisme

$$\exp_{K,V} : t_V(K) \rightarrow H_f^1(K, V)$$

qu'on appelle *application exponentielle* de Bloch et Kato. On pose

$$L_f(V) = \det_{\mathbb{Q}_p} H^0(K, V) \otimes (\det_{\mathbb{Q}_p} H_f^1(K, V))^{-1}.$$

Alors la suite exacte (1) nous fournit un isomorphisme canonique

$$i_V : L_f(V) \xrightarrow{\sim} (\det_{\mathbb{Q}_p} t_V(K))^{-1}.$$

Soit T un \mathbb{Z}_p -réseau de V stable sous l'action de \mathcal{G}_K et soit ω une base de $\det_{\mathbb{Q}_p} t_V(K)$. On note $H_f^1(K, T)$ l'image inverse de $H_f^1(K, V)$ dans $H^1(K, T)$ et l'on pose

$$L_f(T) = \det_{\mathbb{Z}_p} H^0(K, T) \otimes (\det_{\mathbb{Z}_p} H_f^1(K, T))^{-1}.$$

On appelle *nombre de Tamagawa* et on note $\text{Tam}_{K,\omega}^0(T)$ l'unique puissance de p telle que

$$i_V(L_f(T)) = \mathbb{Z}_p \cdot \text{Tam}_{\omega}^0(T)\omega^{-1},$$

où ω^{-1} est la base duale de ω .

1.3. Le cas $V = \mathbb{Q}_p(m)$

On considère maintenant le cas $V = \mathbb{Q}_p(m)$. Le module $D_{\text{cris}}(\mathbb{Q}_p(m))$ est un K_0 -espace vectoriel de dimension 1. Soit $\varepsilon = (\zeta_{p^n})_{n \geq 0}$ un système de racines primitives de l'unité tel que

$\zeta_p^n = \zeta_{p^{n-1}}$, soit $[\varepsilon] \in B_{\text{dR},p}$ son représentant de Teichmüller et soit $t = \log[\varepsilon]$ (voir [15]). Alors l'élément

$$e_m = t^{-m} \otimes \varepsilon^{\otimes m} \in D_{\text{dR}}(\mathbb{Q}_p(m))$$

ne dépend pas du choix de ε et donne une base canonique de $D_{\text{cris}}(\mathbb{Q}_p(m))$. Le Frobenius φ opère sur e_m par $\varphi(e_m) = p^{-m}e_m$. Le module $D_{\text{dR}}(\mathbb{Q}_p(m))$ est un K -espace vectoriel de dimension 1, engendré par e_m et muni de la filtration

$$D_{\text{dR}}^i(\mathbb{Q}_p(m)) = \begin{cases} D_{\text{dR}}(\mathbb{Q}_p(m)) \simeq K & \text{si } i \leq -m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On écrit la suite exacte (1) pour $\mathbb{Q}_p(m)$:

$$0 \rightarrow H^0(K, \mathbb{Q}_p(m)) \rightarrow D_{\text{cris}}(\mathbb{Q}_p(m)) \xrightarrow{f} D_{\text{cris}}(\mathbb{Q}_p(m)) \oplus t_{\mathbb{Q}_p(m)}(K) \xrightarrow{\delta_m} H_f^1(K, \mathbb{Q}_p(m)) \rightarrow 0.$$

Si $m \neq 0$, alors l'application

$$1 - \varphi : D_{\text{cris}}(\mathbb{Q}_p(m)) \rightarrow D_{\text{cris}}(\mathbb{Q}_p(m))$$

est une bijection et l'application exponentielle donne un isomorphisme

$$(2) \quad \exp_{K,m} : t_{\mathbb{Q}_p(m)}(K) \xrightarrow{\sim} H_f^1(K, \mathbb{Q}_p(m)).$$

On a une famille de suites exactes courtes

$$0 \rightarrow \mu_{p^n} \rightarrow \overline{K}^* \xrightarrow{p^n} \overline{K}^* \rightarrow 0.$$

En prenant les applications ‘‘cobord’’ et en passant à la limite projective on obtient une application $\rho : K^* \rightarrow H^1(K, \mathbb{Z}_p(1))$. La série exponentielle $E(x) = \sum_{n=0}^\infty x^n/n!$ donne un isomorphisme local entre O_K et U_K qui induit un isomorphisme $K \simeq U_K \otimes \mathbb{Q}_p$. En composant cet isomorphisme avec ρ on obtient une application

$$(3) \quad K \xrightarrow{\sim} U_K \otimes \mathbb{Q}_p \rightarrow H^1(K, \mathbb{Q}_p(1)).$$

On sait qu'elle coïncide avec $\exp_{K,1}$ (voir [7], section 3.10). En particulier, le groupe $H_f^1(K, \mathbb{Q}_p(1))$ coïncide avec l'image de l'application $\rho \otimes \mathbb{Q}_p : U_K \otimes \mathbb{Q}_p \rightarrow H^1(K, \mathbb{Q}_p(1))$.

Le lemme suivant est bien connu (voir par exemple [7], §3).

LEMME 1.3.1. – (i) Soit $m \neq 1$. Alors

$$H_f^1(K, \mathbb{Q}_p(m)) = \begin{cases} H^1(K, \mathbb{Q}_p(m)) & \text{si } m \geq 2, \\ H^1(k, \mathbb{Q}_p) & \text{si } m = 0, \\ 0 & \text{si } m \leq -1. \end{cases}$$

(ii) Soit $l \neq p$. Alors

$$H_f^1(K, \mathbb{Q}_l(m)) = \begin{cases} H^1(k, \mathbb{Q}_l) & \text{si } m = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. – (i) Si $m \neq 0$ l'application exponentielle est un isomorphisme entre $t_{\mathbb{Q}_p(m)}(K)$ et $H^1(K, \mathbb{Q}_p(m))$. En particulier, on a $H_f^1(K, \mathbb{Q}_p(m)) = 0$ pour $m < 0$ et $\dim_{\mathbb{Q}_p} H_f^1(K, \mathbb{Q}_p(m)) = [K : \mathbb{Q}_p]$ pour $m \geq 1$.

Soit $m \geq 2$. La caractéristique d'Euler–Poincaré

$$\chi_K(\mathbb{Q}_p(m)) = \sum_{i=0}^2 \dim_{\mathbb{Q}_p} H^i(K, \mathbb{Q}_p(m))$$

est égale à $-[K : \mathbb{Q}_p]$. Comme $H^2(K, \mathbb{Q}_p(m))$ est dual de $H^0(K, \mathbb{Q}_p(1-m))$, on obtient

$$\dim_{\mathbb{Q}_p} H^1(K, \mathbb{Q}_p(m)) = [K : \mathbb{Q}_p]$$

et donc $H_f^1(K, \mathbb{Q}_p(m))$ et $H^1(K, \mathbb{Q}_p(m))$ coïncident.

Si $m = 0$, on a $t_{\mathbb{Q}_p(0)}(K) = 0$, $D_{\text{cris}}(\mathbb{Q}_p(0)) = K_0$ et l'application $\delta_0 : K_0 \rightarrow H_f^1(K, \mathbb{Q}_p)$ envoie $\alpha \in K_0$ sur le caractère $\psi_\alpha(g) = c^g - c$, où $(1 - \varphi)c = \alpha$. On en déduit que $H_f^1(K, \mathbb{Q}_p) = H^1(k, \mathbb{Q}_p)$.

La partie (ii) du lemme est claire. \square

Soit $w_m^{(p)}(K) = \#H^0(K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(m))$. On note $\text{Tam}_K^0(\mathbb{Z}_p(m))$ le nombre de Tamagawa calculé par rapport à un élément de $\det_{\mathbb{Q}_p} D_{\text{dR}}(\mathbb{Q}_p(m))$ qui engendre le réseau $\det_{\mathbb{Z}_p} O_K e_m$ et l'on pose

$$\text{Tam}_K^0(\mathbb{Z}(m)) = \prod_{l \text{ premier}} \text{Tam}_K^0(\mathbb{Z}_l(m)).$$

LEMME 1.3.2. – On a

$$\text{Tam}_K^0(\mathbb{Z}(m)) = \begin{cases} q^m (H^1(K, \mathbb{Z}_p(m)) : \exp_{K,m}(O_K)) & \text{si } m \geq 2, \\ 1 & \text{si } m = 0, 1, \\ w_m^{(p)}(K) & \text{si } m \leq -1. \end{cases}$$

Démonstration. – Soit $l \neq p$, alors la représentation $\mathbb{Q}_l(m)$ est non-ramifiée, d'où $\text{Tam}_K^0(\mathbb{Z}_l(m)) = 1$ (voir [18], chapitre I, proposition 4.2.2). (Notons qu'on peut montrer facilement cette formule en calculant l'ordre de $H^1(K, \mathbb{Z}_l(m))$.)

Si $m \leq -1$, alors $H_f^1(K, \mathbb{Q}_p(m)) = 0$ et $H_f^1(K, \mathbb{Z}_p(m)) = H^1(K, \mathbb{Z}_p(m))_{\text{tor}}$. La suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p(m) \rightarrow \mathbb{Q}_p(m) \rightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(m) \rightarrow 0$$

donne un isomorphisme

$$H^1(K, \mathbb{Z}_p(m))_{\text{tor}} \simeq H^0(K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(m)),$$

d'où $\text{Tam}_K^0(\mathbb{Z}(m)) = w_m^{(p)}(K)$.

Si $m = 0$, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow H^0(K, \mathbb{Z}_p) \rightarrow O_{K_0} \xrightarrow{1-\varphi} O_{K_0} \rightarrow H_f^1(K, \mathbb{Z}_p) \rightarrow 0,$$

donc $\text{Tam}_K^0(\mathbb{Z}_p(0)) = 1$.

Si $m \geq 1$, le groupe $H^0(K, \mathbb{Z}_p(m))$ est nul, l'application $1 - \varphi$ envoie e_m sur $(1 - p^{-m})e_m$, d'où l'on obtient

$$\text{Tam}_K^0(\mathbb{Z}_p(m)) = q^m (H_f^1(K, \mathbb{Z}_p(m)) : \exp_{K,m}(O_K)).$$

Enfin, pour calculer le nombre de Tamagawa dans le cas $m = 1$, on utilise l'isomorphisme (3). On a

$$q(H_f^1(K, \mathbb{Z}_p(1)) : \exp_{K,1}(O_K)) = q^{1-e(K/\mathbb{Q}_p)} (U_K^1 : E(pO_K)) = 1. \quad \square$$

Dans le §2 nous allons poursuivre plus avant le calcul des nombres de Tamagawa pour $m \geq 2$ dans le cas abélien.

2. Calcul des nombres de Tamagawa non-archimédiens

Dans tout ce paragraphe, p est un nombre premier impair fixé. Soit K une extension finie de \mathbb{Q}_p de degré N . On note O_K l'anneau des entiers de K , k son corps résiduel, et l'on pose $q = \text{Card}(k)$. Soit d_K le discriminant de K/\mathbb{Q}_p et soit $|\cdot|_p$ la valeur absolue sur K normalisée par $|p|_p = 1$. Pour simplifier les notations, on pose

$$w_{1-m}^{(p)}(K) = \#H^0(K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-m)).$$

THÉORÈME 2.1. – *Si K est abélien sur \mathbb{Q}_p , alors pour tout $m \geq 2$, on a*

$$\text{Tam}_K^0(\mathbb{Z}(m)) = w_{1-m}^{(p)}(K) |(m-1)!|_p^N |d_K|_p^{m-1}.$$

La démonstration du théorème est donnée dans la section 2.3. On fixe une extension non-ramifiée L_0/\mathbb{Q}_p telle que K soit contenu dans $L_\infty = L_0(\zeta_{p^\infty})$ et l'on pose $L = L_0K$. Alors la suite exacte de Perrin-Riou ramène le calcul de $\text{Tam}_K^0(\mathbb{Z}(m))$ au calcul de l'indice $(\mathcal{L}_{L,m} : O_L)$ d'un certain \mathbb{Z}_p -réseau $\mathcal{L}_{K,m}$ de L . On calcule cet indice dans la proposition 2.2.4 en utilisant la structure galoisienne additive de O_L (voir [30,31]). Les sections 2.2.1–2.2.3 rassemblent des résultats préliminaires dont nous aurons à faire usage.

Remarques. – (i) Pour les corps cyclotomiques le théorème 2.1 a été énoncé dans [36] (voir aussi [35], no. 3.4).

(ii) Notre démonstration originelle suivait la méthode de [7] pour déduire le théorème 2.1 de la loi de réciprocité explicite [25,35] (elle est reprise par exemple dans l'appendice de [22]). La démonstration simplifiée que nous donnons ici utilise la suite exacte de Perrin-Riou au lieu de la loi de réciprocité, suivant une suggestion du rapporteur.

2.2. Préliminaires

2.2.1. Soit L_0 une extension finie non-ramifiée de \mathbb{Q}_p . On fixe un système $\varepsilon = (\zeta_{p^n})_{n \geq 1}$ des racines primitives p^n -ièmes de l'unité vérifiant $\zeta_{p^n}^p = \zeta_{p^{n-1}}$. Soient $L_n = L_0(\zeta_{p^n})$ et $L_\infty = \bigcup_n L_n$. On pose $G_n = \text{Gal}(L_n/L_0)$ et $G_\infty = \text{Gal}(L_\infty/L_0)$ et l'on note $\chi : G_\infty \rightarrow \mathbb{Z}_p^*$ le caractère cyclotomique. Soit σ l'automorphisme de Frobenius de L_0/\mathbb{Q}_p . On munit l'anneau des séries formelles $O_{L_0}[[X]]$ d'une action du Frobenius φ et d'une action continue du groupe G_∞ en posant

$$\begin{aligned} \varphi\left(\sum a_i X^i\right) &= \sum a_i^\sigma \varphi(X)^i, \quad \varphi(X) = (1+X)^p - 1, \\ \gamma(X) &= (1+X)^{\chi(\gamma)} - 1, \quad \gamma \in G_\infty. \end{aligned}$$

Soit

$$R_{L_0} = \left\{ f \in O_{L_0}[[X]] \mid \sum_{\zeta^p=1} f(\zeta(1+X) - 1) = 0 \right\}.$$

On sait que R est un $O_{L_0}[[G_\infty]]$ -module libre engendré par l'élément $1 + X$ (voir par exemple [35]). Soit $D = (1 + X) d/dX$ et soit $\Delta_m : R \rightarrow \mathbb{Z}_p$ l'homomorphisme défini par

$$\Delta_m(f(X)) = \text{Tr}_{L_0/\mathbb{Q}_p} D^m f(0).$$

Pour tout $n \geq 1$ on définit une application $\Xi_{m,n} : R_{L_0} \rightarrow L_n$ en posant

$$\Xi_{m,n}(f) = p^{n(m-1)} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f\sigma^{k-n}(\zeta_{p^{n-k}} - 1)}{p^{mk}} - \frac{(1 - p^m\sigma^{-1})^{-1} f\sigma^{-1}(0)}{p^{m(n-1)}} \right).$$

Cette définition est justifiée par le lemme suivant.

LEMME 2.2.2. – Soit \mathcal{H} le sous-espace de $\mathbb{Q}_p[[X]]$ formé des éléments qui convergent sur la boule unité. Alors l'équation $(1 - \phi/p^m)F = f$ a une solution dans \mathcal{H} si et seulement si $\Delta_m(f) = 0$. Dans ce cas on a

$$\Xi_{m,n}(f) = p^{n(m-1)} F\sigma^{-n}(\zeta_{p^n} - 1).$$

Démonstration. – La première assertion du lemme est démontrée dans la proposition 2.2.1 de [35]. Ensuite, si $(1 - \phi/p^m)F = f$ on a

$$F(\zeta_{p^{n-k}} - 1) - \frac{1}{p^m} F\sigma(\zeta_{p^{n-k-1}} - 1) = f(\zeta_{p^{n-k}} - 1),$$

d'où

$$F(\zeta_{p^n} - 1) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f\sigma^k(\zeta_{p^{n-k}} - 1)}{p^{mk}} + \frac{F\sigma^n(0)}{p^{mn}}.$$

Il est facile de voir que $F(0) = -p^m(1 - p^m\sigma^{-1})^{-1} f\sigma^{-1}(0)$, d'où le lemme. \square

2.2.3. Soit K une extension finie abélienne de \mathbb{Q}_p . On note K_0 le sous corps maximal non-ramifié de K . Par la théorie du corps de classes, K est contenu dans l'extension cyclotomique maximale de \mathbb{Q}_p . Donc il existe une extension non-ramifiée finie L_0/K_0 telle que K soit contenu dans L_∞ . Soit n le plus petit entier tel que $K \subset L_n$. On pose $L = L_0K$ et $G = \text{Gal}(L/L_0)$. L'extension L_n/L est modérément ramifiée et l'on note r son degré. L'extension L/K est non-ramifiée et $\text{Gal}(L/K)$ est isomorphe à $\text{Gal}(L_0/K_0)$. On pose

$$\mathcal{L}_{K,m} = \text{Tr}_{L_n/K}(\Xi_{m,n}(R_{L_0})),$$

$$\mathcal{L}_{L,m} = \text{Tr}_{L_n/L}(\Xi_{m,n}(R_{L_0})),$$

$$\mathcal{L}'_{L,m} = \text{Tr}_{L_n/L}(\Xi_{m,n}(R_{K_0})).$$

On note que $\mathcal{L}_{L,m} = \mathcal{L}'_{L,m} \otimes_{O_{K_0}} O_{L_0}$. Comme l'extension L_0/K_0 est non-ramifiée, l'anneau O_{L_0} est un $O_{K_0}[\text{Gal}(L_0/K_0)]$ -module libre de rang 1. Alors, pour tout $O_{K_0}[\text{Gal}(L/K)]$ -module M , on a des isomorphismes

$$\text{Tr}_{L/K}(M \otimes_{O_{K_0}} O_{L_0}) \simeq (M \otimes_{O_{K_0}} O_{L_0})^{\text{Gal}(L/K)} \simeq M.$$

Comme $\mathcal{L}_{L,m} = \mathcal{L}'_{L,m} \otimes_{O_{K_0}} O_{L_0}$, il en résulte que $\mathcal{L}_{K,m} = \mathcal{L}_{L,m}^{\text{Gal}(L/K)}$ et que

$$(\mathcal{L}_{L,m} : O_L) = (\mathcal{L}_{K,m} : O_K)^{[L:K]}.$$

PROPOSITION 2.2.4. – On a

$$(\mathcal{L}_{K,m} : O_K) = q^{-m} |d_K|_p^{m-1}.$$

Démonstration. – Soit

$$x_n = \zeta_{p^n} + \zeta_{p^{n-1}} + \dots + \zeta_p$$

et soit $x_L = \text{Tr}_{L_n/L}(x_n)$. On note \mathcal{A}_G l'ordre maximal de $\mathbb{Q}_p[G]$ et on pose

$$\mathcal{A}_{G,L_0} = O_{L_0} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{A}_G.$$

Alors O_L est un \mathcal{A}_{G,L_0} -module libre engendré par x_L (voir [30,31]). D'autre part, comme R_{L_0} est engendré par $1 + X$, le réseau $\mathcal{L}_{L,m}$ est engendré sur $O_{L_0}[G]$ par l'élément

$$y_{L,m} = \text{Tr}_{L_n/L}(y_{n,m})$$

où

$$y_{n,m} = p^{n(m-1)} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\zeta_{p^{n-k}}}{p^{mk}} - \frac{(1-p^m)^{-1}}{p^{m(n-1)}} \right).$$

Donc

$$(O_L : \mathcal{L}_{L,m}) = (\mathcal{A}_G : \mathbb{Z}_p[G])^{[L_0:\mathbb{Q}_p]} (\mathbb{Z}_p[G]x_L : \mathbb{Z}_p[G]y_{L,m})^{[L_0:\mathbb{Q}_p]}.$$

L'indice $(\mathcal{A}_G : \mathbb{Z}_p[G])$ est calculé dans [30], p. 134 pour un groupe abélien quelconque. Si $\#G = p^a b$, avec $(p, b) = 1$ et si $Q(k)$ est le nombre de solutions de l'équation $X^k = 1$ dans G , alors

$$(\mathcal{A}_G : \mathbb{Z}_p[G]) = p^{\frac{p^a-1}{p-1}b+d(G)}$$

où

$$d(G) = \frac{1}{2} \sum_{\mu \leq a} \left(Q\left(\frac{\#G}{p^\mu}\right) - \frac{\#G}{p^\mu} \right).$$

Comme dans notre cas le groupe G est cyclique, on a

$$(\mathcal{A}_G : \mathbb{Z}_p[G]) = p^{\frac{(p^{n-1}-1)}{r}}.$$

Calculons maintenant l'indice $(\mathbb{Z}_p[G]x_L : \mathbb{Z}_p[G]y_{L,m})$. Pour un caractère

$$\psi \in X(G_n) = \text{Hom}(G_n, \overline{\mathbb{Q}}_p)$$

on considère l'idempotent habituel

$$e_\psi = \frac{1}{\#G_n} \sum_{g \in G_n} \psi(g)^{-1} g \in \overline{\mathbb{Q}}_p[G].$$

Alors le lemme 1 de [19] donne

$$(\mathbb{Z}_p[G]x_L : \mathbb{Z}_p[G]y_{L,m}) = \left| \frac{\prod e_\psi(y_{n,m})}{\prod e_\psi(x_n)} \right|_p,$$

où ψ parcourt tous les caractères de G_n qui se factorisent par G . Pour tout caractère $\psi \in X(G_n)$ de conducteur p^k on a

$$e_\psi(x_n) = \begin{cases} e_\psi(\zeta_{p^k}) & \text{si } k \neq 0, \\ (1-p)^{-1} & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

et

$$e_\psi(y_{n,m}) = \begin{cases} p^{mk-n} e_\psi(\zeta_{p^k}) & \text{si } k \neq 0, \\ p^{m-n+1} \frac{1-p^{m-1}}{(1-p)(1-p^m)} & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

Donc

$$(\mathbb{Z}_p[G]x_L : \mathbb{Z}_p[G]y_{L,m}) = p^{-\alpha}$$

où

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{p-1}{r} \left(\sum_{k=2}^n (mk-n)(p^{k-1} - p^{k-2}) + (m-n+1) \right) \\ &= \frac{(m-1)np^{n-1}(p-1)}{r} - \frac{m(p^{n-1}-1)}{r} + 1. \end{aligned}$$

Donc $(\mathcal{L}_{L,m} : O_L) = p^{[L_0:\mathbb{Q}_p]\beta}$, où

$$\beta = \frac{(m-1)np^{n-1}(p-1)}{r} - \frac{(m-1)(p^{n-1}-1)}{r} + 1.$$

On a $d_{L_n} = d_{L_n/L} d_L^r$. Comme

$$d_{L_n} = p^{n[L_n:\mathbb{Q}_p] - [L_0:\mathbb{Q}_p]p^{n-1}}$$

(cf. par exemple [47], Proposition 2.1) et comme $d_{L_n} = d_{L_n/L} d_L^r$ on obtient

$$(\mathcal{L}_{L,m} : O_L) = q^{-m[L:K]} |d_L|_p^{m-1}.$$

Comme $d_L = d_K^{[L_0:K_0]}$, et comme $(\mathcal{L}_{L,m} : O_L) = (\mathcal{L}_{K,m} : O_K)^{[L:K]}$ on en déduit la proposition. \square

2.3. Démonstration du théorème 2.1

2.3.1. On reprend les notations de la section 2.2.5. Soit $\mathbf{Z}(\mathbb{Z}_p(m)) = \varprojlim_n H^1(L_n, \mathbb{Z}_p(m))$ et soit $\tilde{\mathbf{Z}}(\mathbb{Z}_p(1)) = \varprojlim_n H_f^1(L_n, \mathbb{Z}_p(m))$. Alors

$$\tilde{\mathbf{Z}}(\mathbb{Z}_p(1)) \simeq \varprojlim_n U_{L_n}^1, \quad \mathbf{Z}(\mathbb{Z}_p(1)) \simeq \varprojlim_n L_n^*/(L_n^*)^{p^n},$$

et l'on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \tilde{\mathbf{Z}}(\mathbb{Z}_p(1)) \rightarrow \mathbf{Z}(\mathbb{Z}_p(1)) \xrightarrow{v} \mathbb{Z}_p \rightarrow 0,$$

où l'application v est induite par valuation. En prenant le produit tensoriel de cette suite par $\mathbb{Z}_p(m-1)$ et en posant $\tilde{\mathbf{Z}}(\mathbb{Z}_p(m)) = \tilde{\mathbf{Z}}(\mathbb{Z}_p(1))(m-1)$ on obtient la suite exacte

$$(4) \quad 0 \rightarrow \tilde{\mathbf{Z}}(\mathbb{Z}_p(m)) \rightarrow \mathbf{Z}(\mathbb{Z}_p(m)) \xrightarrow{v} \mathbb{Z}_p(m-1) \rightarrow 0.$$

Soit $H_L = \text{Gal}(L_\infty/L)$. Si $m \neq 1$ alors, $(\mathbb{Z}_p(m-1))_{H_L} \simeq H^0(L, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(m-1))$, et l'on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \tilde{\mathbf{Z}}(\mathbb{Z}_p(m))_{H_L} \rightarrow \mathbf{Z}(\mathbb{Z}_p(m))_{H_L} \xrightarrow{v} H^0(L, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(m-1)) \rightarrow 0$$

(voir [35,28]). D'autre part, si $m \neq 1$ on a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{Z}(\mathbb{Z}_p(m))_{H_L} \simeq H^1(L, \mathbb{Z}_p(m))$$

(voir [35], proposition 3.2.1).

2.3.2. Perrin-Riou ([35], proposition 4.1.3) construit une suite exacte (qui généralise celle de Coleman [11]) :

$$(5) \quad 0 \rightarrow \mathbb{Z}_p(m) \rightarrow \tilde{\mathbf{Z}}(\mathbb{Z}_p(m)) \rightarrow R \xrightarrow{\Delta_m \otimes \varepsilon^n} \mathbb{Z}_p(m) \rightarrow 0,$$

telle que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (\tilde{\mathbf{Z}}(\mathbb{Z}_p(m))/\mathbb{Z}_p(m))_{H_L} & \longrightarrow & R_{H_L} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p(m)_{H_L} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \text{Tr}_{L_n/L} \Xi_{m,n} & & \\ & & H^1(L, \mathbb{Q}_p(m)) & \xleftarrow{(m-1)! \exp_{L,m}} & L & & \end{array}$$

Les flèches verticales de ce diagramme sont injectives. Par le lemme 1.3.2 il suffit de montrer que

$$(\exp_{K,m}(O_K) : H^1(K, \mathbb{Z}_p(m))) w_{1-m}^{(p)}(K) = q^m |(m-1)!|_p^{-N} |d_K|_p^{1-m}.$$

Comme $H^1(K, \mathbb{Z}_p(m)) = H^1(L, \mathbb{Z}_p(m))^{\text{Gal}(L/K)}$ et comme

$$\#H^0(L, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(m-1)) = w_{1-m}^{(p)}(K),$$

le résultat cherché découle de la proposition 2.2.4, et le théorème est démontré.

2.4. Nombres de Tamagawa équivariants

2.4.1. Le résultat principal de cette section n'est pas utilisé dans suite. On calcule ici les nombres de Tamagawa équivariants introduits dans [26] et [35]. Ce calcul est une conséquence immédiate de la suite exacte de Perrin-Riou. Remarquons néanmoins que la section 3.5 de [35] contient des erreurs dues à l'utilisation incorrecte des déterminants (les modules qu'elle considère ne sont pas toujours parfaits sur $\mathbb{Z}_p[G_n]$). Un résultat équivalent est démontré, en termes légèrement différents, dans l'article non publié de Kato [26].

2.4.2. On garde les notations des sections précédentes, en particulier L_0 désigne une extension non-ramifiée finie de \mathbb{Q}_p . On considère $\mathbb{Z}_p(m)$ comme $\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$ -module. Il est facile de voir qu'il admet une résolution

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p[[G_\infty]] \rightarrow \mathbb{Z}_p[[G_\infty]] \rightarrow \mathbb{Z}_p(m) \rightarrow 0.$$

Si $m \neq 0$, alors en prenant les coinvariants l'on obtient une résolution

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p[G_n] \rightarrow \mathbb{Z}_p[G_n] \rightarrow H^0(L_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(m)) \rightarrow 0.$$

Donc $H^0(L_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(m))$ est parfait sur $\mathbb{Z}_p[G_n]$ pour $m \neq 0$ (ceci résulte aussi du lemme de Tate [38], lemma 8).

Alors les suites (4) et (5) montrent que $H^1(L_n, \mathbb{Z}_p(m)) = \mathbf{Z}(\mathbb{Z}_p(m))_{H_{L_n}}$ est aussi parfait.

2.4.3. Soit $m \neq 0, 1$. Alors la suite exacte (1) donne un isomorphisme

$$i_{\text{éq}} : (\det_{\mathbb{Q}_p[G_n]} H_f^1(L_n, \mathbb{Q}_p(m)))^{-1} \simeq (\det_{\mathbb{Q}_p[G_n]} t_{\mathbb{Q}_p(m)}(L_n))^{-1}.$$

Comme $\mathbb{Q}_p[G_n]$ -module, $D_{dR}(\mathbb{Q}_p(m)) = L_n$ est la somme directe de $[L_0 : \mathbb{Q}_p]$ copies de $\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})$. L'élément $x_n = \sum_{i=1}^n \zeta_{p^i}$ définit ainsi une base de $\det_{\mathbb{Q}_p[G_n]} t_{\mathbb{Q}_p(m)}(L_n)$ qu'on note ω_n . Soit ω_n^{-1} son dual. On appelle *nombre de Tamagawa équivariant* un élément $\text{Tam}_{\mathbb{Z}_p[G_n], \omega_n}^{(0)}(\mathbb{Z}_p(m)) \in \mathbb{Q}_p[G_n]$ tel que

$$i_{\text{éq}}(\det_{\mathbb{Z}_p[G_n]}^{-1} H_f^1(L_n, \mathbb{Z}_p(m))) = \text{Tam}_{\mathbb{Z}_p[G_n], \omega_n}^{(0)}(\mathbb{Z}_p(m)) \omega_n^{-1}.$$

On note qu'il est unique modulo les inversibles de $\mathbb{Z}_p[G_n]$. Rappelons que $H_f^1(L_n, \mathbb{Z}_p(m)) = H^1(L_n, \mathbb{Z}_p(m))$ pour m positif. Si m est négatif, alors $t_{\mathbb{Q}_p(m)}(L_n) = 0$ et le nombre de Tamagawa ne dépend pas de ω_n . On a $H_f^1(L_n, \mathbb{Q}_p(m)) = 0$ et donc

$$\begin{aligned} \text{Tam}_{\mathbb{Z}_p[G_n]}^{(0)}(\mathbb{Z}_p(1-m)) \mathbb{Z}_p[G_n] &\simeq (m-1)!^{-[L_0:\mathbb{Q}_p]} \det_{\mathbb{Q}_p[G_n]}^{-1}(1-\varphi|D_{\text{cris}}(\mathbb{Q}_p(1-m))) \\ &\otimes \det_{\mathbb{Z}_p[G_n]} H^0(L_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-m)). \end{aligned}$$

Soit ι l'involution de $\mathbb{Q}_p[G_n]$ qui envoie g sur g^{-1} . Pour tout caractère ψ de G_n on note p^{η_ψ} son conducteur.

PROPOSITION 2.4.4. – Soit $m \geq 2$. Alors pour tout $n \geq 1$ on a

$$\begin{aligned} &\text{Tam}_{\mathbb{Z}_p[G_n], \omega_n}^{(0)}(\mathbb{Z}_p(m)) / \text{Tam}_{\mathbb{Z}_p[G_n]}^{(0)}(\mathbb{Z}_p(1-m))^t \\ &= (m-1)!^{-[L_0:\mathbb{Q}_p]} \left(\sum_{\psi \neq 1} p^{(1-m)\eta_\psi + (n-\eta_\psi)} e_\psi - p^{n-1} e_1 \right). \end{aligned}$$

Démonstration. – Comme $H^1(L_n, \mathbb{Z}_p(m)) \simeq \mathbf{Z}(\mathbb{Z}_p(m))_{H_{L_n}}$, la suite exacte de Perrin-Riou donne

$$\begin{aligned} \det_{\mathbb{Z}_p[G_n]} H^1(L_n, \mathbb{Z}_p(m)) &\simeq \det_{\mathbb{Z}_p[G_n]} \tilde{\mathbf{Z}}(\mathbb{Z}_p(m))_{H_{L_n}} \otimes \det_{\mathbb{Z}_p[G_n]} H^0(L_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(m-1)) \\ &\simeq \det_{\mathbb{Z}_p[G_n]} R_{H_{L_n}} \otimes \det_{\mathbb{Z}_p[G_n]} H^0(L_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(m-1)). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \text{Tam}_{\mathbb{Z}_p[G_n], \omega_n}^{(0)}(\mathbb{Z}_p(m)) \mathbb{Z}_p[G_n] &\simeq \det_{\mathbb{Q}_p[G_n]}^{-1}(1 - \varphi|D_{\text{cris}}(\mathbb{Q}_p(m))) \\ &\quad \otimes \det_{\mathbb{Z}_p[G_n]} H^0(L_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(m-1)) \\ &\quad \otimes \det_{\mathbb{Z}_p[G_n]}^{-1} R_{H_{L_n}} \otimes \det_{\mathbb{Z}_p[G_n]} \mathbb{Z}_p[G_n] \omega_n. \end{aligned}$$

Un calcul facile montre que

$$\det_{\mathbb{Z}_p[G_n]} H^0(L_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-m))^t \simeq \det_{\mathbb{Z}_p[G_n]}^{-1} H^0(L_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(m-1)).$$

Donc

$$\begin{aligned} \text{Tam}_{\mathbb{Z}_p[G_n]}^{(0)}(\mathbb{Z}_p(1-m))^t \mathbb{Z}_p[G_n] &\simeq (m-1)!^{-[L_0:\mathbb{Q}_p]} \det_{\mathbb{Q}_p[G_n]}^{-1}(1 - \varphi|D_{\text{cris}}(\mathbb{Q}_p(1-m))) \\ &\quad \otimes \det_{\mathbb{Z}_p[G_n]}^{-1} H^0(L_n, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(m-1)). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} &\text{Tam}_{\mathbb{Z}_p[G_n], \omega_n}^{(0)}(\mathbb{Z}_p(m)) / \text{Tam}_{\mathbb{Z}_p[G_n]}^{(0)}(\mathbb{Z}_p(1-m))^t \mathbb{Z}_p[G_n] \\ &\simeq (m-1)!^{-[L_0:\mathbb{Q}_p]} (1 - \varphi|D_{\text{cris}}(\mathbb{Q}_p(1-m))) \\ &\quad \otimes \det_{\mathbb{Q}_p[G_n]}^{-1}(1 - \varphi|D_{\text{cris}}(\mathbb{Q}_p(m))) \otimes \det_{\mathbb{Z}_p[G_n]}^{-1} R_{H_{L_n}} \otimes \det_{\mathbb{Z}_p[G_n]} \mathbb{Z}_p[G_n] \omega_n. \end{aligned}$$

Le déterminant $\det_{\mathbb{Z}_p[G_n]}^{-1} R_{H_{L_n}} \otimes \det_{\mathbb{Z}_p[G_n]} \mathbb{Z}_p[G_n] \omega_n$ est calculé caractère par caractère dans la démonstration de la proposition 2.2.4. Si $\psi \neq 1$ on a $e_\psi(x_n)/e_\psi(y_{m,n}) = p^{n-m\eta_\psi}$ et si $\psi = 1$ on a

$$\begin{aligned} \frac{e_\psi(x_n)}{e_\psi(y_{n,m})} &= -p^{n-1} \frac{1-p^{-m}}{1-p^{m-1}} \\ &= -p^{n-1} \det_{\mathbb{Q}_p}^{-1}(1 - \varphi|D_{\text{cris}}(\mathbb{Q}_p(1-m))) \otimes \det_{\mathbb{Q}_p}(1 - \varphi|D_{\text{cris}}(\mathbb{Q}_p(m))), \end{aligned}$$

d'où la proposition. \square

Remarque 2.4.5. – Le théorème 2.1 ne découle pas automatiquement de la proposition 2.4.4. En effet, pour déduire 2.1 de 2.4.4 il faut comparer le réseau $\mathbb{Z}_p[G_n]x_n$ avec O_{L_n} , ce qui nécessite la connaissance de la structure galoisienne de O_{L_n} (voir la démonstration de la proposition 2.2.4). Remarquons aussi qu'en général le module O_{L_n} n'est pas $\mathbb{Z}_p[G_n]$ -parfait.

Néanmoins, les nombres de Tamagawa équivariants sont liés aux nombres de Tamagawa usuels des "motifs de Dirichlet" [22] de la façon suivante. On considère $\mathbb{Q}_p(m)$ comme une représentation de \mathcal{G}_{L_n} . Soit E une extension finie de \mathbb{Q}_p contenant toutes les racines de l'unité d'ordre p^{n-1} . Alors la représentation induite

$$\text{Ind}_{L_n/L_0} \mathbb{Q}_p(m) = \mathbb{Q}_p[G_n](m)$$

se décompose sur E en somme directe des représentations de Dirichlet $V_\psi = E(\psi)(m)$:

$$V = E[G_n](m) = \bigoplus_{\psi \in X(G_n)} V_\psi.$$

Pour un caractère de Dirichlet ψ , le réseau canonique $T = O_E[G_n]$ de V définit un réseau T_ψ de V_ψ qui dépend du choix de $n \geq \eta_\psi$. En particulier, si $\eta_\psi = n$, alors la ψ -partie de la formule démontrée précédemment donne la formule suivante :

$$\text{Tam}_{L_n, e_\psi(x_n)}^0(T_\psi(m)) / \text{Tam}_{L_n}^0(T_{\psi^{-1}}(1-m)) = |(m-1)!|_p^{[L_0:\mathbb{Q}_p]} p^{-(m-1)n}.$$

3. Rappels sur le motif $\mathbb{Q}(m)$

Dans toute la suite de cet article F est une extension finie de \mathbb{Q} . On note r_1 (resp. $2r_2$) le nombre des places réelles (resp. imaginaires) de F .

3.1. Le motif $\mathbb{Q}(m)$

3.1.1. *Réalisations de $\mathbb{Q}(m)$* (voir par exemple [12]). Pour le formalisme général des motifs et les notations non expliquées voir [17,18]. Soit m un nombre entier. Le motif $\mathbb{Q}(m)$ est un motif pur de poids $-2m$ dont les réalisations sur F sont :

Réalisation de Betti. Pour tout $v|\infty$ on a

$$\mathbb{Q}(m)_{B,v} = (2\pi i)^m \mathbb{Q}.$$

On pose $\mathbb{Q}(m)_B = \prod_{v|\infty} \mathbb{Q}(m)_{B,v}$.

Réalisation de de Rham. On a $\mathbb{Q}(m)_{dR} = F$ avec la filtration

$$\mathbb{Q}(m)_{dR}^i = \begin{cases} F & \text{si } i \leq -m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose $\mathbb{Z}(m)_{dR} = O_F$.

Réalisations p -adiques. La réalisation p -adique de $\mathbb{Q}(m)$ est l'espace vectoriel

$$\mathbb{Q}_p(m) = \mathbb{Z}_p(m) \otimes \mathbb{Q}_p,$$

muni de l'action naturelle de \mathcal{G}_F .

Pour $m = 1$ l'isomorphisme de comparaison

$$\mathbb{Q}(1)_{B,v} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}_p(1)$$

est induit par la famille d'applications

$$\begin{aligned} 2\pi i \mathbb{Z} &\rightarrow \mu_{p^n}, \\ x &\mapsto \exp(x/n). \end{aligned}$$

Comme $\mathbb{Q}(m) = \mathbb{Q}(1)^{\otimes m}$, en prenant les produits tensoriels, on en déduit des isomorphismes pour tout m .

L'isomorphisme de comparaison

$$\mathbb{Q}(m)_{B,v} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}(m)_{dR} \otimes_F \mathbb{C}$$

est induit par l'inclusion naturelle $(2\pi i)^m \mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$.

3.1.2. *La cohomologie motivique.* Comme on ne peut pas travailler dans la catégorie conjecturale \mathcal{MM}_F des motifs mixtes, on introduit la cohomologie motivique de Beilinson [10] en posant

$$H_{\mathcal{M}}^0(F, \mathbb{Q}(m)) = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } m = 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$H_{\mathcal{M}}^1(F, \mathbb{Q}(m)) = \begin{cases} K_{2m-1}(F) \otimes \mathbb{Q} & \text{si } m \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La nullité de $H_{\mathcal{M}}^1$ pour $m < 1$ s’explique par des raisons de poids. On sait que $K_1(O_F) = O_F^*$ et que $K_{2m-1}(O_F) = K_{2m-1}(F)$ pour $m \geq 2$. L’image de $K_{2m-1}(O_F)$ dans $H_{\mathcal{M}}^1(F, \mathbb{Q}(m))$ est un \mathbb{Z} -réseau qu’on note $H_{\mathcal{M},f}^1(F, \mathbb{Q}(m))_{\mathbb{Z}}$. On pose

$$H_{\mathcal{M},f}^1(F, \mathbb{Q}(m)) = H_{\mathcal{M},f}^1(F, \mathbb{Q}(m))_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

Conjecturalement, ce groupe classe les extensions de $\mathbb{Q}(0)$ par $\mathbb{Q}(m)$ ayant “bonne réduction” en toutes les places finies. Il est clair qu’il coïncide avec $H_{\mathcal{M}}^1(F, \mathbb{Q}(m))$ pour tout $m \neq 1$.

3.1.3. *La structure de Hodge de $\mathbb{Q}(m)$* ([17], §5, 6 et [18], section III.1). Dans cette section on rappelle le calcul de la cohomologie de Hodge $H_{\mathcal{H}\mathcal{M}}^1$ pour le motif $\mathbb{Q}(m)$. Pour toute place infinie on note $\mathbb{Q}(m)_{\mathbb{B},v}^{\pm}$ la partie de $\mathbb{Q}(m)_{\mathbb{B},v}$ fixée par \mathcal{G}_{F_v} et l’on pose $\mathbb{Q}(m)_{\mathbb{B}}^{\pm} = \bigoplus_{v|\infty} \mathbb{Q}(m)_{\mathbb{B},v}^{\pm}$. Pour simplifier la notation on pose

$$H_{\mathcal{H}\mathcal{M}}^1(F, \mathbb{Q}(m)_{\mathbb{B}} \otimes \mathbb{R}) = \bigoplus_{v|\infty} H_{\mathcal{H}\mathcal{M}}^1(F_v, \mathbb{Q}(m)_{\mathbb{B},v} \otimes \mathbb{R}).$$

Alors on a

$$H_{\mathcal{H}\mathcal{M}}^1(F, \mathbb{Q}(m)_{\mathbb{B}} \otimes \mathbb{R}) = 0 \quad \text{si } m \leq 0,$$

et si $m \geq 1$ le groupe $H_{\mathcal{H}\mathcal{M}}^1(F, \mathbb{Q}(m)_{\mathbb{B}} \otimes \mathbb{R})$ est inclus dans une suite exacte courte

$$(5) \quad 0 \rightarrow \mathbb{Q}(m)_{\mathbb{B}}^{\pm} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}(m)_{\text{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \rightarrow H_{\mathcal{H}\mathcal{M}}^1(F, \mathbb{Q}(m)_{\mathbb{B}} \otimes \mathbb{R}) \rightarrow 0.$$

D’autre part, pour $m \geq 1$, la dualité entre $\mathbb{Q}(m)$ et $\mathbb{Q}(1 - m)$ nous fournit une suite exacte

$$(6) \quad 0 \rightarrow \mathbb{Q}(m)_{\mathbb{B}}^{\pm} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}(m)_{\text{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Q}(m - 1)_{\mathbb{B}}^{\pm} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \rightarrow 0$$

(on peut expliciter cette suite, en remarquant que l’application β est induite par l’isomorphisme

$$\begin{aligned} F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} &\simeq [\mathbb{C}^{X(F)}]^+, \\ a \otimes b &\rightarrow \prod_{\tau \in X(F)} a^{\tau} b \end{aligned}$$

et par la décomposition $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}(m - 1) \oplus \mathbb{R}(m)$). Donc, pour $m \geq 1$, les suites (5) et (6) donnent

$$(7) \quad \begin{aligned} H_{\mathcal{H}\mathcal{M}}^1(F, \mathbb{Q}(m)_{\mathbb{B}} \otimes \mathbb{R}) &\simeq \mathbb{Q}(m - 1)_{\mathbb{B}}^{\pm} \otimes \mathbb{R} \\ &\simeq \begin{cases} \mathbb{R}(m - 1)^{r_1} & \text{si } m \geq 1 \text{ est pair,} \\ \mathbb{R}(m - 1)^{r_1+r_2} & \text{si } m \geq 1 \text{ est impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

3.2. Régulateurs

(Voir [6,33,39,43].) Pour tout $m \geq 1$ on dispose d’une suite exacte

$$(8) \quad 0 \rightarrow H_{\mathcal{M},f}^1(F, \mathbb{Q}(m)) \otimes \mathbb{R} \xrightarrow{r_{\infty,m}} H_{\mathcal{H}\mathcal{M}}^1(F, \mathbb{Q}(m)_{\mathbb{B}} \otimes \mathbb{R}) \rightarrow H_{\mathcal{M}}^0(F, \mathbb{Q}(1 - m))^* \otimes \mathbb{R} \rightarrow 0$$

(voir [17], section 6.10). Si $m = 1$, cette suite coïncide avec la suite

$$0 \rightarrow O_F^* \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \xrightarrow{r_{\infty,1}} \mathbb{R}^{r_1+r_2} \xrightarrow{\psi} \mathbb{R} \rightarrow 0,$$

où $r_{\infty,1}$ est le régulateur de Dirichlet donné par la formule $x \mapsto (\log \|x\|_v)_v$ et où ψ envoie $(\alpha_1, \dots, \alpha_{r_1+r_2})$ sur $\sum_i \alpha_i$. Si $u_1, \dots, u_{r_1+r_2-1}$ est une base du groupe O_F^* modulo torsion, on appelle *nombre régulateur* de Dirichlet, noté $R_1(F)$, le déterminant habituel fabriqué à partir des $\log \|u_i\|_v$.

Si $m \geq 2$, le groupe $H_{\mathcal{M}}^0(F, \mathbb{Q}(1-m))$ est nul et l'application $r_{\infty,m}$ est le régulateur de Beilinson, qui induit un isomorphisme

$$H_{\mathcal{M},f}^1(F, \mathbb{Q}(m)) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq H_{\mathcal{H}\mathcal{M}}^1(F, \mathbb{Q}(m)_{\mathbb{B}} \otimes \mathbb{R}).$$

L'espace $\mathbb{R}(m-1)$ a une base canonique $(2\pi i)^{m-1}$, ce qui donne, grâce à (7), une base de $H_{\mathcal{H}\mathcal{M}}^1(F, \mathbb{Q}(m)_{\mathbb{B}} \otimes \mathbb{R})$. On appelle *nombre régulateur* de Beilinson le déterminant

$$R_m(F) = \det(r_{\infty,m}(H_{\mathcal{M},f}^1(F, \mathbb{Q}(m))_{\mathbb{Z}}))$$

calculé dans cette base.

La suite (8) induit un isomorphisme

$$(9) \quad \det H_{\mathcal{M},f}^1(F, \mathbb{Q}(m)) \otimes \det^{-1} H_{\mathcal{M}}^0(F, \mathbb{Q}(1-m)) \otimes \mathbb{R} \simeq \det H_{\mathcal{H}\mathcal{M}}^1(F, \mathbb{Q}(m)_{\mathbb{B}} \otimes \mathbb{R})$$

et pour tout $m \geq 1$ le nombre régulateur peut être vu comme le déterminant de cet isomorphisme calculé dans les bases canoniques.

3.3. Nombres de Tamagawa archimédiens

(Voir [17,18].)

3.3.1. Soit M un motif sur F et soit $t_M = M_{\text{dR}}/M_{\text{dR}}^0$. Pour toute place infinie v on note $M_{\mathbb{B},v}^+$ la partie de $M_{\mathbb{B},v}$ fixée par $\text{Gal}(\mathbb{C}/F_v)$ et on pose $M_{\mathbb{B}}^+ = \bigoplus_{v|\infty} M_{\mathbb{B},v}^+$. On note $H_{\mathcal{M}\mathcal{M},f}^1(F, M)$ le sous-espace de $H_{\mathcal{M}\mathcal{M}}^1(F, M)$ classifiant les extensions de $\mathbb{Q}(0)$ par M ayant bonne réduction en toutes les places finies. Soit

$$L_f(M) = \det_{\mathbb{Q}} H_{\mathcal{M}\mathcal{M}}^0(F, M) \otimes \det_{\mathbb{Q}}^{-1} H_{\mathcal{M}\mathcal{M},f}^1(F, M).$$

Fontaine et Perrin-Riou définissent la *droite fondamentale* de M en posant

$$\Delta_f(M) = L_f(M) \otimes L_f(M^*(1)) \otimes \det_{\mathbb{Q}}^{-1} M_{\mathbb{B}}^+ \otimes \det_{\mathbb{Q}} t_M$$

et construisent un isomorphisme canonique

$$i_M : \mathbb{R} \otimes \Delta_f(M) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}.$$

Rappelons cette construction dans le cas $M = \mathbb{Q}(m)$. Comme on ne dispose pas de la catégorie $\mathcal{M}\mathcal{M}_F$, on travaille avec le groupe $H_{\mathcal{M},f}^1(F, \mathbb{Q}(m))$, qui est conjecturalement isomorphe à $H_{\mathcal{M}\mathcal{M},f}^1(F, M)$.

Soit $m \geq 1$. Alors les groupes $H_{\mathcal{M}}^0(F, \mathbb{Q}(m))$ et $H_{\mathcal{M}}^1(F, \mathbb{Q}(1-m))$ sont nuls. Donc on a

$$\begin{aligned} \Delta_f(\mathbb{Q}(m)) &= \det^{-1} H_{\mathcal{M}}^1(F, \mathbb{Q}(m)) \otimes \det H_{\mathcal{M}}^0(F, \mathbb{Q}(1-m)) \\ &\quad \otimes \det^{-1} \mathbb{Q}(m)_{\mathbb{B}}^+ \otimes \det \mathbb{Q}(m)_{\text{dR}}, \end{aligned}$$

et l'on obtient l'isomorphisme $i_m : \mathbb{R} \otimes \Delta_f(\mathbb{Q}(m)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ en composant l'isomorphisme (9) avec la suite exacte (6). D'autre part, on a

$$\Delta_f(\mathbb{Q}(1-m)) = \det^{-1} H_{\mathcal{M}}^1(F, \mathbb{Q}(m)) \otimes \det H_{\mathcal{M}}^0(F, \mathbb{Q}(1-m)) \otimes \det^{-1} \mathbb{Q}(1-m)_{\mathbb{B}}^+,$$

et l'on obtient l'isomorphisme $i_{1-m} : \mathbb{R} \otimes \Delta_f(\mathbb{Q}(1-m)) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$ en composant les isomorphismes (9) et (7).

Les réseaux $\mathbb{Z}(m)_B$, $\mathbb{Z}(m)_{dR}$ et $H^1_{\mathcal{M}}(F, \mathbb{Z}(m))_{\mathbb{Z}}$ déterminent un \mathbb{Z} -réseau canonique $\Delta_f(\mathbb{Z}(m))$ de $\Delta_f(\mathbb{Q}(m))$ et l'on pose

$$\text{Tam}_{\infty}^0(\mathbb{Z}(m)) = |i_m(\Delta_f(\mathbb{Z}(m)))|^{-1}.$$

LEMME 3.3.2. – Soit $n = [F : \mathbb{Q}]$. Alors pour tout $m \geq 1$ on a

- (i) $\text{Tam}_{\infty}^0(\mathbb{Z}(1-m)) = R_m(F)$ (le nombre régulateur de Beilinson);
- (ii)

$$\text{Tam}_{\infty}^0(\mathbb{Z}(m)) = \begin{cases} (2\pi)^{mn-r_2} |d_F|^{-1/2} R_m(F), & \text{si } m \text{ est pair,} \\ (2\pi)^{mn-r_2} \pi^{-r_1} |d_F|^{-1/2} R_m(F), & \text{si } m \text{ est impair.} \end{cases}$$

Démonstration. – La formule (i) est évidente. Pour démontrer (ii), on note que l'application β envoie une \mathbb{Z} -base $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ de O_F sur le parallélépipède $(\sum_{\tau} \omega_1^{\tau}, \dots, \sum_{\tau} \omega_n^{\tau})$, dont le volume est égal à

$$\pm \det(\omega_i^{\tau}) = |d_F|^{1/2}. \quad \square$$

4. Groupe de Safarevič–Tate

4.1. Groupes de Selmer et de Safarevič–Tate

(Voir [18], section II.5.3.)

4.1.1. Dans ce paragraphe, F est une extension finie de \mathbb{Q} . Soit p un nombre premier et soit V une représentation p -adique de \mathcal{G}_F . Pour toute place finie v de F le sous-groupe $H_f^1(F_v, V)$ de $H^1(F_v, V)$ est donc bien défini (cf. §1). Si $v|\infty$, on pose $H_f^1(F_v, V) = 0$. Soit $x \in H^1(F, V)$. Pour toute place v on note X_v l'image de x dans $H^1(F_v, V)$ et l'on pose

$$H_f^1(F, V) = \{x \in H^1(F, V) \mid x_v \in H_f^1(F_v, V) \text{ pour tout } v\}.$$

On fixe un réseau T de V stable par \mathcal{G}_F . Soit $H_f^1(F_v, V/T)$ l'image de $H_f^1(F_v, V)$ dans $H^1(F_v, V/T)$. On appelle *groupe de Selmer* de T le groupe

$$H_f^1(F, V/T) = \{x \in H^1(F, V/T) \mid x_v \in H_f^1(F_v, V/T) \text{ pour tout } v\}$$

et l'on définit le *groupe de Safarevič–Tate* $\mathbf{III}_F(T)$ comme le quotient de $H_f^1(F, V/T)$ par l'image de $H_f^1(F, V)$. Donc $\mathbf{III}_F(T)$ est le noyau de l'application

$$\frac{H^1(F, V/T)}{H_f^1(F, T) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p} \rightarrow \prod_v \frac{H^1(F_v, V/T)}{H_f^1(F_v, T) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p}.$$

PROPOSITION 4.2. – (i) Le groupe $\mathbf{III}_F(T)$ est fini.

(ii) Soit $T^* = \text{Hom}(T, \mathbb{Z}_p)$ la représentation duale. Alors il existe une dualité parfaite

$$\mathbf{III}_F(T) \times \mathbf{III}_F(T^*(1)) \rightarrow \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p.$$

En particulier, les groupes $\mathbf{III}_F(T)$ et $\mathbf{III}_F(T^*(1))$ ont même ordre.

Démonstration. – Voir [14] et [18], propositions 5.3.5 et 5.4.2. \square

4.3. Régulateurs p -adiques

(Voir [42, 13].) Soit p un nombre premier impair et soit

$$\text{ch}_{i,m} : K_{2m-i}(O_F) \otimes \mathbb{Z}_p \rightarrow H_{\text{ét}}^i(O_F[1/p], \mathbb{Z}_p(m)) \quad (i = 1, 2)$$

l'application "caractère de Chern p -adique" construite par Soulé [42] et Dwyer–Friedlander [13]. La conjecture de Quillen–Lichtenbaum affirme que $\text{ch}_{i,m}$ est un isomorphisme pour $m \geq 2$. Nous aurons besoin des résultats partiels suivants dans cette direction :

(i) L'application $\text{ch}_{1,m}$ est surjective, de noyau fini [13] ;

(ii) Le groupe $K_{2m-2}(O_F)$ est fini et l'application $\text{ch}_{2,m}$ est surjective, scindée [42, 13, 24].

On note $K_{2m-2}^{\text{coh}}(O_F)$ le sous-groupe de $K_{2m-2}(O_F)$ isomorphe à $\bigoplus_p H_{\text{ét}}^2(O_F[1/p], \mathbb{Z}_p(m))$. Le résultat suivant est bien connu.

LEMME 4.3.1. – Pour $m \geq 1$, l'application $\text{ch}_{1,m}$ induit un isomorphisme

$$H_{\mathcal{M},f}^1(F, \mathbb{Q}(m)) \otimes \mathbb{Q}_p \simeq H_f^1(F, \mathbb{Q}_p(m)).$$

Pour $m \leq 0$ les deux groupes sont nuls.

Démonstration. – La suite exacte de localisation en cohomologie étale ([42], p. 268)

$$0 \rightarrow H_{\text{ét}}^1(O_F[1/p], \mathbb{Q}_p(m)) \rightarrow H^1(F, \mathbb{Q}_p(m)) \rightarrow \bigoplus_{v|p} H^0(F_v, \mathbb{Q}_p(m-1))$$

montre que $H^1(F, \mathbb{Q}_p(m))$ est isomorphe à $H_{\text{ét}}^1(O_F[1/p], \mathbb{Q}_p(m))$ si $m \neq 1$. D'autre part, on a la suite exacte de Poitou–Tate (pour tout m) :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \bigoplus_{v|p} H^2(F_v, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-m))^\wedge &\rightarrow H_{\text{ét}}^2(O_F[1/p], \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-m))^\wedge \\ &\rightarrow H_{\text{ét}}^1(O_F[1/p], \mathbb{Q}_p(m)) \rightarrow \bigoplus_{v|p} H^1(F_v, \mathbb{Q}_p(m)) \end{aligned}$$

(pour un \mathbb{Z}_p -module M on note M^\wedge son dual de Pontryagin). Soit $m \leq -1$. La finitude de $K_{-2m}(O_F)$ entraîne $H_{\text{ét}}^2(O_F[1/p], \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-m)) = 0$ [42] donc l'application

$$H^1(F, \mathbb{Q}_p(m)) \rightarrow \bigoplus_{v|p} H^1(F_v, \mathbb{Q}_p(m))$$

est injective. Comme $H_f^1(F_v, \mathbb{Q}_p(m)) = 0$, on a $H_f^1(F, \mathbb{Q}_p(m)) = 0$.

Si $m = 0$, la deuxième flèche de la suite de Poitou–Tate est surjective par la théorie du corps de classes, et l'on obtient également que $H_f^1(F_v, \mathbb{Q}_p(m)) = 0$.

Soit $m \geq 2$. Alors $H_f^1(F_v, \mathbb{Q}_p(m))$ coïncide avec $H^1(F_v, \mathbb{Q}_p(m))$ et l'application $\text{ch}_{1,m}$ donne un isomorphisme

$$K_{2m-1}(F) \otimes \mathbb{Q}_p \simeq H^1(F, \mathbb{Q}_p(m)).$$

Enfin, si $m = 1$, l'application composée

$$K_1(O_F) \otimes \mathbb{Q}_p \xrightarrow{\text{ch}_{1,m}} H_{\text{ét}}^1(O_F[1/p], \mathbb{Z}_p(1)) \otimes \mathbb{Q}_p \rightarrow H^1(F, \mathbb{Q}_p(1))$$

coïncide avec l'application "cobord" de Kummer

$$O_F^* \otimes \mathbb{Q}_p \rightarrow H^1(F, \mathbb{Q}_p(1))$$

induite par les suites exactes courtes

$$0 \rightarrow \mu_{p^n} \rightarrow \overline{F}^* \xrightarrow{p^n} \overline{F}^* \rightarrow 0.$$

La description des groupes $H_f^1(F_v, \mathbb{Q}_p(1))$ donnée dans la section 1.2 montre que l'image de ce cobord est égale à $H_f^1(F, \mathbb{Q}_p(1))$. □

Remarque 4.3.2. – On conjecture que pour tout motif M les applications naturelles

$$H_{\mathcal{M}, \mathcal{M}, f}^1(F, M) \otimes \mathbb{Q}_p \rightarrow H_f^1(F, M_p)$$

sont des isomorphismes (voir [7], conjecture 5.3 et [17], §6).

On pose

$$\mathbf{III}_F(\mathbb{Z}(m)) = \prod_p \mathbf{III}_F(\mathbb{Z}_p(m)).$$

PROPOSITION 4.4. – (i) *Soit p un nombre premier impair et soit $m \geq 2$. Alors le groupe $\mathbf{III}_F(\mathbb{Z}_p(m))$ est canoniquement isomorphe au noyau du morphisme de localisation :*

$$H_{\text{ét}}^2(O_F[1/p], \mathbb{Z}_p(m)) \rightarrow \bigoplus_{v|p} H^2(F_v, \mathbb{Z}_p(m)).$$

De plus, $\mathbf{III}_F(\mathbb{Z}_p(1)) \simeq \text{Cl}^{(p)}(F)$, où $\text{Cl}(F)$ désigne le groupe de classes de F .

(ii) *Pour $m \geq 2$ on a*

$$\#\mathbf{III}_F(\mathbb{Z}(m)) \stackrel{2}{=} \frac{w_{1-m}(F)}{\prod_p \prod_{v|p} w_{1-m}^{(p)}(F_v)} \#K_{2m-2}^{\text{coh}}(O_F).$$

Démonstration. – Soit $m \geq 2$. Il résulte des lemmes 4.3.1 et 1.3.1 que les groupes $H_f^1(F, \mathbb{Q}_p(1-m))$ et $H_f^1(F_v, \mathbb{Q}_p(1-m))$ sont nuls. Alors $\mathbf{III}_F(\mathbb{Z}_p(1-m))$ est le noyau de l'application

$$H^1(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-m)) \rightarrow \prod_v H^1(F_v, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-m)).$$

La suite exacte de localisation en cohomologie étale montre que $H^1(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-m))$ est isomorphe à $H_{\text{ét}}^1(O_F[1/p], \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-m))$, et par le théorème de dualité de Poitou–Tate (voir par exemple [32]) les noyaux des applications

$$H_{\text{ét}}^1(O_F[1/p], \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-m)) \rightarrow \prod_v H^1(F_v, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1-m))$$

et

$$H_{\text{ét}}^2(O_F[1/p], \mathbb{Z}_p(m)) \rightarrow \bigoplus_{v|p} H^2(F_v, \mathbb{Z}_p(m))$$

sont duaux entre eux. En utilisant la dualité de la proposition 4.2 entre $\mathbf{III}_F(\mathbb{Z}_p(1 - m))$ et $\mathbf{III}_F(\mathbb{Z}_p(m))$ on obtient (i).

On écrit la suite exacte de Poitou–Tate :

$$0 \rightarrow \mathbf{III}_F(\mathbb{Z}_p(m)) \rightarrow H_{\text{ét}}^2(O_F[1/p], \mathbb{Z}_p(m)) \rightarrow \bigoplus_{v|p} H^2(F_v, \mathbb{Z}_p(m)) \rightarrow H_{\text{ét}}^0(O_F[1/p], \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1 - m)) \rightarrow 0.$$

Par dualité locale, $H^2(F_v, \mathbb{Z}_p(m))^\wedge \simeq H^0(F_v, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(1 - m))$, d'où l'on obtient, pour $m \geq 2$:

$$\#\mathbf{III}_F(\mathbb{Z}_p(m)) = \frac{w_{1-m}^{(p)}(F)}{\prod_{v|p} w_{1-m}^{(p)}(F_v)} \#H_{\text{ét}}^2(O_F[1/p], \mathbb{Z}_p(m)).$$

Comme le produit des ordres des $H_{\text{ét}}^2(O_F[1/p], \mathbb{Z}_p(m))$ est égal à $\#K_{2m-2}^{\text{coh}}(O_F)$, la formule (ii) est démontrée.

Soit maintenant $m = 0$. Alors $H_f^1(F_v, \mathbb{Q}_p)$ coïncide avec $\text{Hom}(\text{Gal}(F_v^{nr}/F_v), \mathbb{Q}_p)$, et donc

$$\mathbf{III}_F(\mathbb{Z}_p(0)) = \text{Hom}(\text{Gal}(F^{nr}/F), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = \text{Hom}(\text{Cl}^{(p)}(F), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p).$$

La proposition est démontrée. \square

Remarque 4.5. – Pour $m \geq 2$ on peut calculer le groupe $\mathbf{III}_F(\mathbb{Z}_p(m))$ directement, sans passage par le dual, en utilisant les résultats de Schneider [38]. En effet, on vérifie facilement que $\mathbf{III}_F(\mathbb{Z}_p(m))$ s'identifie au noyau du morphisme de localisation

$$\frac{H^1(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(m))}{\text{Div} H^1(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(m))} \rightarrow \prod_v \frac{H^1(F_v, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(m))}{\text{Div} H^1(F_v, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(m))},$$

où Div désigne le sous-groupe divisible maximal. Un calcul bien connu ([38], §4) montre que ce noyau coïncide avec le noyau du morphisme de localisation

$$\frac{H_{\text{ét}}^1(O_F[1/p], \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(m))}{\text{Div} H^1(F, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(m))} \rightarrow \bigoplus_{v|p} \frac{H^1(F_v, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(m))}{\text{Div} H^1(F_v, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(m))}.$$

La finitude de $K_{2m-2}(O_F)$ (resp. la dualité locale) entraîne que le groupe de gauche (resp. chaque groupe de droite) est canoniquement isomorphe à $H_{\text{ét}}^2(O_F[1/p], \mathbb{Z}_p(m))$ (resp. à $H^2(F_v, \mathbb{Z}_p(m))$). Donc, finalement,

$$\mathbf{III}_F(\mathbb{Z}_p(m)) \simeq \ker \left(H_{\text{ét}}^2(O_F[1/p], \mathbb{Z}_p(m)) \rightarrow \bigoplus_{v|p} H^2(F_v, \mathbb{Z}_p(m)) \right)$$

et l'on retrouve la proposition 4.4.

Remarque 4.6. – La proposition 4.4 suggère qu'il doit exister une définition globale de $\mathbf{III}_F(\mathbb{Z}(m))$. En effet, pour $m = 2$, la conjecture de Quillen–Lichtenbaum est vraie, et donc le noyau de localisation de 4.4(i) s'identifie à la p -partie du noyau sauvage du K_2 ; par suite, $\mathbf{III}_F(\mathbb{Z}(2))$ s'identifie, à 2-torsion près, au noyau sauvage. Pour $m > 2$, $\mathbf{III}_F(\mathbb{Z}(m))$ devrait alors être (toujours à 2-torsion près) l'analogue supérieur du noyau sauvage (voir aussi [1,34]).

5. La conjecture de Bloch et Kato

On reprend les notations et les conventions de §3. En particulier, F désigne une extension finie de \mathbb{Q} de degré n .

THÉORÈME 5.1. – *Supposons que F est abélien sur \mathbb{Q} . Alors, pour tout entier $m \neq 0, 1$ on a*

$$\zeta_F^*(m) \stackrel{2}{=} \pm \frac{\#\mathbf{III}_F(\mathbb{Z}(m))}{w_{1-m}(F)w_m(F)} \text{Tam}_F^0(\mathbb{Z}(m)),$$

Démonstration. – Soit $m \geq 2$. La formule du théorème en $1 - m$ n’est rien d’autre que la version cohomologique de la conjecture de Lichtenbaum, qui a été démontrée dans [28] pour les corps abéliens. En effet, pour $m \geq 2$ (voir [28], theorem 6.4 et l’appendice ci-après) :

$$\zeta_F^*(1 - m) \stackrel{2}{=} \pm \frac{\#K_{2m-2}^{\text{coh}}(F)}{w_m(F)} R_m(F).$$

Mais, dans la proposition 4.4, on a montré que

$$\#\mathbf{III}_F(\mathbb{Z}(1 - m)) = \#\mathbf{III}_F(\mathbb{Z}(m)) \stackrel{2}{=} \frac{w_{1-m}(F)}{\prod_p \prod_{v|p} w_{1-m}^{(p)}(F_v)} \#K_{2m-2}^{\text{coh}}(F).$$

Les nombres de Tamagawa pour $\mathbb{Z}(1 - m)$ ont été calculés dans le lemme 1.3.2. Le tout mis ensemble donne la formule du théorème en $1 - m$ pour $m \geq 2$.

Démontrons maintenant la formule en $m \geq 2$. Comme

$$\prod_{v|p} |d_{F_v}|_p = |d_F|_p,$$

il résulte du théorème 2.1 que

$$\prod_{v \nmid \infty} \text{Tam}_v^0(\mathbb{Z}(m)) = \prod_{v \nmid \infty} w_{1-m}(F_v) d_F^{1-m} \Gamma(m)^{-N}.$$

En utilisant la formule donnant $\text{Tam}_\infty^0(\mathbb{Z}(m))$, on voit qu’il suffit de montrer que

$$\zeta_F(m) = \pm \frac{\#K_{2m-2}^{\text{coh}}(F) d_F^{1/2-m}}{w_m(F) \Gamma(m)^n} \pi^{s_m(F)},$$

où $s_m(F)$ est égal à $mn - r_2$ si m est pair et à $mn - r_1 - r_2$ sinon. Il suffit d’utiliser le lemme suivant, qui est une conséquence immédiate de l’équation fonctionnelle :

LEMME 5.2. – *Pour $m \geq 2$ on a*

$$\zeta_F(m) = d_F^{1/2-m} \Gamma(m)^{-n} \pi^{s_m(F)} \zeta_F^*(1 - m).$$

Démonstration du lemme. – Soit $\Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2)$ et $\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = 2(2\pi)^{-s} \Gamma(s)$. L’équation fonctionnelle de $\zeta_F(s)$ s’écrit alors

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(s)^{r_1} \Gamma_{\mathbb{C}}(s)^{r_2} \zeta_F(s) = d_F^{1/2-s} \Gamma_{\mathbb{R}}(1 - s)^{r_1} \Gamma_{\mathbb{C}}(1 - s)^{r_2} \zeta_F(1 - s).$$

Comme

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

on a $\Gamma(-m)^* = \Gamma(m+1)^{-1}$ et le lemme résulte d'un calcul facile. \square

Remarque 5.3. – En utilisant la proposition 4.4 et le lemme 1.3.2 on peut réécrire les formules bien connues de Dirichlet pour $\zeta_F^*(1)$ et $\zeta_F^*(0)$ sous la forme suivante

$$\zeta_F^*(m) = \pm \frac{\#\mathbf{III}_F(\mathbb{Z}(m))}{w_1(F)} \text{Tam}_F^0(\mathbb{Z}(m)), \quad m = 0, 1$$

(voir aussi [17], section 8.3).

Remarque 5.4. – Soit F un corps de nombres quelconque. Alors la première partie de la démonstration du théorème 5.1 montre que pour $m \geq 2$ les conjectures de Lichtenbaum et de Bloch et Kato en $1-m$ sont équivalentes. Par l'équation fonctionnelle, si la conjecture de Lichtenbaum en $1-m$ est vraie, alors la conjecture de Bloch et Kato est vraie en m si la formule du théorème 2.1 reste vraie pour un corps local quelconque K , i.e. si

$$\text{Tam}_K^0(\mathbb{Z}_p(m)) = w_{1-m}^{(p)}(K) |(m-1)!|_p^N |d_K|_p^{m-1}.$$

On conjecture bien sûr la validité générale de cette formule. C'est un cas très particulier de la conjecture $C_{EP,K}(V)$ de Fontaine et Perrin-Riou [18], qui relie les nombres de Tamagawa des représentations duales et implique la compatibilité de la conjecture de Bloch et Kato à l'équation fonctionnelle (voir [18], section III.4.5).

Appendix A. Sur la conjecture de Lichtenbaum

A.1. Notations

La démonstration de la version cohomologique de la conjecture de Lichtenbaum dans [28] comportait des erreurs que nous corrigeons dans cet appendice en n'hésitant pas, chaque fois que c'est nécessaire, à reprendre en détail les arguments de [28].

On fixe un nombre premier $p \neq 2$ et on note $\mathbb{Q}^{(p)}$ la \mathbb{Z}_p -extension cyclotomique de \mathbb{Q} . On pose $\Gamma = \text{Gal}(\mathbb{Q}^{(p)}/\mathbb{Q})$ et $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$. Soit F un corps abélien. On pose $K = \mathbb{Q}^{(p)} \cap F$, $F_n = F(\zeta_{p^n})$ et $F_\infty = \bigcup_n F_n$. Soient $\Gamma_F = \text{Gal}(\mathbb{Q}^{(p)}/K)$ et $G_\infty = \text{Gal}(F_\infty/F)$. On note U_{F_n} (resp. $U_{F_n,p}$) le groupe des unités de F_n (resp. le groupe des p -unités de F_n). Pour toute valuation $v|p$ on note $U_{v,n}^1$ le groupe des unités principales du corps $F_{v,n} = F_v(\zeta_{p^n})$ et $\mathcal{U}_n = \bigoplus_{v|p} U_{v,n}^1$. Soit F_n^{nr} (resp. $F_n^{\text{ab},p}$) la p -extension abélienne non-ramifiée maximale (resp. la p -extension abélienne, non-ramifiée hors de p , maximale) de F_n . On pose $X_n = (F_n^{\text{nr}}/F_n)$ et $\mathfrak{X}_n = \text{Gal}(F_n^{\text{ab},p}/F_n)$. Si M_n est un système projectif de $\mathbb{Z}[\text{Gal}(F_n/F)]$ -modules, on pose $\overline{M}_n = M_n \otimes \mathbb{Z}_p$ et $\overline{M}_\infty = \varprojlim \overline{M}_n$. Pour simplifier on note $H_{p,m}(F)$ le groupe de cohomologie $H_{\text{ét}}^1(O_F[1/p], \mathbb{Z}_p(m))$. Pour $a, b \in \mathbb{Q}$ on dit qu'ils sont p -adiquement équivalents et on note $a \stackrel{p}{\sim} b$, lorsque ab^{-1} est une unité p -adique.

A.2. Unités locales et unités circulaires

A.2.1. On note \mathcal{D}_F le sous-groupe de F^* engendré par

$$\{ \pm 1, N_{\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}(\zeta_n) \cap F} (1 - \zeta_n^a) \mid n > 1, a \in \mathbb{Z}, (a, n) = 1 \}.$$

On définit le groupe des unités circulaires (resp. p -unités circulaires) comme étant l'intersection $C_F = \mathcal{D}_F \cap U_F$ (resp. $C_{F,p} = \mathcal{D}_F \cap U_{F,p}$) et l'on pose

$$\overline{C}_\infty(F) = \varprojlim_n \overline{C}_{F_n}, \quad \overline{C}_{p,\infty}(F) = \varprojlim_n \overline{C}_{F_n,p}$$

(voir [40]). Les suites exactes de Kummer

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(1) \rightarrow F_n^* \xrightarrow{D^n} F_n^* \rightarrow 0$$

donnent une application injective

$$\overline{U}_{p,\infty}(F) \rightarrow \varprojlim_n H^1(O_{F_n}[1/p], \mathbb{Z}_p(1)),$$

où $\overline{U}_{p,\infty}(F) = \varprojlim_n \overline{U}_{F_n,p}$. Soient

$$\overline{U}_{p,m,\infty}(F) = U_{p,\infty}(F) \otimes \mathbb{Z}_p(m-1) \quad \text{et} \quad \overline{C}_{p,m,\infty}(F) = \overline{C}_{p,\infty}(F) \otimes \mathbb{Z}_p(m-1).$$

En prenant le produit tensoriel par $\mathbb{Z}_p(m-1)$ et en passant aux coinvariants par rapport à $G_\infty = \text{Gal}(F_\infty/F)$ on obtient une application injective

$$\overline{U}_{p,m,\infty}(F)_{G_\infty} \hookrightarrow H_{p,m}(F) = H^1(O_F[1/p], \mathbb{Z}_p(m))$$

dont le conoyau est calculé dans [28], théorème 3.2. Cette application induit une flèche

$$\kappa_F : \overline{C}_{p,m,\infty}(F)_{G_\infty} \rightarrow H_{p,m}(F).$$

Soit $H_{p,m}^{\text{cycl}}(F) = \text{Im}(\kappa_F)$ (c'est le module noté $K_{2m-1}^{\text{cycl}}(F)$ dans [28]).

THÉORÈME A.2.2 (voir théorème 5.4 de [28]). – *On a la formule suivante*

$$(H_{p,m}(F) : H_{p,m}^{\text{cycl}}(F)) \simeq H^2(O_F[1/p], \mathbb{Z}_p(m))^{\mp} \# \ker \kappa_F,$$

où l'on prend la partie – (resp. +) si m est pair (resp. impair).

Démonstration. – La démonstration de ce théorème donnée dans [28] comportait les deux erreurs suivantes :

(i) L'application κ_F n'est pas toujours injective. Il est facile de voir que $\ker \kappa_F = 0$, si et seulement si le quotient de $\overline{C}_{p,\infty}(F)$ par sa Λ -torsion est Λ -libre. C'est vrai, en particulier, dans le cas cyclotomique [29] et dans le cas absolument semi-simple. Néanmoins, ce n'est pas vrai en général (voir [4]).

(ii) Soit $G = \text{Gal}(F(\zeta_p)/F \cap \mathbb{Q}^{(p)})$. Alors $G \simeq P \times \Delta$ où P est le p -groupe de Sylow de G et Δ est supplémentaire de P . Les corps $F(\zeta_p)$ et $\mathbb{Q}^{(p)}$ sont totalement disjoints sur K donc le groupe Δ opère sur F_∞ . Pour tout caractère $\psi \in X(\Delta)$ on note e_ψ l'idempotent correspondant et $\mathbb{Z}_p[\psi]$ l'anneau engendré par les valeurs de ψ . Si M est un $\mathbb{Z}_p[\Delta]$ -module quelconque, on pose $M^\psi = e_\psi(M \otimes \mathbb{Z}_p[\psi])$.

On a une suite exacte

$$0 \rightarrow \overline{U}_\infty(F)/\overline{C}_\infty(F) \rightarrow \mathcal{U}_\infty(F)/\overline{C}_\infty(F) \rightarrow \mathfrak{X}_\infty \rightarrow X_\infty \rightarrow 0$$

(voir, par exemple, [28], section 5). En prenant la ψ -partie de cette suite on obtient :

$$0 \rightarrow (\overline{\mathcal{U}}_\infty(F)/\overline{\mathcal{C}}_\infty(F))^\psi \rightarrow (\mathcal{U}_\infty(F)/\overline{\mathcal{C}}_\infty(F))^\psi \rightarrow (\mathfrak{X}_\infty)^\psi \rightarrow (X_\infty)^\psi \rightarrow 0.$$

La démonstration du théorème 5.4 de [28] utilise le résultat suivant. \square

THÉORÈME A.2.3 (théorème 5.2 de [28]). – *Pour tout $\psi \in X(\Delta)$ les $\Lambda[\psi]$ -modules $(\mathcal{U}_\infty/\overline{\mathcal{C}}_\infty)^\psi$ et $(\mathcal{X}_\infty)^\psi$ ont même série caractéristique.*

Démonstration. – La démonstration de ce dernier théorème donnée dans la thèse de Villemot [46] et citée dans [28] était incorrecte. Villemot considère des caractères quelconques de $\text{Gal}(F(\zeta_p)/F \cap \mathbb{Q}^{(p)})$, mais utilise une décomposition en “pseudo-idempotents” qui est manifestement erronée. Le cas semi-simple (i.e. $\psi \in X(\Delta)$) qu’on considère ici a été redémontré dans [3], théorème 3.1. \square

Remarquons que pour les caractères ψ du groupe G la structure du module $\mathcal{U}_\infty(F)^\psi/\overline{\mathcal{C}}_\infty(F)^\psi$ a été donnée par Tsuji [45] (voir aussi [20], qui tensorise par \mathbb{Q}_p).

A.3. Calcul du régulateur

La version cohomologique de la conjecture de Lichtenbaum, démontrée dans [28], théorème 6.4 comportait un facteur eulérien erroné $\mathcal{E}_m(F)$. L’erreur consistait à confondre $H_{2m-1}^{\text{cycl}}(F)$ modulo torsion avec le sous-module galoisien engendré par les éléments de Beilinson (voir [28], p. 715). Le facteur $\mathcal{E}_m(F)$ est compensé par l’indice relatif de ces deux réseaux dont le calcul a été fait dans [27] (qui permet aussi d’autres applications). Pour la commodité du lecteur, nous allons refaire ici ce calcul d’indice par une méthode différente.

A.3.1. Les éléments de Deligne–Soulé et de Beilinson. On fixe un système $(\zeta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de racines de l’unité telles que $\zeta_{nk}^k = \zeta_n$. Soit $N \in \mathbb{N}$ et soit $p \neq 2$ un nombre premier. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$c_m(\zeta_N)_n = \text{cor}_{\mathbb{Q}(\zeta_{Np^n})/\mathbb{Q}(\zeta_N)} [\delta_{Np^n}(1 - \zeta_{Np^n}) \otimes \zeta_{p^n}^{\otimes(m-1)}] \in H^1(\mathbb{Q}(\zeta_N), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(m))$$

où $\delta_{Np^n}(1 - \zeta_{Np^n})$ est l’image de $1 - \zeta_{Np^n}$ par l’application de Kummer

$$\mathbb{Q}(\zeta_{Np^n})^* \rightarrow H^1(\mathbb{Q}(\zeta_{Np^n}), \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}(1)).$$

Soit $c_{m,\infty}(\zeta_N) = \varprojlim c_m(\zeta_N)_n \in H^1(\mathbb{Q}(\zeta_N), \mathbb{Z}_p(m))$.

PROPOSITION A.3.2. – *Soit l un nombre premier. Alors*

$$\text{cor}_{\mathbb{Q}(\zeta_{Nl})/\mathbb{Q}(\zeta_N)} c_{m,\infty}(\zeta_{Nl}) = \begin{cases} (1 - l^{m-1} \text{Fr}_l^{-1})c_m(\zeta_N), & \text{si } (l, Np) = 1, \\ c_m(\zeta_N), & \text{si } l | Np. \end{cases}$$

Démonstration. – C’est un résultat bien connu. Voir, par exemple, [41] et [37], section 1.5. \square

A.3.3. On adopte les conventions et les notations suivantes. On fixe un corps abélien F de conducteur N . On note $D_{p,m}(\mathbb{Q}(\zeta_N))$ le $\mathbb{Z}_p[\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q})]$ -module de $H_{p,m}(\mathbb{Q}(\zeta_N))$ engendré par $c_m(\zeta_N)$ et l’on pose

$$D_{p,m}(F) = \text{Tr}_{\mathbb{Q}(\zeta_N)/F} D_{p,m}(\mathbb{Q}(\zeta_N)).$$

Alors $D_{p,m,\infty}(F) = \varprojlim D_{p,m}(F_n)$ est un $\mathbb{Z}_p[[G_\infty]]$ -module libre et $D_{p,m}(F) = D_{p,m,\infty}(F)_{G_\infty}$.

Pour tout nombre premier $l \neq p$, l'inverse du Frobenius Fr_l^{-1} opère sur les racines p -ièmes de l'unité par $\text{Fr}_l^{-1}(\zeta_{p^n}) = \zeta_{p^n}^{l^{-1}}$. On note $P_l(X) = (1 + X)^{a_l}$ l'élément de Λ qui correspond à Fr_l^{-1} .

Pour tout caractère ψ de $\text{Gal}(F/K)$ on pose

$$\mathcal{E}_{\psi,m}(F) = \prod_{\widehat{\psi}} \prod_{l|N} (1 - \widehat{\psi}^{-1}(l)l^{m-1})$$

où $\widehat{\psi}$ parcourt tous les caractères de $\text{Gal}(F/\mathbb{Q})$ prolongeant ψ .

On fixe une extension E de \mathbb{Q}_p contenant les valeurs de tous les caractères ψ de $\text{Gal}(F/K)$ et pour tout $\text{Gal}(F/K)$ -module sans \mathbb{Z}_p -torsion M on pose $M^\psi = e_\psi(M \otimes O_E)$.

On a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_p(m) \rightarrow \overline{\mathcal{C}}_{p,m,\infty}(F) \rightarrow \mathcal{C}_{p,m,\infty}(F) \rightarrow 0,$$

où $\mathcal{C}_{p,m,\infty}(F)$ est sans Λ -torsion.

LEMME A.3.4. – Soit ψ un caractère de $\text{Gal}(F/K)$ vérifiant $\psi(-1) = (-1)^{m-1}$. Alors

$$\mathcal{C}_{p,m,\infty}^\psi(F)_{G_\infty} = |\mathcal{E}_{\psi,m}(F)|_p^{-[E:\mathbb{Q}_p]} D_{p,m}^\psi(F).$$

Démonstration. – Montrons d'abord qu'il existe un corps F' linéairement disjoint de K sur \mathbb{Q} et tel que $F = F'K$. Si $(p, N) = 1$ on prend $F' = F$. Si $p|N$, on a $N = N'p^t$ avec $t \geq 1$. Le même argument que dans la section 2.2.3 montre que $\mathbb{Q}(\zeta_N) \cap \mathbb{Q}^{(p)} = K$ et donc que $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ est le compositum des corps K et $\mathbb{Q}(\zeta_{pN'})$, qui sont linéairement disjoints sur \mathbb{Q} . On prend pour F' la partie de $\mathbb{Q}(\zeta_{pN'})$ fixée par $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/F)$.

Alors $\mathcal{C}_{p,m,\infty}(F)$ et $D_{p,m,\infty}(F)$ ont des structures naturelles de $\mathbb{Z}_p[\text{Gal}(F'(\zeta_p)/\mathbb{Q})][[\Gamma]]$ -modules et nous sommes dans la situation étudiée dans [45]. On peut considérer ψ comme un caractère de $\text{Gal}(F'(\zeta_p)/\mathbb{Q})$. Soit ω le caractère de Teichmüller du groupe $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q})$. Il est clair que

$$e_\psi(\mathcal{C}_{p,m,\infty}(F) \otimes O_E) = e_{\psi\omega^{1-m}}(\mathcal{C}_{p,\infty}(F) \otimes O_E)(m-1),$$

où le caractère $\psi\omega^{1-m}$ est pair. On sait ([45], lemma 6.2) que ce module est $O_E[[\Gamma]]$ -libre, engendré par $e_\psi(c_{m,\infty}(\zeta_{f'}))$, où f' désigne la partie du conducteur de ψ première à p . D'autre part, le module $D_{p,m,\infty}^\psi(F)$ est engendré sur $O_E[[\Gamma]]$ par l'élément

$$\prod_{\substack{l|N \\ l \neq p}} (1 - \psi^{-1}(l)P_l(X)l^{m-1})e_\psi(c_{m,\infty}(\zeta_{f'})).$$

Rappelons la formule bien connue suivante. Soit A un $\Lambda \simeq \mathbb{Z}_p[[X]]$ -module libre de rang 1 et soit B un sous-module de A engendré par un polynôme $G(X)$. Alors

$$(A_{\Gamma_n} : B_{\Gamma_n}) = \left| \prod_{\zeta^{p^n}=1} G(\zeta - 1) \right|_p^{-1}.$$

En appliquant cette formule aux modules $\mathcal{C}_{p,m,\infty}^\psi(F)$ et $D_{p,m,\infty}^\psi(F)$ et en prenant $\Gamma_n = \Gamma_F$, on obtient le lemme. \square

LEMME A.3.5. – On a la formule suivante

$$\left(\bigoplus_{\psi} \mathcal{C}_{p,m,\infty}^{\psi}(F)_{G_{\infty}} : \bigoplus_{\psi} D_{p,m}^{\psi}(F) \right) = (\mathcal{C}_{p,m,\infty}(F)_{G_{\infty}} \otimes O_E : D_{p,m}(F) \otimes O_E),$$

où ψ parcourt tous les caractères de $\text{Gal}(F/K)$ vérifiant $\psi(-1) = (-1)^{m-1}$.

Démonstration. – Remarquons que si $\psi(-1) = (-1)^m$, alors $\mathcal{C}_{p,m,\infty}^{\psi}(F) = 0$.

Soit p^M la plus grande puissance de p divisant l'ordre de $\text{Gal}(F/K)$. Considérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & p^M(\bigoplus_{\psi} D_{p,m,\infty}^{\psi}(F)) & \longrightarrow & p^M(\bigoplus_{\psi} \mathcal{C}_{p,m,\infty}^{\psi}(F)) & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & D_{p,m,\infty}(F)_{\Delta_F} \otimes O_E & \longrightarrow & \mathcal{C}_{p,m,\infty}(F)_{\Delta_F} \otimes O_E & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

où $\Delta_F = \text{Gal}(F(\zeta_p)/F)$. Le raisonnement suivant a été déjà utilisé par Burns et Greither pour montrer la nullité de l'invariant μ de $(\overline{U}_{\infty}/D_{p,1,\infty})^{\psi}$ dans le cas cyclotomique (voir [9], p. 25). Dans la démonstration du lemme A.3.4 on a vu que $D_{p,m,\infty}^{\psi}(F)$ est un sous-module de $\mathcal{C}_{p,m,\infty}^{\psi}(F)$ engendré par le polynôme

$$\prod_{\substack{l|N \\ l \neq p}} (1 - \psi^{-1}(l)P_l(X)l^{m-1}).$$

Donc A a un invariant μ nul. D'autre part, on sait (voir [20], lemma 2.3) que $\mathcal{C}_{p,m,\infty}(F)$ est engendré en tant que module galoisien par les éléments $c_{m,\infty}(\zeta_k)$, $k|N$. Alors le même raisonnement montre que B a aussi un invariant μ nul.

Comme $\text{coker } f$ et $\text{coker } g$ sont tués par une puissance de p , ils ont un invariant λ nul. Le diagramme ci-dessus montre alors que $\text{coker } f$ et $\text{coker } g$ ont même série caractéristique.

On considère maintenant le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & (\text{coker } f)_{\Gamma_F} & \longrightarrow & p^M(\bigoplus_{\psi} D_{p,m,\infty}^{\psi}(F)_{\Gamma_F}) & \longrightarrow & D_{p,m,\infty}(F)_{G_{\infty}} \otimes O_E & \longrightarrow & (\text{coker } f)_{\Gamma_F} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & (\text{coker } g)_{\Gamma_F} & \longrightarrow & p^M(\bigoplus_{\psi} \mathcal{C}_{p,m,\infty}^{\psi}(F)_{\Gamma_F}) & \longrightarrow & \mathcal{C}_{p,m,\infty}(F)_{G_{\infty}} \otimes O_E & \longrightarrow & (\text{coker } g)_{\Gamma_F} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & A_{\Gamma_F} & \longrightarrow & B_{\Gamma_F} & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & 0 & & & & \end{array}$$

Comme $D_{p,m,\infty}(F)$ est Λ -libre, les colonnes verticales sont exactes. Le même argument montre que $p^M \mathcal{C}_{p,m,\infty}^{\psi}(F)_{\Gamma_F}$ s'injecte dans $\mathcal{C}_{p,m,\infty}(F)_{G_{\infty}} \otimes O_E$, donc

$$\text{coker}(f)_{\Gamma_F} = \text{coker}(g)_{\Gamma_F} = 0.$$

On sait que si M est un Λ -module de torsion de série caractéristique G , alors

$$\#M_{\Gamma_n} / \#M^{\Gamma_n} = \left| \prod_{\zeta^{p^n}=1} G(\zeta - 1) \right|_p^{-1}.$$

En appliquant cette formule à $\text{coker } f$ et à $\text{coker } g$ on obtient

$$\text{coker}(f)_{\Gamma_F} = \text{coker}(g)_{\Gamma_F}.$$

Par chasse dans le diagramme on en déduit que $\#A_{\Gamma_F} = \#B_{\Gamma_F}$ d'où le lemme. \square

Pour tout \mathbb{Z}_p -module M on pose $\widetilde{M} = M/\mathbb{Z}_p$ -torsion. Soit

$$\mathcal{E}_m(F) = \prod_{\psi} \mathcal{E}_{\psi,m}(F).$$

PROPOSITION A.3.6. – On a

$$(\widetilde{H}_{p,m}(F) : D_{p,m}(F)) \stackrel{p}{\sim} \mathcal{E}_m(F) \# H^2(O_F[1/p], \mathbb{Z}_p(m))^{\mp},$$

où l'on prend la partie – (resp. +) si m est pair (resp. impair).

Démonstration. – Comme $D_{p,m}(F) = D_{p,m,\infty}(F)_{G_\infty}$, on a

$$(H_{p,m}^{\text{cycl}}(F) : D_{p,m}(F)) = \frac{(\overline{C}_{p,m,\infty}(F)_{G_\infty} : D_{p,m}(F))}{\# \ker \kappa_F}.$$

Les lemmes A.3.4 et A.3.5 montrent que

$$(\overline{C}_{p,m,\infty}(F)_{G_\infty} : D_{p,m}(F)) = |\mathcal{E}_m(F)|_p^{-1}.$$

Comme $H_{p,m}(F)$ et $H_{p,m}^{\text{cycl}}(F)$ ont même \mathbb{Z}_p -torsion, la proposition résulte maintenant du théorème A.2.2. \square

Pour tout entier $m \geq 1$ on pose

$$\text{Li}_m(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^m}.$$

Cette série converge si $|z| < 1$ et admet un prolongement analytique sur $\mathbb{C} \setminus [1; \infty)$. On note que si $m \geq 2$, alors $\text{Li}_m(z)$ converge si $|z| = 1$. Pour un caractère de Dirichlet

$$\psi : \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q}) \simeq (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \rightarrow \mathbb{C}^*$$

on pose

$$\ell_m(\psi, \zeta_N) = \sum_{g \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q})} \psi(g) \text{Li}_m(\zeta_N^g).$$

PROPOSITION A.3.7. – (i) Soit ψ un caractère de conducteur f_ψ et soit $\tilde{\psi} : (\mathbb{Z}/f_\psi\mathbb{Z})^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ le caractère primitif correspondant. Alors

$$\prod_{l|N} (1 - \tilde{\psi}(l)l^{m-1}) f_\psi^{m-1} \ell_m(\tilde{\psi}, \zeta_N) = N^{m-1} \ell_m(\psi, \zeta_N).$$

(ii) Si ψ est un caractère primitif modulo N vérifiant $\psi(-1) = (-1)^{m-1}$, alors

$$L'(1 - m, \psi) = \frac{1}{2} \frac{(m-1)!}{(2\pi i)^{m-1}} N^{m-1} \ell_m(\psi, \zeta_N).$$

Démonstration. – Voir [21,33].

On rappelle que $H^1_{\mathcal{M}}(\mathbb{Q}(\zeta_N), \mathbb{Q}(m)) = K_{2m-1}(\mathbb{Q}(\zeta_N)) \otimes \mathbb{Q}$. Dans [2] Beilinson construit des éléments $B_m(\zeta_N) \in H^1_{\mathcal{M}}(F, \mathbb{Q}(m))$ vérifiant les propriétés remarquables suivantes.

THÉORÈME A.3.8 (Beilinson, Huber–Wildeshaus). – (i) L'application régulateur

$$r_{\infty,m} : H^1_{\mathcal{M}}(\mathbb{Q}(\zeta_N), \mathbb{Q}(m)) \rightarrow \mathbb{R}(m-1)^+_{\mathbb{B}}$$

envoie $B_m(\zeta_N)$ sur

$$-N^{m-1}(m-1)! \sum_{g \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_N)/\mathbb{Q})} \text{Li}_m(\zeta_N^g) g.$$

(ii) Soit

$$r_{p,m} : H^1_{\mathcal{M}}(\mathbb{Q}(\zeta_N), \mathbb{Q}(m)) \rightarrow H^1(\mathbb{Q}(\zeta_N), \mathbb{Q}_p(m))$$

le régulateur p -adique. Alors

$$r_{p,m}(B_m(\zeta_N)) = \tilde{c}_m(\zeta_N),$$

où $\tilde{c}_m(\zeta_N) = c_m(\zeta_N)$ si $p|N$ et $\tilde{c}_m(\zeta_N) = (1 - p^{m-1} \text{Fr}_p^{-1})c_m(\zeta_N)$ sinon.

Démonstration. – Voir [2,23,33].

THÉORÈME A.3.9. – Soit F un corps abélien. Alors pour tout $m \geq 2$ on a

$$\zeta_F^*(1 - m) \stackrel{2}{=} \pm \frac{\#K_{2m-2}^{\text{coh}}(F)}{w_m(F)} R_m(F).$$

Démonstration. – Nous répétons les arguments de [28], pp. 709–715. Soit N le conducteur de F . On note $B_m(\mathbb{Q}(\zeta_N))$ le sous-module galoisien de $H^1_{\mathcal{M}}(\mathbb{Q}(\zeta_N), \mathbb{Q}(m))$ engendré par $B_m(\zeta_N)$ et $B_m(F)$ l'image de ce module par la corestriction dans $H^1_{\mathcal{M}}(F, \mathbb{Q}(m))$.

Il résulte du théorème A.3.8 que

$$\text{covol}(r_{\infty,m}(B_m(F))) = \mathcal{E}_m(F) \prod_{\psi(-1)=(-1)^{m-1}} \frac{(m-1)!}{(2\pi i)^{m-1}} f_\psi^{m-1} \ell_m(\psi, \zeta_{f_\psi}).$$

Alors la proposition A.3.7 donne :

$$\mathcal{E}_m(F) \prod_{\psi(-1)=(-1)^{m-1}} L'(1 - m, \psi) = \text{covol}(r_{\infty,m}(B_m(F))).$$

D'autre part, on a

$$\prod_{\psi(-1)=(-1)^m} L'(1-m, \psi) = \frac{\prod_p \# H_{\text{ét}}^2(O_F[1/p], \mathbb{Z}_p(m))^{\pm}}{w_{1-m}(F)}$$

(on prend la partie + (resp. -) si m est pair (resp. impair), voir [28], théorème 6.3 et p. 710).
Donc

$$\mathcal{E}_m(F)_{\zeta_F^*}(1-m) \stackrel{2}{=} \frac{\# K_{2m-2}^{\text{coh}}(F)^{\pm}}{w_{1-m}(F)} \text{covol}(r_{\infty, m}(B_m(F))).$$

Comme

$$R_m(F) = \frac{\text{covol}(r_{\infty, m}(B_m(F)))}{(\tilde{K}_{2m-1}(F) : B_m(F))},$$

il suffit de calculer l'indice $(\tilde{K}_{2m-1}(F) : B_m(F))$. Le théorème A.3.8(ii) donne

$$(\tilde{K}_{2m-1}(F) : B_m(F)) \stackrel{p}{\sim} (\tilde{H}_{p, m}(F) : D_{p, m}(F)).$$

Alors, par la proposition A.3.6 on a

$$(\tilde{K}_{2m-1}(F) : B_m(F)) \stackrel{2}{=} \mathcal{E}_m(F) \# K_{2m-2}^{\text{coh}}(F)^{\mp}.$$

On en déduit le théorème. \square

Remerciements

Les auteurs remercient le rapporteur, dont les suggestions ont permis de simplifier la démonstration du théorème 2.1. Une partie de ce travail a été faite alors que l'un des deux auteurs (D. Benois) était maître de conférences invité à Besançon ; celui-ci tient à remercier l'Université de Franche-Comté pour son hospitalité et son soutien financier.

RÉFÉRENCES

- [1] BANASZAK G., Generalization of the Moore exact sequence and the wild kernel for higher K -groups, *Compositio Math.* **86** (3) (1993) 281–305.
- [2] BEILINSON A., *Polylogarithms and cyclotomic elements*, Preprint, 1990.
- [3] BELLIARD J.-R., NGUYEN QUANG DO T., Formules de classes pour les corps abéliens réels, *Ann. Inst. Fourier* **51** (4) (2001) 903–937.
- [4] BELLIARD J.-R., NGUYEN QUANG DO T., *Modified circular p -units and annihilation of real classes*, prépublication, 2001.
- [5] BENOIS D., BURNS D., travail en préparation.
- [6] BOREL A., Cohomologie de SL_n et valeurs de fonctions zêta, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **417** (1974) 613–636.
- [7] BLOCH S., KATO K., L -functions and Tamagawa numbers of motives, *Grothendieck Festschrift I* (1990) 333–400.
- [8] BURNS D., FLACH M., Motivic L -functions and Galois module structure, *Math. Ann.* **305** (1996) 65–102.
- [9] BURNS D., GREITHER C., *On the equivariant Tamagawa number conjecture for Tate motives*, Preprint, 2000.

- [10] BEILINSON A., MACPHERSON R., SCHECHTMAN V., Notes on motivic cohomology, *Duke Math. J.* **54** (1987) 679–710.
- [11] COLEMAN R., Local units modulo circular units, *Proc. Amer. Math. Soc.* **89** (1983) 1–7.
- [12] DELIGNE P., Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points, in: *Galois Groups Over \mathbb{Q}* , in: MSRI Publications, Vol. **16**, Springer, 1989, pp. 79–297.
- [13] DWYER W.-G., FRIEDLANDER E.M., Algebraic and étale K -theory, *Trans. Amer. Math. Soc.* **292** (1985) 247–280.
- [14] FLACH M., A generalization of the Cassels–Tate pairing, *J. Reine Angew. Math.* **412** (1990) 113–127.
- [15] FONTAINE J.-M., Sur certains types de représentations p -adiques du groupe de Galois d’un corps local ; construction d’un anneau de Barsotti–Tate, *Ann. of Math.* **115** (1982) 529–577.
- [16] FONTAINE J.-M., Le corps des périodes p -adiques, *Astérisque* **223** (1994) 59–102.
- [17] FONTAINE J.-M., Valeurs spéciales de fonctions L des motifs, *Séminaire Bourbaki, exposé 751*, *Astérisque* **206** (1992) 205–249.
- [18] FONTAINE J.-M., PERRIN-RIOU B., Autour des conjectures de Bloch et Kato ; cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions L , in: *Motives*, in: Proc. Symp. in Pure Math., Vol. **55**, 1994, pp. 599–706.
- [19] GILLARD R., Unité cyclotomiques, unités semi-locales et \mathbb{Z}_l -extensions, *Ann. Inst. Fourier* **29** (1) (1979) 49–79.
- [20] GREITHER C., Class groups of abelian fields and the main conjecture, *Ann. Inst. Fourier* **42** (1992) 449–499.
- [21] GROSS B.H., *On the values of Artin L -functions*, Preprint, 1980.
- [22] HUBER A., KINGS G., *Bloch–Kato conjecture and main conjecture of Iwasawa theory for Dirichlet characters*, Preprint, 2000.
- [23] HUBER A., WILDESHAUS J., Classical motivic polylogarithm according to Beilinson and Deligne, *Doc. Math. J. DMV3* (1998) 27–133.
- [24] KAHN B., On the Lichtenbaum–Quillen conjecture, in: *Algebraic K -theory and Algebraic Topology*, in: NATO Proc. Lake Louise, Vol. **407**, 1993, pp. 147–166.
- [25] KATO K., Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse–Weil L -functions via B_{dR} . Part I, in: *Lecture Notes in Math.*, Vol. **1553**, Springer, 1993, pp. 50–163.
- [26] KATO K., *Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse–Weil L -functions via B_{dR} . Part II*, Preprint, 1993.
- [27] KOLSTER M., NGUYEN QUANG DO T., *Universal distribution lattices for abelian number fields*, Preprint, 2000.
- [28] KOLSTER M., NGUYEN QUANG DO T., FLECKINGER V., Twisted S -units, p -adic class number formulas and the Lichtenbaum conjectures, *Duke Math. J.* **84** (1996) 679–717.
- [29] KUZMIN L.V., On formulae for the class number of real abelian fields, *Russian Math. Izv.* **60** (4) (1996) 695–761.
- [30] LEOPOLDT H.-W., Über die Hauptordnung der ganzen Elemente eines abelschen Zahlkörpers, *J. Reine Angew. Math.* **201** (1959) 119–149.
- [31] LETTL G., Relative Galois module structure of integers of local abelian fields, *Acta Arithmetica* **85** (3) (1998) 235–247.
- [32] MILNE J.S., *Arithmetic Duality Theorems*, in: Perspectives in Mathematics, Vol. **1**, Academic Press, Boston, 1986.
- [33] NEUKIRCH J., The Beilinson conjecture for algebraic number fields, in: *Beilinson’s Conjectures on Special Values of L -functions*, in: Perspectives in Math., Vol. **4**, Academic Press, 1988, pp. 193–247.
- [34] NGUYEN QUANG DO T., Analogues supérieurs du noyau sauvage, *J. Théorie des Nombres Bordeaux* **4** (1992) 263–271.
- [35] PERRIN-RIOU B., Théorie d’Iwasawa des représentations p -adiques sur un corps local, *Invent. Math.* **115** (1994) 81–149.
- [36] PERRIN-RIOU B., Fonctions L p -adiques, in: *Proc. Int. Congress of Math.*, Birkhäuser Verlag, Zürich, 1995, pp. 400–410.
- [37] PERRIN-RIOU B., Systèmes d’Euler p -adiques et théorie d’Iwasawa, *Annales de l’Institut Fourier* **48** (5) (1998) 1231–1307.

- [38] SCHNEIDER P., Über gewisse Galoiscohomologiegruppen, *Math. Zeit.* **168** (1979) 181–205.
- [39] SCHNEIDER P., Introduction to the Beilinson conjectures, in: *Beilinson's Conjectures on Special Values of L-functions*, in: Perspectives in Math., Vol. **4**, Academic Press, 1988, pp. 1–35.
- [40] SINNOTT W., On the Stickelberger ideal and the circular units of an abelian field, *Invent. Math.* **62** (1981) 181–234.
- [41] SOLOMON D., On a construction of p -units in abelian fields, *Invent. Math.* **109** (1992) 329–350.
- [42] SOULÉ C., K -théorie des anneaux d'entiers de corps de nombres et cohomologie étale, *Invent. Math.* **55** (1979) 251–295.
- [43] SOULÉ C., Régulateurs, *Sém. Bourbaki (1984/85), exp. n° 644, Astérisque* **133–134** (1986) 237–253.
- [44] TATE J., Relations between K_2 and Galois cohomology, *Invent. Math.* **36** (1976) 257–274.
- [45] TSUJI T., Semi-local units modulo cyclotomic units, *J. Number Theory* **46** (1999) 158–178.
- [46] VILLEMOT L., *Étude du quotient des unités semi-locales par les unités cyclotomiques dans les \mathbb{Z}_p -extensions des corps de nombres abéliens réels*, thèse, Orsay, 1981.
- [47] WASHINGTON L.C., *Introduction to the Theory of Cyclotomic Fields*, in: GTM, Vol. **85**, Springer, 1982.

(Manuscrit reçu le 30 novembre 2000 ;
accepté, après révision, le 10 décembre 2001.)

Denis BENOIS
Institut de Mathématiques,
Université Bordeaux I,
351, cours de la Libération,
33405, Talence, France
E-mail : benois@math.u-bordeaux.fr

Thong NGUYEN QUANG DO
Laboratoire de Mathématiques,
Université de Franche-Comté,
16, route de Gray,
25030, Besançon, France
E-mail : nguyen@math.univ-fcomte.fr