

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

CHRISTOPHE BREUIL

Construction de représentations p -adiques semi-stables

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 31, n° 3 (1998), p. 281-327

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1998_4_31_3_281_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONSTRUCTION DE REPRÉSENTATIONS p -ADIQUES SEMI-STABLES

PAR CHRISTOPHE BREUIL

RÉSUMÉ. – Le but de ce travail est de généraliser au cas semi-stable la théorie cristalline de Fontaine-Laffaille. Soit k un corps parfait de caractéristique $p > 0$, W l’anneau des vecteurs de Witt de k , $K_0 = Fr(W)$ et $S = \widehat{W\langle u \rangle}$ le complété p -adique de la P.D. algèbre polynomiale. On construit une catégorie abélienne de S -modules de p -torsion qui admet les mêmes objets simples que la catégorie $\underline{MF}_{tor}^{f,p-2}$ de Fontaine-Laffaille, et un foncteur exact et pleinement fidèle de cette catégorie dans la catégorie des représentations p -adiques de longueur finie de $Gal(\overline{K}_0/K_0)$. On définit des S -modules libres “fortement divisibles” et on montre, en utilisant la théorie de torsion précédente, qu’ils permettent de construire des représentations p -adiques semi-stables. En exhibant de tels modules en dimension 2, on construit toutes les représentations p -adiques semi-stables de dimension 2 dont la différence des poids de Hodge-Tate n’excède pas $p - 2$. © Elsevier, Paris

ABSTRACT. – The aim of this work is to generalize to the semi-stable setting the Fontaine-Laffaille crystalline theory. Let k be a perfect field of characteristic $p > 0$, W the Witt vectors in k , $K_0 = Fr(W)$ and $S = \widehat{W\langle u \rangle}$ the p -adic completion of the P.D. polynomial algebra. We define a category of S -modules with p -torsion and show it is abelian and has the same simple objects as Fontaine-Laffaille’s $\underline{MF}_{tor}^{f,p-2}$ category. We define an exact and fully faithful functor from this category to the category of p -adic representations of $Gal(\overline{K}_0/K_0)$ of finite length. We define “strongly divisible” free S -modules and show how one can build p -adic semi-stable representations with them, using the previous torsion theory. By finding strongly divisible S -modules in dimension 2, we build all the dimension 2 p -adic semi-stable representations with differences in Hodge-Tate weights not exceeding $p - 2$. © Elsevier, Paris

Sommaire

1. Introduction	282
2. Des catégories abéliennes	284
2.1. Définition des catégories	284
2.2. Étude en caractéristique p	286
2.3. Preuve du théorème	291
2.4. Sur les objets simples de \underline{M}^r	294
3. Un foncteur pleinement fidèle	295
3.1. Le foncteur V_{st}	296
3.2. Exactitude et fidélité	299
3.3. Pleine fidélité	302
4. Construction de représentations semi-stables	308
4.1. Des représentations semi-stables	308

4.2. Des (ϕ, N) -modules filtrés admissibles	310
4.3. Les (ϕ, N) -modules filtrés faiblement admissibles	311
5. Le cas naïf	312
6. Le cas de dimension 2	313
6.1. Les (ϕ, N) -modules filtrés faiblement admissibles de dimension 2 et leur S_{K_0} -module associé	314
6.2. Réseaux fortement divisibles	316
6.3. Les exposants de l'inertie modérée	323
A Modules fortement divisibles et modules faiblement admissibles	324

1. Introduction

Dans cet article, k est un corps parfait de caractéristique $p > 0$, $W = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt et $K_0 = \text{Frac}(W)$. On note \bar{K}_0 une clôture algébrique de K_0 , $\mathcal{O}_{\bar{K}_0}$ l'anneau des entiers, $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ son complété p -adique, $\mathbb{C}_p = \text{Frac}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p})$ et $G = \text{Gal}(\bar{K}_0/K_0)$.

Pour construire des représentations cristallines de G , on connaît essentiellement deux moyens : le premier est de prendre la cohomologie étale d'une variété propre et lisse sur K_0 à bonne réduction (conjecture C_{cris} de [Fo4], voir [Fa1]), le deuxième est d'utiliser la théorie de Fontaine-Laffaille ([FL]), c'est-à-dire de construire des représentations cristallines à partir de W -modules fortement divisibles. L'avantage du premier est (entre autre) qu'on obtient des représentations cristallines sans restriction sur les poids de Hodge-Tate. L'avantage du second est qu'il permet de définir une théorie entière, c'est-à-dire une catégorie abélienne de représentations de longueur finie de G . Les représentations cristallines sont alors construites par passage à la limite à partir d'objets de cette catégorie. En outre, par un résultat de Laffaille ([La]), on obtient ainsi toutes les représentations cristallines à poids de Hodge-Tate compris dans un intervalle de longueur ne dépassant pas $p - 1$.

Après l'introduction par Fontaine des représentations semi-stables de G (qui contiennent les représentations cristallines, voir [Fo2]), il était tentant d'essayer de généraliser les deux résultats précédents. Le premier a été obtenu par Kato et Tsuji (conjecture C_{st} de Fontaine dans [II], voir [Ka] et [Ts]). Sur le second, on ne disposait jusqu'à présent que des résultats partiels de Faltings ([Fa2],5). Nous proposons dans cet article une théorie entière "semi-stable" qui généralise la théorie de Fontaine-Laffaille, c'est-à-dire nous définissons une catégorie abélienne de représentations de G de longueur finie, grâce à laquelle nous construisons, par passage à la limite, des représentations semi-stables de G . Nous montrons qu'en dimension 2, on obtient bien ainsi toutes les représentations semi-stables à poids de Hodge-Tate compris dans un intervalle de longueur ne dépassant pas $p - 2$. Nous espérons qu'il en est de même en dimension supérieure. Par ailleurs, cette théorie a également des applications à la géométrie (voir [Br3]).

Rentrons un peu plus dans les détails de l'article :

En 2, nous introduisons diverses catégories de modules de p -torsion sur un certain anneau $W\langle u \rangle$ (complété p -adique de l'algèbre polynomiale aux puissances divisées en l'indéterminée u). L'idée de considérer un tel anneau est venue des travaux de Kato ([Ka])

sur la cohomologie étale des variétés algébriques à réduction semi-stable. Il y est apparue une certaine algèbre noté ici \widehat{B}_{st}^+ , munie d'un Frobenius, d'un opérateur de monodromie, d'une action de G , d'une filtration vérifiant le critère de transversalité de Griffiths avec la monodromie, et telle que $\widehat{B}_{st}^+ = K_0 \otimes_W W \langle u \rangle$. Dans ([Fa2], 3 et 5), Faltings considère déjà de tels modules. Cette partie diffère de ([Fa2], 5) essentiellement par trois points :

1) Nous travaillons avec \widehat{B}_{st}^+ et pas B_{cris}^+ , ce qui nous permet de conserver l'opérateur de monodromie dans la construction des représentations galoisiennes de torsion.

2) Nous introduisons une catégorie, notée \mathcal{M}^{p-2} , de $W \langle u \rangle$ -modules de p -torsion différente de celle de ([Fa2], 5). En particulier, nous n'avons (apparemment) pas la même notion de suite exacte.

3) Nous montrons que cette catégorie est abélienne.

Nous montrons également que cette catégorie admet les mêmes objets simples que dans la théorie de Fontaine-Laffaille.

En 3, nous définissons un foncteur exact et fidèle de \mathcal{M}^{p-2} dans la catégorie des représentations de longueur finie de G . Nous montrons qu'il est pleinement fidèle en adaptant la preuve de Faltings ([Fa2], 5.2).

En 4, nous définissons certains $W \langle u \rangle$ -modules libres "fortement divisibles" qui, par les résultats de 3 et en inversant p , permettent de retomber du côté galoisien, dans la catégorie des représentations semi-stables de G , et du côté module, dans la catégorie des modules filtrés admissibles de Fontaine. L'existence de tels réseaux "fortement divisibles" entraîne que la conjecture de Serre est vérifiée sur les exposants de l'action de l'inertie modérée sur la semi-simplifiée modulo p de la représentation galoisienne correspondante (i.e. ces exposants sont "bornés").

En 5, nous traitons le cas facile où la transversalité de Griffiths est vérifiée au niveau des K_0 -modules filtrés de Fontaine (cas dit "naïf").

En 6, nous traitons complètement le cas de dimension 2 qui, non seulement donne un exemple concret non trivial, mais aussi présente l'avantage d'être lié aux formes modulaires de la façon suivante. Soit f une forme modulaire "nouvelle" à coefficients de Fourier dans \mathbf{Q}_p : on sait lui associer depuis Deligne une représentation galoisienne de $Gal(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ sur un \mathbf{Q}_p -espace vectoriel de dimension 2. Pour certaines f sur $\Gamma_0(N)$ de poids pair et telles que p divise exactement N (voir [Ma2]), la restriction de cette représentation à un sous-groupe de décomposition en p est semi-stable par les résultats de Tsuji ([Ts]) et non cristalline ([Sa]) : c'est une des représentations construites ici. D'autre part, Fontaine et Mazur conjecturent essentiellement que toute \mathbf{Q}_p -représentation de $Gal(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ absolument irréductible de dimension 2 qui est "géométrique" (i.e. en gros potentiellement semi-stable en chaque place non archimédienne) provient des formes modulaires nouvelles ([FM], (f)). Si la potentielle semi-stabilité est automatique quand on se restreint à $Gal(\overline{\mathbf{Q}}_l/\mathbf{Q}_l)$ avec $l \neq p$, elle est loin d'être toujours vraie en $l = p$, d'où l'intérêt de connaître toutes les représentations p -adiques potentiellement semi-stables de dimension 2 (elles sont conjecturalement données dans [FM]) et donc, dans un premier temps, celles qui sont déjà semi-stables. Grâce à des $W \langle u \rangle$ -réseaux "fortement divisibles", nous construisons ici toutes les représentations p -adiques semi-stables de dimension 2 à poids de Hodge-Tate dans un intervalle de longueur ne dépassant pas $p - 2$. Nous obtenons d'autre

part modulo p des représentations galoisiennes qui présentent la curiosité de ressembler à la réduction modulo p de représentations cristallines, mais à poids de Hodge-Tate différents. Nous calculons ces poids, c'est-à-dire les exposants de l'action de l'inertie modérée sur les semi-simplifiées modulo p des représentations.

Je remercie M. Gros et B. Edixhoven pour les discussions que nous avons eues ensemble et l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail. C'est J.-M. Fontaine qui m'a proposé de regarder les représentations p -adiques semi-stables de dimension 2, à la suite de son article avec B. Mazur ([FM]). Il m'a en outre dispensé sans compter son soutien et ses conseils. Je lui exprime ici ma plus vive reconnaissance.

Enfin, je remercie chaleureusement le referee pour son travail de très grande qualité, pour ses nombreuses remarques constructives et pertinentes, pour m'avoir indiqué en plusieurs endroits des preuves alternatives et pour m'avoir signalé la très jolie preuve du théorème (A.4) de l'appendice.

2. Des catégories abéliennes

Dans cette section, on introduit un anneau S et on construit certaines catégories abéliennes $\underline{\mathcal{M}}_0^r$ et $\underline{\mathcal{M}}^r$ de S -modules de torsion pour r entier entre 0 et $p-2$. On montre que les objets simples de $\underline{\mathcal{M}}^r$ sont ceux de la catégorie $\underline{MF}_{tor}^{f,r}$ de ([FL], 3.2).

2.1. Définition des catégories

On se fixe un entier r quelconque entre 0 et $p-2$ et on introduit deux sortes de catégories qui dépendent de r : les unes avec un opérateur de monodromie, les autres sans. Les "vraies" catégories que nous utiliserons par la suite (voir 3) sont celles munies d'un opérateur de monodromie. Cependant, cet opérateur n'intervient pas dans le fait que certaines de ces catégories sont abéliennes.

2.1.1.

Soit S le complété p -adique de la P.D. algèbre polynomiale à une indéterminée $W < u > : S$ s'identifie à la sous W -algèbre de $K_0[[u]]$ définie par les séries formelles $\{\sum_{i=0}^{\infty} z_i \frac{u^i}{i!}, z_i \in W, \lim_{i \rightarrow \infty} z_i = 0\}$. Soit $v = u - p$, on a aussi $S = \{\sum_{i=0}^{\infty} z_i \frac{v^i}{i!}, z_i \in W, \lim_{i \rightarrow \infty} z_i = 0\}$: on munit S d'une filtration positive décroissante $Fil^i S = v^i \cdot K_0[[v]] \cap S, i \in \mathbf{N}$. On définit sur S un opérateur de monodromie N comme l'unique dérivation (de séries formelles) W -linéaire telle que $N(u) = -u$ et un opérateur de Frobenius ϕ, W -semi-linéaire, par $\phi(u) = u^p$ (on vérifie facilement qu'on reste bien dans S). On a $N\phi = p\phi N, N(Fil^i S) \subset Fil^{i-1} S$ et pour $0 \leq i \leq p-1, \phi(Fil^i S) \subset p^i S$. On note alors (pour $0 \leq i \leq p-1$) $\phi_i = \frac{\phi}{p^i}|_{Fil^i S}$ et $c = \phi_1(v) = \frac{v^p}{p} - 1 = (p-1)! \gamma_p(u) - 1 \in S^*$.

2.1.2.

Soit $\underline{\mathcal{M}}_0^r$ la catégorie suivante : les objets sont la donnée :

- d'un S -module \mathcal{M}
- d'un sous- S -module $Fil^r \mathcal{M}$ de \mathcal{M} contenant $Fil^r S \cdot \mathcal{M}$

- d'une flèche ϕ -semi-linéaire $\phi_r : \text{Fil}^r \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ telle que pour tout $s \in \text{Fil}^r S$ et $x \in \mathcal{M}$, on a $c^r \cdot \phi_r(s.x) = \phi_r(s) \cdot \phi_r(v^r.x)$.

Les flèches sont les morphismes S -linéaires qui préservent $\text{Fil}^r \mathcal{M}$ et commutent à ϕ_r .

Remarque. – Soit \mathcal{M} un objet de $'\underline{\mathcal{M}}_0^r$ et posons $\phi(x) = \frac{1}{c^r} \cdot \phi_r(v^r.x)$ pour tout $x \in \mathcal{M}$. La condition précédente sur ϕ_r n'est autre que la condition $\phi_r(s.x) = \phi_r(s) \cdot \phi(x)$.

On note $\underline{\mathcal{M}}_0^r$ la sous-catégorie pleine de $'\underline{\mathcal{M}}_0^r$ formée des objets \mathcal{M} qui vérifient les deux conditions supplémentaires :

- le S -module \mathcal{M} est de la forme $\mathcal{M} \simeq \bigoplus_{i \in I} S/p^{n_i} S$ pour I fini et $n_i \in \mathbf{N}^*$
- le S -module \mathcal{M} est engendré par l'image de ϕ_r .

Soit $'\underline{\mathcal{M}}^r$ la catégorie suivante : les objets sont la donnée :

- d'un objet \mathcal{M} de $'\underline{\mathcal{M}}_0^r$
- d'une application W -linéaire $N : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ telle que :
 - si $\lambda \in S$ et $x \in \mathcal{M}$, $N(\lambda.x) = N(\lambda).x + \lambda.N(x)$
 - $v.N(\text{Fil}^r \mathcal{M}) \subset \text{Fil}^r \mathcal{M}$
 - le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \\ v.N \downarrow & & \downarrow c.N \\ \text{Fil}^r \mathcal{M} & \xrightarrow{\phi_r} & \mathcal{M} \end{array}$$

Les flèches sont les morphismes de $'\underline{\mathcal{M}}_0^r$ qui commutent à N .

Remarque. – Soit \mathcal{M} un objet de $'\underline{\mathcal{M}}^r$ et posons, pour $0 \leq i \leq r$, $\text{Fil}^i \mathcal{M} = \{x \in \mathcal{M} \text{ tq } v^{r-i}.x \in \text{Fil}^r \mathcal{M}\}$ et, pour $x \in \text{Fil}^i \mathcal{M}$, $\phi_i(x) = \frac{1}{c^{r-i}} \cdot \phi_r(v^{r-i}.x)$. Les conditions sur N sont alors équivalentes à $N(\text{Fil}^i \mathcal{M}) \subset \text{Fil}^{i-1} \mathcal{M}$ et $N\phi_i = \phi_{i-1}N$.

On note $\underline{\mathcal{M}}^r$ la sous-catégorie pleine de $'\underline{\mathcal{M}}^r$ formée des objets \mathcal{M} qui sont dans $\underline{\mathcal{M}}_0^r$. Par (2.1.1), $S/p^n S$ est clairement muni d'une structure d'objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. Pour $0 \leq r \leq s \leq p-2$, on construit un foncteur $\underline{\mathcal{M}}_0^r \rightarrow \underline{\mathcal{M}}_0^s$ (resp. $\underline{\mathcal{M}}^r \rightarrow \underline{\mathcal{M}}^s$) par $(\mathcal{M}, \text{Fil}^r \mathcal{M}, \phi_r) \mapsto (\mathcal{M}, \text{Fil}^s \mathcal{M}, \phi_s)$ (resp. $(\mathcal{M}, \text{Fil}^r \mathcal{M}, \phi_r, N) \mapsto (\mathcal{M}, \text{Fil}^s \mathcal{M}, \phi_s, N)$) où $\text{Fil}^s \mathcal{M} = v^{s-r} \cdot \text{Fil}^r \mathcal{M} + \text{Fil}^p S \cdot \mathcal{M}$, $\phi_s(v^{s-r}.x) = c^{s-r} \cdot \phi_r(x)$ ($x \in \text{Fil}^r \mathcal{M}$), $\phi_s(a.x) = \phi_s(a) \cdot \phi_0(x)$ ($a \in \text{Fil}^p S$, $x \in \mathcal{M}$) (resp. et où N est le même, les conditions sur N dans $\underline{\mathcal{M}}^s$ se vérifiant par un calcul facile).

LEMME 2.1.2.1. – Pour $0 \leq r \leq s \leq p-2$, le foncteur $\underline{\mathcal{M}}_0^r \rightarrow \underline{\mathcal{M}}_0^s$ (resp. $\underline{\mathcal{M}}^r \rightarrow \underline{\mathcal{M}}^s$) est pleinement fidèle, d'image essentielle les objets $(\mathcal{M}, \text{Fil}^r \mathcal{M}, \phi_r)$ (resp. $(\mathcal{M}, \text{Fil}^r \mathcal{M}, \phi_r, N)$) tels que $\text{Fil}^s \mathcal{M} \subset \text{Fil}^{s-r} S \cdot \mathcal{M}$.

Preuve. – On donne la preuve pour $\underline{\mathcal{M}}_0^r$ seulement (l'autre cas est identique). Il est clair sur la définition du foncteur que l'image $(\mathcal{M}, \text{Fil}^s \mathcal{M}, \phi_s)$ de $(\mathcal{M}, \text{Fil}^r \mathcal{M}, \phi_r)$ est bien telle que $\text{Fil}^s \mathcal{M} \subset \text{Fil}^{s-r} S \cdot \mathcal{M}$. On construit un quasi-inverse : soit $(\mathcal{M}, \text{Fil}^s \mathcal{M}, \phi_s)$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}_0^s$ tel que $\text{Fil}^s \mathcal{M} \subset \text{Fil}^{s-r} S \cdot \mathcal{M}$ et posons $\text{Fil}^r \mathcal{M} = \{x \in \mathcal{M} \text{ tq } v^{s-r}.x \in \text{Fil}^s \mathcal{M}\}$, $\phi_r(x) = \frac{1}{c^{s-r}} \cdot \phi_s(v^{s-r}.x)$. A partir des hypothèses sur $\text{Fil}^s \mathcal{M}$ et ϕ_s , on voit facilement que $\phi_s(\text{Fil}^s \mathcal{M} \cap v^{s-r} \cdot \mathcal{M})$ suffit à engendrer \mathcal{M} . De la formule de ϕ_r et du fait que $c \in S^\times$, il est alors clair que $\phi_r(\text{Fil}^r \mathcal{M})$ engendre \mathcal{M} , donc que $(\mathcal{M}, \text{Fil}^r \mathcal{M}, \phi_r)$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}_0^r$. La seule chose non formelle qui reste à vérifier est que, si $(\mathcal{M}, \text{Fil}^r \mathcal{M}, \phi_r)$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}_0^r$

et si $Fil^s \mathcal{M} = v^{s-r} \cdot Fil^r \mathcal{M} + Fil^p S \cdot \mathcal{M}$, alors $Fil^r \mathcal{M} = \{x \in \mathcal{M} \text{ tq } v^{s-r} \cdot x \in Fil^s \mathcal{M}\}$. Il est clair que $Fil^r \mathcal{M}$ est inclus dans le membre de droite et en utilisant $\mathcal{M} \simeq \bigoplus_{i \in I} S/p^{n_i} S$ et $Fil^r S \cdot \mathcal{M} \subset Fil^r \mathcal{M}$, on se ramène à montrer que $v^{s-r} \cdot a_1 - v^{s-r} \cdot a_2 \in Fil^p(S/p^n S)$ entraîne $a_1 - a_2 \in Fil^r(S/p^n S)$ ($n \in \mathbf{N}^*$, $a_i \in S/p^n S$), ce qui est facile. \square

Quand r augmente, les catégories $\underline{\mathcal{M}}_0^r$ (resp. $\underline{\mathcal{M}}^r$) sont donc des sous-catégories pleines les unes des autres. En particulier, ce sont toutes des sous-catégories pleines de $\underline{\mathcal{M}}_0^{p-2}$ (resp. $\underline{\mathcal{M}}^{p-2}$).

Nous allons montrer :

THÉORÈME 2.1.2.2. – *Les catégories $\underline{\mathcal{M}}_0^r$ et $\underline{\mathcal{M}}^r$ sont abéliennes, et même artiniennes. Plus précisément, soit $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ un morphisme dans $\underline{\mathcal{M}}_0^r$ (resp. $\underline{\mathcal{M}}^r$), alors :*

(i) $f(Fil^r \mathcal{N}) = Fil^r \mathcal{M} \cap f(\mathcal{N})$.

(ii) Soit \mathcal{K} le noyau de l'application S -linéaire sous-jacente, $Fil^r \mathcal{K} = Fil^r \mathcal{N} \cap \mathcal{K}$, $\phi_r : Fil^r \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ la restriction de $\phi_r : Fil^r \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ (resp. et $N : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ la restriction de $N : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$). Avec ces structures, \mathcal{K} est un objet de $\underline{\mathcal{M}}_0^r$ (resp. $\underline{\mathcal{M}}^r$) et donne le noyau de f dans $\underline{\mathcal{M}}_0^r$ (resp. $\underline{\mathcal{M}}^r$).

(iii) Soit \mathcal{C} le conoyau de l'application S -linéaire sous-jacente, $Fil^r \mathcal{C}$ l'image de $Fil^r \mathcal{M}$ dans \mathcal{C} , $\phi_r : Fil^r \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ l'application qu'induit $\phi_r : Fil^r \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ par (i) (resp. et $N : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ le quotient de $N : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$). Avec ces structures, \mathcal{C} est un objet de $\underline{\mathcal{M}}_0^r$ (resp. $\underline{\mathcal{M}}^r$) et donne le conoyau de f dans $\underline{\mathcal{M}}_0^r$ (resp. $\underline{\mathcal{M}}^r$).

La preuve consiste en des dévissages pour se ramener modulo p .

2.2. Etude en caractéristique p

On fixe un entier $r \in \{0, \dots, p-2\}$ et on note $'\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^r$ (resp. $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^r$, resp. $'\underline{\mathcal{M}}_k^r$, resp. $\underline{\mathcal{M}}_k^r$) la sous-catégorie pleine des objets de $'\underline{\mathcal{M}}_0^r$ (resp. $\underline{\mathcal{M}}_0^r$, resp. $'\underline{\mathcal{M}}^r$, resp. $\underline{\mathcal{M}}^r$) annulés par p . On commence par donner des descriptions plus simples des catégories $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^r$ et $\underline{\mathcal{M}}_k^r$, puis on montre qu'elles sont abéliennes.

2.2.1.

On munit $k[u]/u^p$ de la filtration $Fil^i k[u]/u^p = u^i \cdot k[u]/u^p$, $0 \leq i \leq p-1$ et de l'unique k -dérivation N telle que $N(u) = -u$. Si $P(u) \in k[u]/u^p$, on pose $\phi_i(u^i \cdot P(u)) = (-1)^i P(0)^p$ (on a $\phi = \phi_0$).

Soit $'\widetilde{\mathcal{M}}_{0,k}^r$ la catégorie suivante : les objets sont la donnée :

- d'un $k[u]/u^p$ -module $\widetilde{\mathcal{M}}$
- d'un sous- $k[u]/u^p$ -module $Fil^r \widetilde{\mathcal{M}}$ contenant $u^r \cdot \widetilde{\mathcal{M}}$
- d'une flèche ϕ -semi-linéaire $\tilde{\phi}_r : Fil^r \widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$.

Les flèches sont les morphismes $k[u]/u^p$ -linéaires qui préservent $Fil^r \widetilde{\mathcal{M}}$ et commutent à $\tilde{\phi}_r$.

Soit $'\widetilde{\mathcal{M}}_k^r$ la catégorie suivante : les objets sont la donnée :

- d'un objet $\widetilde{\mathcal{M}}$ de $'\widetilde{\mathcal{M}}_{0,k}^r$

- d'une application k -linéaire $\tilde{N} : \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ telle que :
 - i) si $\lambda \in k[u]/u^p$ et $x \in \tilde{\mathcal{M}}$, $\tilde{N}(\lambda.x) = N(\lambda).x + \lambda.\tilde{N}(x)$
 - ii) $u.\tilde{N}(Fil^r \tilde{\mathcal{M}}) \subset Fil^r \tilde{\mathcal{M}}$
 - iii) le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Fil^r \tilde{\mathcal{M}} & \xrightarrow{\tilde{\phi}_r} & \tilde{\mathcal{M}} \\ u.\tilde{N} \downarrow & & \downarrow -\tilde{N} \\ Fil^r \tilde{\mathcal{M}} & \xrightarrow{\tilde{\phi}_r} & \tilde{\mathcal{M}} \end{array}$$

Les flèches sont les morphismes de $\tilde{\mathcal{M}}_{0,k}^r$ qui commutent à \tilde{N} . On note $\tilde{\mathcal{M}}_{0,k}^r$ (resp. $\tilde{\mathcal{M}}_k^r$) la sous-catégorie pleine de $\tilde{\mathcal{M}}_{0,k}^r$ (resp. $\tilde{\mathcal{M}}_k^r$) formée des objets $\tilde{\mathcal{M}}$ qui vérifient les deux conditions supplémentaires :

- le $k[u]/u^p$ -module $\tilde{\mathcal{M}}$ est libre de rang fini
- le $k[u]/u^p$ -module $\tilde{\mathcal{M}}$ est engendré par l'image de $\tilde{\phi}_r$.

On remarque que $k[u]/u^p$ est muni d'une structure d'objet de $\tilde{\mathcal{M}}_k^r$. Si $\tilde{\mathcal{M}}$ est un objet de $\tilde{\mathcal{M}}_{0,k}^r$, on note $Fil^{r+1} \tilde{\mathcal{M}} = u.Fil^r \tilde{\mathcal{M}}$. Comme $\phi(Fil^1(k[u]/u^p)) = 0$, on a $\tilde{\phi}_r|_{Fil^{r+1} \tilde{\mathcal{M}}} = 0$. On dit que $\tilde{\mathcal{M}}$ satisfait la Condition d'Isomorphie de Faltings (C.I.F.) si $Id \otimes \tilde{\phi}_r$ définit un isomorphisme de $k[u]/u^p$ -modules :

$$k[u]/u^p \otimes_{(\phi),k} Fil^r \tilde{\mathcal{M}} / Fil^{r+1} \tilde{\mathcal{M}} \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{M}}$$

(on "tord" à gauche par l'automorphisme ϕ de k , voir [Fa2], 2.2).

LEMME 2.2.1.1. – Soit \mathcal{M} un $k[u]/u^p$ -module libre de type fini et \mathcal{M}' un sous- $k[u]/u^p$ -module, alors $\dim_k(\mathcal{M}'/u.\mathcal{M}') \leq \dim_k(\mathcal{M}/u.\mathcal{M})$ avec égalité si et seulement si $u^{p-1}.\mathcal{M} \subset \mathcal{M}'$.

Preuve. – Une chasse au diagramme facile donne :

$$\dim_k(\mathcal{M}/u.\mathcal{M}) - \dim_k(\mathcal{M}'/u.\mathcal{M}') = \dim_k(\mathcal{M}/\mathcal{M}') - \dim_k(u.\mathcal{M}/u.\mathcal{M}')$$

d'où l'inégalité demandée puisqu'on a une surjection k -linéaire $\mathcal{M}/\mathcal{M}' \xrightarrow{u} u.\mathcal{M}/u.\mathcal{M}'$. Il y a égalité si et seulement si la surjection est un isomorphisme i.e. $\{x \in \mathcal{M} \text{ tq } u.x \in u.\mathcal{M}'\} = \mathcal{M}'$ i.e. $u^{p-1}.\mathcal{M} \subset \mathcal{M}'$. \square

LEMME 2.2.1.2. – Soit \mathcal{M} un objet de $\tilde{\mathcal{M}}_{0,k}^r$, les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\tilde{\mathcal{M}}$ est de type fini sur $k[u]/u^p$ et satisfait la C.I.F.
- (ii) $\tilde{\mathcal{M}}$ est un objet de $\tilde{\mathcal{M}}_{0,k}^r$
- (iii) $\tilde{\mathcal{M}}$ est de type fini sur $k[u]/u^p$ et la flèche canonique $k[u]/u^p \otimes_k \tilde{\phi}_r(Fil^r \tilde{\mathcal{M}}) \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ est un isomorphisme.

Preuve. – (i) \Rightarrow (ii) et (iii) \Rightarrow (ii) sont faciles. Soit $\tilde{\mathcal{M}}$ un objet de $\tilde{\mathcal{M}}_{0,k}^r$, par (2.2.1.1), on a $\dim_k(Fil^r \tilde{\mathcal{M}}/u.Fil^r \tilde{\mathcal{M}}) \leq \dim_k(\tilde{\mathcal{M}}/u.\tilde{\mathcal{M}})$ (en fait, on a même égalité). Mais par hypothèse, la flèche composée $Fil^r \tilde{\mathcal{M}}/u.Fil^r \tilde{\mathcal{M}} \xrightarrow{\tilde{\phi}_r} \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}/u.\tilde{\mathcal{M}}$ est surjective, c'est donc un isomorphisme d'où (i). On montre (ii) \Rightarrow (iii) de la même manière en utilisant :

$$\dim_k(\tilde{\phi}_r(Fil^r \tilde{\mathcal{M}})) \leq \dim_k(Fil^r \tilde{\mathcal{M}}/u.Fil^r \tilde{\mathcal{M}}) \leq \dim_k(\tilde{\mathcal{M}}/u.\tilde{\mathcal{M}}) \quad \square$$

2.2.2.

Soit σ le morphisme d'algèbres $S/pS \rightarrow k[u]/u^p$, $\gamma_i(u) \mapsto \frac{u^i}{i!}$ si $0 \leq i \leq p-1$ et $\gamma_i(u) \mapsto 0$ sinon. Pour \mathcal{M} dans $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^r$ (resp. $\underline{\mathcal{M}}_k^r$), posons $T_0(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \otimes_{S,(\sigma)} k[u]/u^p$ (resp. $T(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \otimes_{S,(\sigma)} k[u]/u^p$) et soit s_0 (resp. s) la surjection canonique $\mathcal{M} \rightarrow T_0(\mathcal{M})$ (resp. $\mathcal{M} \rightarrow T(\mathcal{M})$). On pose $Fil^r T_0(\mathcal{M}) = s_0(Fil^r \mathcal{M})$ et si $x \in s_0(Fil^r \mathcal{M})$, $\tilde{\phi}_r(x) = s_0(\phi_r(\hat{x}))$ où \hat{x} est un relevé quelconque de x dans $Fil^r \mathcal{M}$ (c'est indépendant du relevé). On fait de même pour $T(\mathcal{M})$ et on pose de plus $\tilde{N}(x \otimes P(u)) = N(x) \otimes P(u) + x \otimes N(P(u))$ ou $x \in \mathcal{M}$ et $P(u) \in k[u]/u^p$. On vérifie facilement qu'on définit ainsi un foncteur $T_0 : \underline{\mathcal{M}}_{0,k}^r \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}_{0,k}^r$ (resp. $T : \underline{\mathcal{M}}_k^r \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}_k^r$).

PROPOSITION 2.2.2.1. – *Les foncteurs T_0 et T sont des équivalences de catégories.*

Preuve. – On le montre d'abord pour T_0 . On construit un quasi-inverse. Soit $\tilde{\mathcal{M}}$ un objet de $\tilde{\mathcal{M}}_{0,k}^r$, on pose $T_0^{-1}(\tilde{\mathcal{M}}) = S/pS \otimes_k \tilde{\phi}_r(Fil^r \tilde{\mathcal{M}})$. Par (2.2.1.2), la flèche canonique $k[u]/u^p \otimes_k \tilde{\phi}_r(Fil^r \tilde{\mathcal{M}}) \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ est un isomorphisme de $k[u]/u^p$ -modules et $T_0^{-1}(\tilde{\mathcal{M}})$ est donc de rang sur S/pS celui de $\tilde{\mathcal{M}}$ sur $k[u]/u^p$. Soit \tilde{s}_0 la flèche canonique composée :

$$T_0^{-1}(\tilde{\mathcal{M}}) \xrightarrow{\sigma \otimes Id} k[u]/u^p \otimes_k \tilde{\phi}_r(Fil^r \tilde{\mathcal{M}}) \longrightarrow \tilde{\mathcal{M}}$$

on pose $Fil^r T_0^{-1}(\tilde{\mathcal{M}}) = (\tilde{s}_0)^{-1}(Fil^r \tilde{\mathcal{M}})$ et si $x \in Fil^r T_0^{-1}(\tilde{\mathcal{M}})$, $\phi_r(x) = 1 \otimes \tilde{\phi}_r(\tilde{s}_0(x))$. On vérifie facilement que $T_0^{-1}(\tilde{\mathcal{M}})$ est bien un objet de $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^r$. Reste à construire des isomorphismes canoniques et fonctoriels $T_0(T_0^{-1}(\tilde{\mathcal{M}})) \simeq \tilde{\mathcal{M}}$ et $T_0^{-1}(T_0(\mathcal{M})) \simeq \mathcal{M}$. Pour $\tilde{\mathcal{M}}$ dans $\tilde{\mathcal{M}}_{0,k}^r$, on a $T_0(T_0^{-1}(\tilde{\mathcal{M}})) = k[u]/u^p \otimes_k \tilde{\phi}_r(Fil^r \tilde{\mathcal{M}})$ et on vérifie aisément que l'isomorphisme canonique $k[u]/u^p \otimes_k \tilde{\phi}_r(Fil^r \tilde{\mathcal{M}}) \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{M}}$ est compatible avec toutes les structures. Pour \mathcal{M} dans $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^r$, posons $\tilde{\mathcal{M}} = T_0(\mathcal{M})$. On a $T_0^{-1}(\tilde{\mathcal{M}}) = S/pS \otimes_k \tilde{\phi}_r(Fil^r \tilde{\mathcal{M}})$. Si $z \in Fil^r \tilde{\mathcal{M}}$ et si \hat{z} est un relevé de z dans $Fil^r \mathcal{M}$, l'élément $\phi_r(\hat{z})$ est indépendant du relevé choisi et permet de construire une flèche $\hat{s}_0 : \tilde{\phi}_r(Fil^r \tilde{\mathcal{M}}) \rightarrow \mathcal{M}$, $\tilde{\phi}_r(z) \mapsto \phi_r(\hat{z})$. Notons $s_0 : \mathcal{M} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ la surjection canonique et \tilde{s}_0 la surjection composée :

$$T_0^{-1}(T_0(\mathcal{M})) \xrightarrow{\sigma \otimes Id} k[u]/u^p \otimes_k \tilde{\phi}_r(Fil^r \tilde{\mathcal{M}}) \longrightarrow \tilde{\mathcal{M}}$$

On vérifie qu'on a un diagramme commutatif (où la flèche du haut est seulement un isomorphisme de S/pS -modules a priori) :

$$\begin{array}{ccc} T_0^{-1}(\tilde{\mathcal{M}}) & = & S/pS \otimes_k \tilde{\phi}_r(Fil^r \tilde{\mathcal{M}}) \xrightarrow{Id \otimes \hat{s}_0} \mathcal{M} \\ & & \tilde{s}_0 \downarrow & & \downarrow s_0 \\ & & \tilde{\mathcal{M}} & = & \tilde{\mathcal{M}} \end{array}$$

Si $x \in Fil^r(T_0^{-1}(\tilde{\mathcal{M}}))$, $(Id \otimes \hat{s}_0)(x)$ est donc un relevé dans \mathcal{M} de $\tilde{s}_0(x) \in Fil^r \tilde{\mathcal{M}}$. Soit \hat{x} un relevé de $\tilde{s}_0(x)$ dans $Fil^r \mathcal{M}$ par s_0 , alors $(Id \otimes \hat{s}_0)(x) - \hat{x} \in Fil^p(S/pS) \cdot \mathcal{M}$, d'où $(Id \otimes \hat{s}_0)(x) \in Fil^r \mathcal{M}$. On laisse au lecteur le soin de vérifier formellement la commutativité de $Id \otimes \hat{s}_0$ avec ϕ_r qui en fait un isomorphisme dans $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^r$. Pour T , il suffit de préciser la construction de l'opérateur N sur le quasi-inverse, le reste de la preuve étant similaire. Si $y \in \tilde{\phi}_r(Fil^r \tilde{\mathcal{M}})$, on pose $N(1 \otimes y) = -c^{-1} \otimes \tilde{N}(y)$ et on étend N à $T^{-1}(\tilde{\mathcal{M}})$ par la dérivation produit tensoriel. \square

Si \mathcal{M} est un objet de $'\mathcal{M}_{0,k}^r$, on note $Fil^{r+1}\mathcal{M} = u.Fil^r\mathcal{M} + Fil^p(S/pS).\mathcal{M}$ et on a encore $\phi_r|_{Fil^{r+1}\mathcal{M}} = 0$. On dit que \mathcal{M} satisfait la Condition d'Isomorphie de Faltings (C.I.F.) si $Id \otimes \phi_r$ définit un isomorphisme de S/pS -modules :

$$S/pS \otimes_{(\phi),k} Fil^r\mathcal{M}/Fil^{r+1}\mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}$$

(voir [Fa2], 2.2).

COROLLAIRE 2.2.2.2. – Soit \mathcal{M} un objet de $'\mathcal{M}_{0,k}^r$, les trois assertions suivantes sont équivalentes :

(i) \mathcal{M} est de type fini sur S/pS et satisfait la C.I.F.

(ii) \mathcal{M} est un objet de $\mathcal{M}_{0,k}^r$

(iii) \mathcal{M} est de type fini sur S/pS et la flèche canonique $S/pS \otimes_k \phi_r(Fil^r\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M}$ est un isomorphisme.

Preuve. – (i) \Rightarrow (ii) et (iii) \Rightarrow (ii) sont faciles. On montre (ii) \Rightarrow (i) et (ii) \Rightarrow (iii) de la même façon qu'en (2.2.1.2), en utilisant :

$$\dim_k(\phi_r(Fil^r\mathcal{M})) \leq \dim_k(Fil^r\mathcal{M}/Fil^{r+1}\mathcal{M}) \leq \dim_k(\mathcal{M}/Fil^1(S/pS).\mathcal{M})$$

la dernière inégalité provenant de :

$$\begin{aligned} \dim_k(Fil^r\mathcal{M}/Fil^{r+1}\mathcal{M}) &= \dim_k(Fil^r\tilde{\mathcal{M}}/Fil^{r+1}\tilde{\mathcal{M}}) \\ &= \dim_k(Fil^r\tilde{\mathcal{M}}/u.Fil^r\tilde{\mathcal{M}}) \\ &\leq \dim_k(\tilde{\mathcal{M}}/u.\tilde{\mathcal{M}}) \quad (2.2.1.1) \\ &= \dim_k(\mathcal{M}/Fil^1(S/pS).\mathcal{M}) \end{aligned}$$

où $\tilde{\mathcal{M}} = T(\mathcal{M})$. \square

2.2.3.

La description (plus simple) qui va suivre de la catégorie $\widetilde{\mathcal{M}}_{0,k}^r$ m'a été suggérée par J.M. Fontaine.

Soit C_k la catégorie suivante : les objets sont les couples (L, λ) où L est un $k[u]/u^p$ -module de type fini et λ un morphisme injectif $k[u]/u^p$ -linéaire : $L \hookrightarrow k[u]/u^p \otimes_k L/u.L$. Les morphismes entre deux objets (L, λ) et (K, κ) sont les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{f} & K \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \kappa \\ k[u]/u^p \otimes_k L/u.L & \xrightarrow{Id \otimes \bar{f}} & k[u]/u^p \otimes_k K/u.K \end{array}$$

où f est $k[u]/u^p$ -linéaire et \bar{f} est le morphisme induit : $L/u.L \rightarrow K/u.K$.

PROPOSITION 2.2.3.1. – La catégorie C_k est abélienne, et même artinienne.

Preuve. – Si (L, λ) est un objet de C_k , on note $\tilde{L} = k[u]/u^p \otimes_k L/u.L$. Puisque $\lambda(L)$ est un sous- $k[u]/u^p$ -module de \tilde{L} tel que $\dim_k \lambda(L)/u.\lambda(L) = \dim_k \tilde{L}/u.\tilde{L}$ ($= \dim_k L/u.L$), on a par (2.2.1.1) $u^{p-1}.\tilde{L} \subset \lambda(L)$. Si $f : (L, \lambda) \rightarrow (K, \kappa)$ est un morphisme de C_k , on notera encore $f : L \rightarrow K$ le morphisme $k[u]/u^p$ -linéaire sous-jacent. Remarquons que si $f : L \rightarrow K$ est injectif, alors $\bar{f} : L/u.L \rightarrow K/u.K$ est encore injectif. En effet, soit $x \in L$

tel que $f(x) = u.y$, $y \in K$. On a vu que l'élément de $\tilde{L} : u^{p-1} \otimes \bar{x}$ est dans $\lambda(L)$ (avec des notations évidentes). Mais la flèche $(Id \otimes \bar{f}) \circ \lambda = \kappa \circ f : L \rightarrow \tilde{K}$ est injective, donc $u^{p-1} \otimes \bar{x} = 0$ puisque $(Id \otimes \bar{f})(u^{p-1} \otimes \bar{x}) = 0$, i.e. $\bar{x} = 0$.

i) Soit $f : (L, \lambda) \rightarrow (K, \kappa)$ un morphisme de C_k tel que $f : L \rightarrow K$ est injectif. Soit $J = K/L$, remarquons que $J/u.J = (K/u.K)/(L/u.L) = K/(u.K, L)$. Soit $\iota : J \rightarrow k[u]/u^p \otimes_k J/u.J$ la flèche induite par κ . Il est clair que si (J, ι) est un objet de C_k , alors c'est un conoyau dans C_k . Montrons que ι est bien injective. Soit $x \in J$ tel que $\iota(x) = 0$ et soit \hat{x} un relèvement de x dans K , alors $\kappa(\hat{x}) = (Id \circ \bar{f})(\hat{x})$ pour un certain $\tilde{x} \in \tilde{L}$. Soit d le plus petit entier tel que $u^d.\tilde{x} = \lambda(y)$ pour $y \in L$ (d existe car $u^{p-1}.\tilde{L} \subset \lambda(L)$) et supposons $d \geq 1$. On a $\kappa(f(y)) = \kappa(u^d.\hat{x})$ d'où $f(y) = u^d.\hat{x}$ et $y \in u.L$ puisque $\bar{f} : L/u.L \rightarrow K/u.K$ est injectif. Donc $u^d.\tilde{x} = u.\lambda(z)$ pour un $z \in L$ soit encore $u^{d-1}.\tilde{x} - \lambda(z) \in u^{p-1}.\tilde{L} \subset \lambda(L)$ d'où $u^{d-1}.\tilde{x} \in \lambda(L)$ ce qui est impossible par hypothèse. Donc $\tilde{x} = \lambda(y)$ et $\kappa(\hat{x}) = \kappa(f(y))$ i.e. $\hat{x} = f(y)$ i.e. $x = 0$.

ii) Soit $f : (L, \lambda) \rightarrow (K, \kappa)$ un morphisme de C_k tel que $f : L \rightarrow K$ est surjectif et notons $M = Ker(L \rightarrow K)$ et $\bar{M} = Ker(L/u.L \rightarrow K/u.K)$. La flèche μ induite par λ de M dans $k[u]/u^p \otimes_k \bar{M}$ est injective (puisque λ est injective), donc M est un sous- $k[u]/u^p$ -module de $k[u]/u^p \otimes_k \bar{M}$ d'où $\dim_k M/u.M \leq \dim_k \bar{M}$. Mais on a une flèche surjective évidente $M/u.M \rightarrow \bar{M}$ (car f est surjective) : c'est donc un isomorphisme et (M, μ) est clairement un noyau de f dans C_k .

iii) Soit $f : (L, \lambda) \rightarrow (K, \kappa)$ un morphisme quelconque de C_k et notons $M = Ker(L \rightarrow K)$, $\bar{M} = Ker(L/u.L \rightarrow K/u.K)$ et $\bar{L} = L/u.L$. On montre facilement que la flèche $\bar{\lambda} : L/M \rightarrow k[u]/u^p \otimes_k \bar{L}/\bar{M}$ induite par λ est injective, d'où $\dim_k \left((L/M)/u.(L/M) \right) \leq \dim_k (\bar{L}/\bar{M})$. Mais on a une flèche surjective évidente $(L/M)/u.(L/M) \rightarrow \bar{L}/\bar{M}$: c'est donc un isomorphisme et $(L/M, \bar{\lambda})$ est un objet de C_k . En appliquant i) au morphisme $(L/M, \bar{\lambda}) \rightarrow (K, \kappa)$, on en déduit que f admet un conoyau dans C_k . En appliquant ii) au morphisme $(L, \lambda) \rightarrow (L/M, \bar{\lambda})$, on en déduit que f admet un noyau dans C_k . On laisse les derniers détails au lecteur. \square

La proposition (2.2.3.1) admet des variantes : par exemple, la catégorie \tilde{C}_k des couples (L, λ) où L est un $k[u]/u^p$ -module de type fini et λ un morphisme $k[u]/u^p$ -linéaire injectif $L \hookrightarrow k[u]/u^p \otimes_{(\phi), k} L/u.L$ (on "tord" par l'automorphisme ϕ de k) est abélienne, ou encore les sous-catégories pleines \tilde{C}_k^r formée des couples (L, λ) de \tilde{C}_k tels que $u^r.k[u]/u^p \otimes_{(\phi), k} L/u.L \subset \lambda(L)$ sont abéliennes ($0 \leq r \leq p-2$).

Soit $\tilde{\mathcal{M}}$ un objet de $\tilde{\mathcal{M}}_{0,k}^r$, par (2.2.1.2), on a un isomorphisme de $k[u]/u^p$ -modules : $k[u]/u^p \otimes_{(\phi), k} Fil^r \tilde{\mathcal{M}}/u.Fil^r \tilde{\mathcal{M}} \xrightarrow{Id \otimes \tilde{\phi}_r} \tilde{\mathcal{M}}$. On associe alors à $\tilde{\mathcal{M}}$ l'objet $(Fil^r \tilde{\mathcal{M}}, \mu)$ de \tilde{C}_k^r où μ est la composée (injective par définition) : $Fil^r \tilde{\mathcal{M}} \hookrightarrow \tilde{\mathcal{M}} \xrightarrow{(Id \otimes \tilde{\phi}_r)^{-1}} k[u]/u^p \otimes_k Fil^r \tilde{\mathcal{M}}/u.Fil^r \tilde{\mathcal{M}}$. Réciproquement, si (L, λ) est un objet de \tilde{C}_k^r , on construit un objet de $\tilde{\mathcal{M}}_{0,k}^r$ en posant $\tilde{\mathcal{M}} = k[u]/u^p \otimes_{(\phi), k} L/u.L$, $Fil^r \tilde{\mathcal{M}} = L$, $\tilde{\phi}_r$ la flèche canonique $Fil^r \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow k[u]/u^p \otimes_{(\phi), k} Fil^r \tilde{\mathcal{M}}/u.Fil^r \tilde{\mathcal{M}}$, $x \mapsto 1 \otimes \bar{x}$ et λ l'injection $Fil^r \tilde{\mathcal{M}} \subset \tilde{\mathcal{M}}$. On laisse au lecteur le soin de montrer qu'on a ainsi une équivalence de catégories entre \tilde{C}_k^r et $\tilde{\mathcal{M}}_{0,k}^r$ et d'en déduire à partir de (2.2.3.1) :

COROLLAIRE 2.2.3.2. – Les catégories $\tilde{\mathcal{M}}_{0,k}^r$ (resp. $\tilde{\mathcal{M}}_k^r$) sont abéliennes et artiniennes. Plus précisément, soit $f : \tilde{\mathcal{N}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ un morphisme dans $\tilde{\mathcal{M}}_{0,k}^r$ (resp. $\tilde{\mathcal{M}}_k^r$), alors :

(i) $f(\text{Fil}^r \tilde{\mathcal{N}}) = \text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}} \cap f(\tilde{\mathcal{N}})$.

(ii) Soit $\tilde{\mathcal{K}}$ le noyau de l'application $k[u]/u^p$ -linéaire sous-jacente, $\text{Fil}^r \tilde{\mathcal{K}} = \text{Fil}^r \tilde{\mathcal{N}} \cap \tilde{\mathcal{K}}$, $\tilde{\phi}_r : \text{Fil}^r \tilde{\mathcal{K}} \rightarrow \tilde{\mathcal{K}}$ la restriction de $\tilde{\phi}_r : \text{Fil}^r \tilde{\mathcal{N}} \rightarrow \tilde{\mathcal{N}}$ (resp. et $\tilde{\mathcal{N}} : \tilde{\mathcal{K}} \rightarrow \tilde{\mathcal{K}}$ la restriction de $\tilde{\mathcal{N}} : \tilde{\mathcal{N}} \rightarrow \tilde{\mathcal{N}}$). Avec ces structures, $\tilde{\mathcal{K}}$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^r$ (resp. $\underline{\mathcal{M}}_k^r$) et donne le noyau de f dans $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^r$ (resp. $\underline{\mathcal{M}}_k^r$).

(iii) Soit $\tilde{\mathcal{C}}$ le conoyau de l'application $k[u]/u^p$ -linéaire sous-jacente, $\text{Fil}^r \tilde{\mathcal{C}}$ l'image de $\text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}}$ dans $\tilde{\mathcal{C}}$, $\tilde{\phi}_r : \text{Fil}^r \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}$ l'application qu'induit $\tilde{\phi}_r : \text{Fil}^r \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ par (i) (resp. et $\tilde{\mathcal{N}} : \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}$ le quotient de $\tilde{\mathcal{N}} : \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$). Avec ces structures, $\tilde{\mathcal{C}}$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^r$ (resp. $\underline{\mathcal{M}}_k^r$) et donne le conoyau de f dans $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^r$ (resp. $\underline{\mathcal{M}}_k^r$).

De (2.2.2.1), on déduit encore :

COROLLAIRE 2.2.3.3. – Les catégories $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^r$ (resp. $\underline{\mathcal{M}}_k^r$) sont abéliennes et artiniennes, et on a un énoncé strictement similaire aux (i), (ii) et (iii) de (2.2.3.2).

Remarque. – Comme me l'a fait remarquer le referee, on peut bien sûr démontrer directement que $\underline{\mathcal{M}}_k^r$ est abélienne, sans passer ni par $\underline{\mathcal{M}}_k^r$, ni par $\tilde{\mathcal{C}}_k^r$. Cependant, la catégorie $\underline{\mathcal{M}}_k^r$ est agréable car les objets y sont de dimension finie sur k . De plus, dans [Br3], pour montrer que certains groupes de cohomologie s'interprètent comme des objets de $\underline{\mathcal{M}}_k^r$, il est pratique de passer par l'intermédiaire de $\underline{\mathcal{M}}_k^r$. Enfin, la catégorie $\tilde{\mathcal{C}}_k^r$ est une formulation de $\underline{\mathcal{M}}_k^r$ plus proche de la "philosophie" des systèmes de Honda ([Fo5]).

2.3. Preuve du théorème

Nous allons démontrer le théorème pour $\underline{\mathcal{M}}_0^r$ seulement, la preuve pour $\underline{\mathcal{M}}^r$ étant absolument similaire en rajoutant l'opérateur de monodromie à chaque étape.

2.3.1.

On a regroupé dans cette section trois lemmes utilisés dans la suite.

LEMME 2.3.1.1. – Soit \mathcal{M} un S -module tel qu'on ait des isomorphismes de S -modules : $\mathcal{M}/p\mathcal{M} \simeq (S/pS)^n$ et $p\mathcal{M} \simeq \bigoplus_{i=1}^r S/p^{n_i}S$ ($n, r, n_i \in \mathbf{N}^*$). Alors on a aussi $\mathcal{M} \simeq \bigoplus_{j \in J} S/p^{m_j}S$.

Preuve. – Soit $m \in \mathbf{N}^*$ tel que $p^m \mathcal{M} = 0$, (e_1, \dots, e_n) une base de $\mathcal{M}/p\mathcal{M}$ sur S/pS et $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n$ des relevés dans \mathcal{M} : \mathcal{M} est engendré en tant que $S/p^m S$ -module par $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n)$, donc $(p\hat{e}_1, \dots, p\hat{e}_n)$ engendre le $S/p^m S$ -module $p\mathcal{M}$. Remarquons que l'anneau $S/p^m S$ est local d'idéal maximal $I = p.S/p^m S + \text{Fil}^1(S/p^m S)$ et de corps résiduel k . Quitte à renuméroter les \hat{e}_i , on peut supposer que les images de $p\hat{e}_1, \dots, p\hat{e}_r$ dans $p\mathcal{M} \otimes_{S/p^m S} k$ forment une base sur k . Soient $f_1, \dots, f_r \in p\mathcal{M}$ tels que $p\mathcal{M} \simeq \bigoplus_{i=1}^r S/p^{n_i}S.f_i$, il existe une matrice $r \times r$ $A \in M_r(S/p^m S)$ telle que $(f_1, \dots, f_r)A = (p\hat{e}_1, \dots, p\hat{e}_r)$. Comme $A \text{ mod } I \in GL_r(k)$, $A \in GL_r(S/p^m S)$ et, quitte à remplacer $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_r)$ par $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_r)A^{-1}$, on peut supposer $p\hat{e}_i = f_i$, ($1 \leq i \leq r$). Pour $r+1 \leq j \leq n$, il existe $a_{ij} \in S/p^m S$ ($1 \leq i \leq r$) tels que $p\hat{e}_j = \sum_{i=1}^r a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^r a_{ij} p\hat{e}_i$ et, quitte à remplacer \hat{e}_j par $\hat{e}_j - \sum_{i=1}^r a_{ij} \hat{e}_i$ pour $r+1 \leq j \leq n$, on peut supposer $p\hat{e}_j = 0$ ($r+1 \leq j \leq n$). Finalement, on a une application $S/p^m S$ -linéaire surjective :

$$\mathcal{M}' = \left(\bigoplus_{i=1}^r S/p^{n_i+1}S.g_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=r+1}^n S/pS.g_i \right) \rightarrow \mathcal{M}, \quad g_i \mapsto \hat{e}_i$$

qui est un isomorphisme car elle induit des isomorphismes $p\mathcal{M}' \xrightarrow{\sim} p\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'/p\mathcal{M}' \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}/p\mathcal{M}$ par choix des \hat{e}_i , $1 \leq i \leq n$. \square

Si \mathcal{M} est un objet de $'\underline{\mathcal{M}}_0^r$, on note $\mathcal{M}^{(p^m)} = \{x \in \mathcal{M} / p^m x = 0\}$ et on pose $Fil^r \mathcal{M}^{(p^m)} = \mathcal{M}^{(p^m)} \cap Fil^r \mathcal{M}$: c'est encore un objet de $'\underline{\mathcal{M}}_0^r$.

LEMME 2.3.1.2. – Soit \mathcal{M} dans $\underline{\mathcal{M}}_0^r$, alors $\mathcal{M}^{(p)}$ est dans $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^r$ et $p^m Fil^r \mathcal{M} = Fil^r \mathcal{M} \cap p^m \mathcal{M}$ ($m \in \mathbf{N}$).

Preuve. – On fait de $p^m \mathcal{M}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}_0^r$ en posant $Fil^r(p^m \mathcal{M}) = p^m Fil^r \mathcal{M}$, et de W une S -algèbre par $S \rightarrow W, \gamma_i(u) \mapsto 0, i \geq 1$. Si \mathcal{M} est dans $'\underline{\mathcal{M}}_0^r$ et de la forme $\mathcal{M} \simeq \bigoplus_{i \in I} S/p^{n_i} S$, on vérifie que \mathcal{M} est dans $\underline{\mathcal{M}}_0^r$ si et seulement si la flèche $\bar{\phi}_r : Fil^r \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \otimes_S W = M$ est surjective. On fait une récurrence sur la plus petite puissance de p qui annule \mathcal{M} , en supposant $p\mathcal{M} \neq 0$ (sinon, c'est trivial). Supposons $p^2 \mathcal{M} = 0$, il faut voir que $\mathcal{M}^{(p)}$ est dans $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^r$ et que $Fil^r(p\mathcal{M}) = p\mathcal{M} \cap Fil^r \mathcal{M}$. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & Fil^r \mathcal{M}^{(p)} & \rightarrow & Fil^r \mathcal{M} & \rightarrow & p Fil^r \mathcal{M} \rightarrow 0 \\ & & \bar{\phi}_r \downarrow & & \bar{\phi}_r \downarrow & & p\bar{\phi}_r \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{M}^{(p)} & \xrightarrow{i} & M & \rightarrow & pM \rightarrow 0 \end{array}$$

où les deux flèches verticales de droites sont surjectives par hypothèse. Soit $x \in M^{(p)}$, il existe $\hat{x} \in Fil^r \mathcal{M}$ tel que $\bar{\phi}_r(\hat{x}) = i(x)$, donc $p\hat{x} \in Ker(p\bar{\phi}_r) = u.(p Fil^r \mathcal{M}) + Fil^{p-1} S.p\mathcal{M}$ et il existe $\hat{y} \in u.Fil^r \mathcal{M} + Fil^{p-1} S.\mathcal{M}$ tel que $\hat{x} - \hat{y} \in \mathcal{M}^{(p)} \cap Fil^r \mathcal{M} = Fil^r \mathcal{M}^{(p)}$. Mais $\bar{\phi}_r(\hat{y}) = pz$, $z \in M$ et si \hat{z} est un relevé de z dans $Fil^r \mathcal{M}$ (par $\bar{\phi}_r$), on a $\hat{x} - \hat{y} + p\hat{z} \in Fil^r \mathcal{M}^{(p)}$ et $\bar{\phi}_r(\hat{x} - \hat{y} + p\hat{z}) = x$ ce qui montre la surjectivité de gauche. Donc $\mathcal{M}^{(p)}$ est dans $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^r$ et comme $p\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{M}^{(p)}$, on déduit de (2.2.3.3) $(p Fil^r \mathcal{M} =) Fil^r(p\mathcal{M}) = Fil^r \mathcal{M}^{(p)} \cap p\mathcal{M} = Fil^r \mathcal{M} \cap \mathcal{M}^{(p)} \cap p\mathcal{M} = Fil^r \mathcal{M} \cap p\mathcal{M}$. Pour le cas général, on fait l'hypothèse de récurrence suivante pour $m \geq 2$: $HR(m) = \{ \text{si } \mathcal{M} \text{ dans } \underline{\mathcal{M}}_0^r \text{ est tel que } p^m \mathcal{M} = 0, \text{ alors } p^i Fil^r \mathcal{M} = Fil^r \mathcal{M} \cap p^i \mathcal{M}, 0 \leq i \leq m-1 \text{ et } \mathcal{M}^{(p)} \text{ est dans } \underline{\mathcal{M}}_{0,k}^r \}$. Soit \mathcal{M} dans $\underline{\mathcal{M}}_0^r$ tel que $p^{m+1} \mathcal{M} = 0$ et $p^m \mathcal{M} \neq 0$. En raisonnant comme pour $p^2 \mathcal{M} = 0$, on montre que $\mathcal{M}^{(p^m)}$ est dans $\underline{\mathcal{M}}_0^r$, donc par hypothèse de récurrence $(\mathcal{M}^{(p^m)})^{(p)} = \mathcal{M}^{(p)}$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^r$. Mais on a une injection $p^m \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{M}^{(p)}$ et par (2.2.3.3), on déduit comme précédemment $p^m Fil^r \mathcal{M} = Fil^r \mathcal{M} \cap p^m \mathcal{M}$. On fait alors de $\mathcal{M}/p^m \mathcal{M}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}_0^r$ en posant $Fil^r(\mathcal{M}/p^m \mathcal{M}) = Fil^r \mathcal{M}/p^m Fil^r \mathcal{M} \subset \mathcal{M}/p^m \mathcal{M}$. Par récurrence, on a en particulier $p^i Fil^r \mathcal{M}/p^m Fil^r \mathcal{M} = (p^i \mathcal{M}/p^m \mathcal{M}) \cap (Fil^r \mathcal{M}/p^m Fil^r \mathcal{M}), 0 \leq i \leq m-1$, d'où aisément $p^i Fil^r \mathcal{M} = Fil^r \mathcal{M} \cap p^i \mathcal{M}$ pour $0 \leq i \leq m-1$. \square

LEMME 2.3.1.3. – Soit $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ un morphisme dans $\underline{\mathcal{M}}_0^r$ surjectif sur les S -modules. Supposons de plus que $p\mathcal{M} = 0$, alors :

- (i) la flèche $Fil^r \mathcal{N} \rightarrow Fil^r \mathcal{M}$ est surjective
- (ii) $(\mathcal{K}, Fil^r \mathcal{K}, \phi_r)$ est un noyau de f dans $\underline{\mathcal{M}}_0^r$ (voir 2.1.2.2).

Preuve. – (i) : On déduit facilement de (2.3.1.2) que $\mathcal{N}/p\mathcal{N}$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^r$. On a donc un morphisme dans $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^r : \mathcal{N}/p\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ qui est surjectif. Par (2.2.3.3) et (2.3.1.2), la flèche $Fil^r \mathcal{N} \rightarrow Fil^r(\mathcal{N}/p\mathcal{N}) \rightarrow Fil^r \mathcal{M}$ est surjective. (ii) : Il suffit de montrer que $(\mathcal{K}, Fil^r \mathcal{K}, \phi_r)$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}_0^r$. On fait une récurrence sur la plus petite puissance de p qui annule \mathcal{N} . Si $p\mathcal{N} = 0$, on utilise (2.2.3.3). Supposons le résultat vrai à l'ordre $m-1$

et soit $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ tel que $p\mathcal{M} = 0$ et $p^m\mathcal{N} = 0$. On rappelle que $Fil^r\mathcal{K} = \mathcal{K} \cap Fil^r\mathcal{N}$ muni du ϕ_r induit. Montrons d'abord que $Fil^r\mathcal{K} \cap p\mathcal{K} = pFil^r\mathcal{K}$. Soit $x \in \mathcal{K}$ tel que $px \in Fil^r\mathcal{K}$, par (2.3.1.2), il existe $x' \in Fil^r\mathcal{N}$ tel que $p(x - x') = 0$ i.e. $x - x' \in \mathcal{N}^{(p)}$ qui est un objet de $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^r$ (2.3.1.2). On a un morphisme dans $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^r$, $g : \mathcal{N}^{(p)} \rightarrow \mathcal{M}$ d'où par (2.2.3.3) une surjection $Fil^r\mathcal{N} \cap \mathcal{N}^{(p)} = Fil^r\mathcal{N}^{(p)} \rightarrow Fil^r\mathcal{M} \cap g(\mathcal{N}^{(p)})$. Soit $z \in Fil^r\mathcal{N}^{(p)}$ tel que $g(z) = f(x - x') = -f(x') \in Fil^r\mathcal{M} \cap g(\mathcal{N}^{(p)})$, alors $p(x' + z) = px$ et $x' + z \in Fil^r\mathcal{N} \cap \mathcal{K} = Fil^r\mathcal{K}$, d'où $px \in pFil^r\mathcal{K}$. Montrons que $p\mathcal{K}$ (muni de $Fil^r(p\mathcal{K}) = pFil^r\mathcal{K}$) est dans $\underline{\mathcal{M}}_0^r$. On a une suite exacte de S/pS -modules $0 \rightarrow \mathcal{K} \cap \mathcal{N}^{(p)} \rightarrow \mathcal{N}^{(p)} \rightarrow \mathcal{M}$ et comme $\mathcal{N}^{(p)}$ et \mathcal{M} sont dans $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^r$, $\mathcal{K} \cap \mathcal{N}^{(p)}$ et $\mathcal{N}^{(p)}/(\mathcal{K} \cap \mathcal{N}^{(p)})$ aussi par (2.2.3.3). La suite exacte de S/pS -modules $0 \rightarrow \mathcal{N}^{(p)}/(\mathcal{K} \cap \mathcal{N}^{(p)}) \rightarrow \mathcal{N}/\mathcal{K} \xrightarrow{p} p\mathcal{N}/p\mathcal{K} \rightarrow 0$ montre que $p\mathcal{N}/(p\mathcal{K})$ est dans $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^r$ (car les deux autres y sont), avec $Fil^r(p\mathcal{N}/p\mathcal{K}) = pFil^r\mathcal{N}/(pFil^r\mathcal{N} \cap p\mathcal{K}) = pFil^r\mathcal{N}/pFil^r\mathcal{K}$. Enfin, par récurrence au cas $p^{m-1}\mathcal{N} = 0$, la suite exacte $0 \rightarrow p\mathcal{K} \rightarrow p\mathcal{N} \rightarrow p\mathcal{N}/p\mathcal{K} \rightarrow 0$ montre que $p\mathcal{K}$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}_0^r$. Montrons que $\mathcal{K}/p\mathcal{K}$ est dans $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^r$. De la suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{K}/p\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}/p\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow 0$, on déduit que $\mathcal{K}/p\mathcal{N}$ est dans $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^r$ et de la suite exacte $0 \rightarrow p\mathcal{N}/p\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}/p\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}/p\mathcal{N} \rightarrow 0$ que $\mathcal{K}/p\mathcal{K}$ est un S/pS -module libre de rang fini, puis que la flèche $\bar{\phi}_r : Fil^r\mathcal{K}/pFil^r\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}/p\mathcal{K} \otimes_{S/pS} k$ est surjective. Donc $\mathcal{K}/p\mathcal{K}$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^r$. Par (2.3.1.1), on déduit aisément que \mathcal{K} est un objet de $\underline{\mathcal{M}}_0^r$. \square

2.3.2.

On prouve le théorème (2.1.2.2).

PROPOSITION 2.3.2.1. – Soit $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ un morphisme de $\underline{\mathcal{M}}_0^r$, alors $(\mathcal{K}, Fil^r\mathcal{K}, \phi_r)$ est un noyau de f dans $\underline{\mathcal{M}}_0^r$.

Preuve. – On fait une récurrence sur le plus petit entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $p^m\mathcal{M} = 0$. Si $m = 1$, on a par (2.3.1.2) que $\mathcal{N}/p\mathcal{N}$ est dans $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^r$ et comme f se factorise par $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}/p\mathcal{N} \xrightarrow{\bar{f}} \mathcal{M}$ et que $Im(\bar{f})$ est dans $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^r$ par (2.2.3.3), on est ramené au cas où f est surjectif, i.e. à (2.3.1.3). Supposons le résultat vrai dès que $p^{m-1}\mathcal{M} = 0$ et soit $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ avec $p^m\mathcal{M} = 0$. Par récurrence $Ker(pf) : \mathcal{N} \rightarrow p\mathcal{M}$ (muni des structures induites) est dans $\underline{\mathcal{M}}_0^r$. Mais $f(Ker(pf)) \in \mathcal{M}^{(p)}$ et par le cas $m = 1$ et (2.3.1.2), $\mathcal{K} = Ker(Ker(pf) \rightarrow \mathcal{M}^{(p)})$ est dans $\underline{\mathcal{M}}_0^r$. \square

PROPOSITION 2.3.2.2. – Soit $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ un morphisme de $\underline{\mathcal{M}}_0^r$, alors $f(Fil^r\mathcal{N}) = Fil^r\mathcal{M} \cap f(\mathcal{N})$ et $(\mathcal{C}, Fil^r\mathcal{C}, \phi_r)$ est un conoyau de f dans $\underline{\mathcal{M}}_0^r$.

Preuve. – Il suffit de montrer que $\mathcal{C} = \mathcal{M}/\mathcal{N}$ est de la forme $\bigoplus_{i \in I} S/p^{n_i}S$ (I fini) et que $Fil^r\mathcal{M}/Fil^r\mathcal{N}$ s'injecte dans \mathcal{M}/\mathcal{N} . Il suffit de le faire pour f injectif. En effet, supposons le résultat pour des injections, on sait par (2.3.2.1) que \mathcal{K} est dans $\underline{\mathcal{M}}_0^r$, donc \mathcal{N}/\mathcal{K} aussi, mais $\mathcal{N}/\mathcal{K} \hookrightarrow \mathcal{M}$, d'où le résultat. On fait une récurrence sur le plus petit entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $p^m\mathcal{M} = 0$. Si $m = 1$, on utilise (2.2.3.3). Supposons le résultat vrai dès que $p^{m-1}\mathcal{M} = 0$ et soit $f : \mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{M}$ avec $p^m\mathcal{M} = 0$. Soit $\mathcal{N}_{(p)} = Ker(\mathcal{N} \oplus p\mathcal{M} \xrightarrow{f \oplus -Id} \mathcal{M})$, par (2.3.2.1), c'est un objet de $\underline{\mathcal{M}}_0^r$ et la projection $i : \mathcal{N}_{(p)} \rightarrow \mathcal{N}$ est une injection dans $\underline{\mathcal{M}}_0^r$ qui permet de voir $\mathcal{N}_{(p)}$ comme un sous-objet de \mathcal{N} . On a alors une suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{N}_{(p)} \rightarrow p\mathcal{M} \rightarrow p\mathcal{M}/\mathcal{N}_{(p)} \rightarrow 0$ qui par récurrence montre que $p\mathcal{M}/\mathcal{N}_{(p)}$ est dans $\underline{\mathcal{M}}_0^r$ (et qu'on a $pFil^r\mathcal{M}/Fil^r\mathcal{N}_{(p)} \hookrightarrow p\mathcal{M}/\mathcal{N}_{(p)}$). Comme on a un isomorphisme de S -modules $p\mathcal{M}/\mathcal{N}_{(p)} \simeq p(\mathcal{M}/\mathcal{N})$ ($p(\mathcal{M}/\mathcal{N}) \subset \mathcal{M}/\mathcal{N}$), $p(\mathcal{M}/\mathcal{N})$ est de la forme $\bigoplus_{j \in J} S/p^{m_j}S$. Par (2.2.3.3), $\mathcal{M}/(p\mathcal{M}, \mathcal{N})$ est libre de rang fini sur S/pS et par (2.3.1.1), on a donc un isomorphisme de S -modules $\mathcal{M}/\mathcal{N} \simeq \bigoplus_{i \in I} S/p^{n_i}S$. De la suite exacte de S -modules

$0 \rightarrow \mathcal{N}/\mathcal{N}_{(p)} \rightarrow \mathcal{M}/p\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/(p\mathcal{M}, \mathcal{N}) \rightarrow 0$, on a par (2.2.3.3) que $\mathcal{N}/\mathcal{N}_{(p)}$ est libre de rang fini sur S/pS . Posons $Fil^r(\mathcal{N}/\mathcal{N}_{(p)}) = Fil^r\mathcal{N}/(Fil^r\mathcal{N} \cap \mathcal{N}_{(p)}) = Fil^r\mathcal{N}/Fil^r\mathcal{N}_{(p)}$, avec le ϕ_r induit, cela fait de $\mathcal{N}/\mathcal{N}_{(p)}$ un objet de $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^r$. Comme on a une injection de S/pS -modules $\mathcal{N}/\mathcal{N}_{(p)} \hookrightarrow \mathcal{M}/p\mathcal{M}$ entre objets de $\underline{\mathcal{M}}_{0,k}^r$, on a par (2.2.3.3) $Fil^r(\mathcal{N}/\mathcal{N}_{(p)}) = (Fil^r\mathcal{M}/pFil^r\mathcal{M}) \cap (\mathcal{N}/\mathcal{N}_{(p)})$. Le diagramme commutatif de S -modules :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & \mathcal{N}_{(p)} & \rightarrow & \mathcal{N} & \rightarrow & \mathcal{N}/\mathcal{N}_{(p)} \rightarrow 0 \\
 & & f \downarrow & & f \downarrow & & \bar{f} \downarrow \\
 0 & \rightarrow & p\mathcal{M} & \rightarrow & \mathcal{M} & \rightarrow & \mathcal{M}/p\mathcal{M} \rightarrow 0
 \end{array}$$

et les égalités $Fil^r\mathcal{N}_{(p)} = Fil^r(p\mathcal{M}) \cap \mathcal{N}_{(p)}$ (récurrence à l'ordre $m - 1$) et $Fil^r(\mathcal{N}/\mathcal{N}_{(p)}) = (Fil^r\mathcal{M}/pFil^r\mathcal{M}) \cap (\mathcal{N}/\mathcal{N}_{(p)})$ permettent alors aisément de montrer que $Fil^r\mathcal{N} = \mathcal{N} \cap Fil^r\mathcal{M}$. \square

PROPOSITION 2.3.2.3. – Soit $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ un morphisme de $\underline{\mathcal{M}}_0^r$, alors on a un isomorphisme dans $\underline{\mathcal{M}}_0^r : \mathcal{N}/\mathcal{K} \simeq \mathcal{I}$, où $\mathcal{I} = Ker(\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C})$.

Preuve. – Par tout ce qui précède, il suffit de voir que si on a un morphisme dans $\underline{\mathcal{M}}_0^r : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ qui est un isomorphisme de S -modules, alors $Fil^r\mathcal{N} \simeq Fil^r\mathcal{M}$, ce qui se déduit de la stricte compatibilité de Fil^r aux morphismes de $\underline{\mathcal{M}}_0^r$ (2.3.2.2). \square

2.4. Sur les objets simples de $\underline{\mathcal{M}}^r$

2.4.1.

On désigne toujours par r un entier compris entre 0 et $p - 2$. Rappelons la définition de la catégorie $\underline{MF}_{tor}^{f,r}$ de ([FL], 3.2) : les objets sont la donnée :

- d'un W -module de longueur finie M
- d'une filtration de M par des sous- W -modules $(Fil^i M)_{i \in \mathbb{Z}}$ telle que $Fil^i M = M$ pour $i \leq 0$ et $Fil^i M = 0$ pour $i \geq r + 1$
- pour chaque entier i , d'une application W -semi-linéaire $\phi_i : Fil^i M \rightarrow M$, ces applications étant telles que :
 - (i) $\phi_i|_{Fil^{i+1}} = p\phi_{i+1}$
 - (ii) $\sum Im \phi_i = M$.

Les flèches sont les applications W -linéaires compatibles avec la filtration et qui commutent aux ϕ_i . Dans ([FL], 1.8 et 3.2), il est montré que $\underline{MF}_{tor}^{f,r}$ est une catégorie abélienne. Quand r augmente, les catégories $\underline{MF}_{tor}^{f,r}$ sont de manière évidente des sous-catégories pleines les unes des autres. Soit M un objet de $\underline{MF}_{tor}^{f,r}$, on lui associe un objet $\mathcal{F}^r(M)$ de $\underline{\mathcal{M}}^r$ de la façon suivante : on pose $\mathcal{F}^r(M) = S \otimes_W M$, $Fil^r\mathcal{F}^r(M) = \sum_{j=0}^r Fil^{r-j} S \otimes_W Fil^j M$, $\phi_r = \sum_{j=0}^r \phi_{r-j} \otimes \phi_j$ et $N(P(u) \otimes x) = N(P(u)) \otimes x$ (on vérifie facilement que $\mathcal{F}^r(M)$ est bien dans $\underline{\mathcal{M}}^r$). On définit ainsi un foncteur \mathcal{F}^r trivialement exact et fidèle de $\underline{MF}_{tor}^{f,r}$ dans $\underline{\mathcal{M}}^r$ et on vérifie que \mathcal{F}^r est compatible avec les foncteurs "inclusion" : $\underline{MF}_{tor}^{f,r} \rightarrow \underline{MF}_{tor}^{f,s}$ et $\underline{\mathcal{M}}^r \rightarrow \underline{\mathcal{M}}^s$ pour $0 \leq r \leq s \leq p - 2$ (2.1.2.1). On note $\underline{MF}_k^{f,r}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{MF}_{tor}^{f,r}$ formée des objets tués par p .

PROPOSITION 2.4.1.1. – *Le foncteur \mathcal{F}^r est pleinement fidèle.*

Preuve. – Par un argument standard, il suffit de montrer pour tous $N, M \in \underline{MF}_k^{f,r}$ que $Hom_{\underline{MF}_{tor}^{f,r}}(N, M) \rightarrow Hom_{\underline{\mathcal{M}}^r}(\mathcal{F}^r(N), \mathcal{F}^r(M))$ est un isomorphisme et $Ext_{\underline{MF}_{tor}^{f,r}}^1(N, M) \rightarrow Ext_{\underline{\mathcal{M}}^r}^1(\mathcal{F}^r(N), \mathcal{F}^r(M))$ est injectif. Comme $p\mathcal{F}^r(M) = 0$ entraîne $pM = 0$ pour M dans $\underline{MF}_{tor}^{f,r}$, le noyau de la dernière flèche est contenu dans $Ext_{\underline{MF}_k^{f,r}}^1(N, M)$ et il suffit donc de montrer que le foncteur $\tilde{\mathcal{F}}^r : \underline{MF}_k^{f,r} \rightarrow \tilde{\underline{\mathcal{M}}}_k^r$ induit par \mathcal{F}^r (voir 2.2.2.1) est pleinement fidèle. Mais si M est un objet de $\underline{MF}_k^{f,r}$, on vérifie facilement les deux faits suivants :

(i) si on pose $Fil^i(\tilde{\mathcal{F}}^r(M)) = \{x \in \tilde{\mathcal{F}}^r(M) \text{ tq } v^{r-i}.x \in \tilde{\mathcal{F}}^r(M)\}$ pour $0 \leq i \leq r$, alors $Fil^i M = Fil^i(\tilde{\mathcal{F}}^r(M))^{\tilde{N}=0}$

(ii) $1 \otimes \phi_i(x) = (-1)^{r-i} \tilde{\phi}_r(v^{r-i} \otimes x)$ pour $0 \leq i \leq r$ et $x \in Fil^i M$ qui entraînent bien $Hom_{\underline{MF}_k^{f,r}}(N, M) \simeq Hom_{\tilde{\underline{\mathcal{M}}}_k^r}(\tilde{\mathcal{F}}^r(N), \tilde{\mathcal{F}}^r(M))$ pour N, M dans $\underline{MF}_k^{f,r}$. \square

2.4.2.

Par (2.4.1.1), on peut considérer la catégorie $\underline{MF}_{tor}^{f,r}$ comme une sous-catégorie pleine de $\underline{\mathcal{M}}^r$.

PROPOSITION 2.4.2.1. – *Tout objet de $\underline{\mathcal{M}}^r$ admet une filtration (par des objets de $\underline{\mathcal{M}}^r$) dont les gradués sont dans $\underline{MF}_k^{f,r}$.*

Preuve. – La catégorie $\underline{\mathcal{M}}^r$ étant artinienne (2.1.2.2), il suffit de montrer que tout objet non nul de $\underline{\mathcal{M}}_k^r$ contient un objet non nul de $\underline{MF}_k^{f,r}$ et par (2.2.2.1), on peut le montrer avec $\tilde{\underline{\mathcal{M}}}_k^r$. Soit $\tilde{\mathcal{M}}$ dans $\tilde{\underline{\mathcal{M}}}_k^r$, pour $0 \leq i \leq r$, on pose $Fil^i \tilde{\mathcal{M}} = \{x \in \tilde{\mathcal{M}} \text{ tq } u^{r-i}.x \in Fil^i \tilde{\mathcal{M}}\}$ et $\phi_i : Fil^i \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$, $x \mapsto (-1)^{r-i} \tilde{\phi}_r(u^{r-i}.x)$. Soit $M_1 = \sum_{i=0}^r \phi_i(Fil^i \tilde{\mathcal{M}})$, on pose $Fil^i M_1 = M_1 \cap Fil^i \tilde{\mathcal{M}}$ et on forme de même $M_2 = \sum_{i=0}^r \phi_i(Fil^i M_1)$, puis M_3 etc. Les M_i sont tous non nuls car 1) si $x \in Fil^i \tilde{\mathcal{M}}$ est tel que $\phi_i(x) = 0$, alors $x \in Fil^{i+1} \tilde{\mathcal{M}}$ (en posant $Fil^{r+1} \tilde{\mathcal{M}} = u.Fil^r \tilde{\mathcal{M}}$) et 2) $\tilde{\phi}_r(Fil^i \tilde{\mathcal{M}}) \cap Fil^{i+1} \tilde{\mathcal{M}} \subset \tilde{\phi}_r(Fil^i \tilde{\mathcal{M}}) \cap u.\tilde{\mathcal{M}} = 0$ par (2.2.1.2). Cette chaîne descendante de k -espaces vectoriels non nuls de dimension finie se stabilise donc et donne un k -espace vectoriel de dimension finie $M_\infty \subset \tilde{\phi}_r(Fil^r \tilde{\mathcal{M}})$ stable par \tilde{N} et muni d'une filtration $Fil^i M_\infty$ et de ϕ_i k -semi linéaires tels que $\sum_{i=0}^r \phi_i(Fil^i M_\infty) = M_\infty$, $\tilde{N}(Fil^i M_\infty) \subset Fil^{i-1} M_\infty$ et $\tilde{N} \circ \phi_i = \phi_{i-1} \circ \tilde{N}$. Cette dernière relation montre que \tilde{N} est nilpotent sur M_∞ . Soit $M_{\infty,0} = Ker \tilde{N}$ muni de la filtration et des ϕ_i induits, on construit de même $M_{\infty,1} = \sum_{i=0}^r \phi_i(Fil^i M_{\infty,0})$, $M_{\infty,2} =$ etc. pour aboutir finalement à un objet M non nul de $\underline{MF}_k^{f,r}$. Par (2.2.1.2, (iii)), la flèche : $\tilde{\mathcal{F}}^r(M) = T(\mathcal{F}^r(M)) = k[u]/u^p \otimes_k M \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ est injective, donc $\tilde{\mathcal{F}}^r(M)$ est bien un sous-objet (non nul) de $\tilde{\underline{\mathcal{M}}}_k^r$. \square

COROLLAIRE 2.4.2.2. – *Les objets simples des catégories $\underline{\mathcal{M}}^r$ et $\underline{MF}_{tor}^{f,r}$ sont les mêmes.*

3. Un foncteur pleinement fidèle

Dans cette section, on construit un foncteur V_{st} de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^{p-2}$ dans la catégorie des représentations de p -torsion de G . On montre que ce foncteur est pleinement fidèle.

3.1. Le foncteur V_{st}

3.1.1.

Nous rappelons brièvement la construction des anneaux A_{cris} , A_{st} et \widehat{A}_{st} pour le choix de l'uniformisante p . Pour plus de détails sur \widehat{A}_{st} , voir [Ka] ou [Br1], [Br2]; pour la construction complète des anneaux B_{cris}^+ , B_{st}^+ et B_{dR}^+ , voir [Fo1] et [Fo3].

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, soit $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0})$ l'anneau des vecteurs de Witt de longueur n associé à l'anneau parfait $\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0}$ et $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0})[X]$ l'anneau des polynômes à une indéterminée. On le munit d'une structure de $W_n(k)$ -algèbre en tordant la structure naturelle par $Frob^{-n}$ sur k , de telle sorte que le morphisme canonique :

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\theta}_n : W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0})[X] & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p^n\mathcal{O}_{\bar{K}_0} \\ (a_0, \dots, a_{n-1}) & \mapsto & \widehat{a}_0^{p^n} + p\widehat{a}_1^{p^{n-1}} + \dots + p^{n-1}\widehat{a}_{n-1}^p \\ X & \mapsto & 0 \end{array}$$

où les \widehat{a}_i sont des relevés quelconques des a_i dans $\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p^n\mathcal{O}_{\bar{K}_0}$ soit un morphisme de W_n -algèbres. Soit $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0})^{DP}$ l'enveloppe aux puissances divisées de $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0})$ par rapport au noyau de la restriction de $\widehat{\theta}_n$ compatible avec les puissances divisées canoniques sur $pW_n(\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0})$, l'enveloppe aux puissances divisées (compatible) de $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0})[X]$ par rapport au noyau de $\widehat{\theta}_n$ s'identifie alors à $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0})^{DP} \langle X \rangle$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a une surjection canonique :

$$\begin{array}{ccc} \widehat{f}_n : W_{n+1}(\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0})^{DP} \langle X \rangle & \longrightarrow & W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0})^{DP} \langle X \rangle \\ \gamma_i((a_0, \dots, a_n)) \cdot \gamma_j(X) & \mapsto & \gamma_i((a_0^p, \dots, a_{n-1}^p)) \cdot \gamma_j(X) \end{array}$$

qui donne lieu à un système projectif de W -algèbres. On note $A_{cris} = \varprojlim (W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0})^{DP})$ et $\widehat{A}_{st} = \varprojlim (W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0})^{DP} \langle X \rangle)$. La topologie de la limite projective sur A_{cris} s'identifiant à la topologie p -adique, \widehat{A}_{st} est en fait le complété p -adique de la P.D. algèbre polynomiale $A_{cris} \langle X \rangle$. On munit \widehat{A}_{st} d'une action de Galois, d'un Frobenius ϕ , d'un opérateur de monodromie N et d'une filtration positive Fil de la façon suivante. Soit $(\xi_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ un système compatible de racines $p^{ièmes}$ de p dans $\mathcal{O}_{\bar{K}_0}$ et $[\bar{\xi}]$ l'élément associé dans A_{cris} à partir des représentants de Teichmüller $[\bar{\xi}_n]$ dans $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0})$. Pour tout $g \in G$, on a $g(\xi_n) = \epsilon_n(g) \cdot \xi_n$ où $(\epsilon_n(g))_{n \in \mathbf{N}^*}$ est un système compatible de racines $p^{ièmes}$ de l'unité dans $\mathcal{O}_{\bar{K}_0}$; on note de même $[\bar{\epsilon}(g)]$ l'élément associé dans A_{cris} .

i) sur $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0})$, on définit une action de Galois naturelle continue pour la topologie discrète par $g((a_0, \dots, a_{n-1})) = (g(a_0), \dots, g(a_{n-1}))$, qui s'étend de manière évidente à $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0})^{DP}$ puis à A_{cris} , puis à \widehat{A}_{st} en posant $g(X) = [\bar{\epsilon}(g)]X + [\bar{\epsilon}(g)] - 1$ (l'action est alors continue pour la topologie p -adique),

ii) le Frobenius ϕ défini sur $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0})$ s'étend à $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0})^{DP}$ car $\phi(\ker \widehat{\theta}_n) \subset \ker \widehat{\theta}_n + pW_n(\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0})$. On l'étend alors à A_{cris} puis à \widehat{A}_{st} en posant $\phi(X) = (1 + X)^p - 1$,

iii) sur \widehat{A}_{st} , on définit un opérateur de monodromie comme l'unique dérivation A_{cris} -linéaire N telle que $N(X) = 1 + X$,

iv) soit \widehat{I}_n le noyau de $\widehat{\theta}_n$ et $\widehat{I}_n^{[i]}$ la i -ième puissance divisée de \widehat{I}_n , on définit $Fil^i \widehat{A}_{st} = \varprojlim \widehat{I}_n^{[i]}$. Si $Fil^i A_{cris}$ est la filtration induite sur A_{cris} , de $\widehat{\theta}_n(X) = 0$ on déduit

facilement :

$$Fil^i \widehat{A}_{st} = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k \gamma_k(X), a_k \in A_{cris}, \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0, a_k \in Fil^{i-k}(A_{cris}), 0 \leq k \leq i \right\}$$

Toute cette construction est indépendante du système de racines $(\bar{\xi}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de p , car un deuxième système (ξ'_n) fournit un isomorphisme A_{cris} -linéaire compatible à toutes les structures $\widehat{A}_{st, \xi'} \rightarrow \widehat{A}_{st, \xi}$, $X_{\xi'} \mapsto [\bar{\epsilon}](1 + X_{\xi}) - 1$ où $\epsilon_n = \xi'_n \xi_n^{-1}$. En fait, $W_n(\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0})^{DP} \langle X \rangle$ a une interprétation cristalline logarithmique intrinsèque où les structures précédentes apparaissent naturellement (voir [Ka] ou [Br1]). Soient $B_{cris}^+ = A_{cris}[1/p]$ et $\widehat{B}_{st}^+ = \widehat{A}_{st}[1/p]$, on étend par K_0 -linéarité à toutes ces algèbres les structures précédentes. Remarquons que $N\phi = p\phi N$ et $N(Fil^i \widehat{B}_{st}^+) \subset Fil^{i-1} \widehat{B}_{st}^+$. On a d'autre part un morphisme d'algèbres B_{cris}^+ -linéaire et compatible à l'action de Galois et aux filtrations $f_p : \widehat{B}_{st}^+ \rightarrow B_{dR}^+$ tel que $f_p(X) = \frac{[\bar{\xi}]}{p} - 1$. Soit $T = \text{Log}(1 + X) \in \widehat{A}_{st}$, on définit $A_{st} = A_{cris}[T]$ et $B_{st}^+ = B_{cris}^+[T]$: ils s'injectent naturellement dans \widehat{B}_{st}^+ et sont stables par ϕ , N et l'action de Galois (on les munit de ces opérateurs induits). Par contre, **on ne munit pas** A_{st} ou B_{st}^+ de la filtration induite par \widehat{B}_{st}^+ , mais d'une filtration plus grosse définie par :

$$Fil^i B_{st}^+ = f_p^{-1}(Fil^i B_{dR}^+) \cap B_{st}^+$$

(et A_{st} de la filtration induite). En fait, la flèche f_p restreinte à B_{st}^+ est une injection ([Fo2], 4.2.4) et la filtration sur A_{st} et B_{st}^+ est donc celle induite par B_{dR}^+ . Remarquons que le critère de transversalité de Griffiths n'est plus vérifié sur B_{st}^+ ou A_{st} . Enfin, on démontre facilement que B_{st}^+ (resp. A_{st}) correspond exactement aux éléments de \widehat{B}_{st}^+ (resp. \widehat{A}_{st}) annulés par une puissance de la monodromie N ([Ka], 3.7 ou [Br2], 7.1).

Le lien avec l'algèbre S de (2.1.1) vient du lemme :

LEMME 3.1.1.1 ([Br2], 4.2). – *On a un isomorphisme de modules filtrés compatible aux Frobenius et aux dérivations $S \xrightarrow{\sim} \widehat{A}_{st}^G$ tel que $u \mapsto [\bar{\xi}](1 + X)^{-1}$.*

3.1.2.

Nous donnons quelques propriétés supplémentaires de A_{cris} et \widehat{A}_{st} utiles pour la suite.

LEMME 3.1.2.1. – (i) *Pour $i \in \mathbb{N}$, A_{cris} , $gr_{Fil}^i A_{cris}$, \widehat{A}_{st} et $gr_{Fil}^i \widehat{A}_{st}$ sont des W -modules plats.*

(ii) *Pour $0 \leq i \leq p - 1$, on a $\phi(Fil^i A_{cris}) \subset p^i A_{cris}$ et $\phi(Fil^i \widehat{A}_{st}) \subset p^i \widehat{A}_{st}$.*

Preuve. – (i) L'algèbre A_{cris} est sans torsion et $gr_{Fil}^i A_{cris} \simeq \mathcal{O}_{C_p}$ ([Fo3], 3.6-3.7), d'où les platitudes pour A_{cris} . Celles pour \widehat{A}_{st} se déduisent de sa description à partir de A_{cris} .

(ii) Il suffit de voir que si $0 \leq i \leq p - 1$, on a $\phi(Fil^i A_{cris}) \subset p^i A_{cris}$ et $\phi(\gamma_i(X)) \in p^i \widehat{A}_{st}$. On remarque que $Fil^i A_{cris}$ est le complété p -adique de l'idéal engendré par les $(\gamma_m([\bar{\xi}] - p))_{m \geq i}$ ([Fo3], 3.6-3.7) et on a $\phi(\gamma_m([\bar{\xi}] - p)) = \gamma_m([\bar{\xi}]^p - p) \in \gamma_m(p) A_{cris} \subset p^i A_{cris}$ si $m \geq i$ et $0 \leq i \leq p - 1$. On a $\phi(\gamma_i(X)) = \gamma_i((1 + X)^p - 1) = \gamma_i(X^p + pT)$ où $T \in W[X]$, i.e. $\phi(\gamma_i(X)) = p^i \frac{((p-1)! \gamma_p(X) - T)^i}{i!}$. \square

Remarque. – Malheureusement, le (ii) est faux en général pour $i \geq p$ (par exemple, $\gamma_p(u - p) \in \text{Fil}^p(S)$ mais $\phi(\gamma_p(u - p)) = \gamma_p(u^p - p) \notin p^p S$).

Pour $0 \leq i \leq p - 1$, on définit $\phi_i : \text{Fil}^i A_{\text{cris}} \rightarrow A_{\text{cris}}$ (resp. $\phi_i : \widehat{\text{Fil}}^i A_{\text{st}} \rightarrow \widehat{A}_{\text{st}}$) par $\phi_i = \phi/p^i$. Pour $i \in \mathbf{N}$, on définit $\widehat{\text{Fil}}^i(A_{\text{cris}}/p^n A_{\text{cris}})$ (resp. $\widehat{\text{Fil}}^i(\widehat{A}_{\text{st}}/p^n \widehat{A}_{\text{st}})$) comme l'image de $\text{Fil}^i A_{\text{cris}}$ (resp. $\text{Fil}^i \widehat{A}_{\text{st}}$). Par (3.1.2.1), on a un isomorphisme canonique $\widehat{\text{Fil}}^i(A_{\text{cris}}/p^n A_{\text{cris}}) \simeq \text{Fil}^i A_{\text{cris}}/p^n \text{Fil}^i A_{\text{cris}}$ (resp. $\widehat{\text{Fil}}^i(\widehat{A}_{\text{st}}/p^n \widehat{A}_{\text{st}}) \simeq \text{Fil}^i \widehat{A}_{\text{st}}/p^n \text{Fil}^i \widehat{A}_{\text{st}}$) ce qui permet de définir, pour $0 \leq i \leq p - 1$, $\phi_i : \widehat{\text{Fil}}^i(A_{\text{cris}}/p^n A_{\text{cris}}) \rightarrow A_{\text{cris}}/p^n A_{\text{cris}}$ (resp. avec $\widehat{A}_{\text{st}}/p^n \widehat{A}_{\text{st}}$) comme le quotient de ϕ_i .

LEMME 3.1.2.2. – (i) Soit R la limite projective du système projectif :

$$\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0} \xleftarrow{\text{Frob}} \mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0} \xleftarrow{\text{Frob}} \mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0} \dots$$

on a un isomorphisme canonique $R[X_i]/(\bar{\xi}^p, X_i^p)_{i \in \mathbf{N}^*} \simeq A_{\text{cris}}/pA_{\text{cris}}$ tel que $[\bar{\xi}] \in A_{\text{cris}}/pA_{\text{cris}}$ correspond à $\bar{\xi} = (\xi_n \bmod p)_{n \in \mathbf{N}^*} \in R$, $\gamma_{p^i}([\bar{\xi}])$ à X_i et $\text{Fil}^r(A_{\text{cris}}/pA_{\text{cris}})$ ($0 \leq r \leq p$) à l'idéal engendré par $\bar{\xi}^r$ et X_i ($i \in \mathbf{N}^*$).

(ii) Soient r, s des entiers tels que $0 \leq r \leq s \leq p - 1$:

$$\{x \in A_{\text{cris}}/p^n A_{\text{cris}} \text{ tq } ([\bar{\xi}] - p)^{s-r} \cdot x \in \text{Fil}^s(A_{\text{cris}}/p^n A_{\text{cris}})\} = \text{Fil}^r(A_{\text{cris}}/p^n A_{\text{cris}})$$

Preuve. – (i) résulte de l'explicitation de l'enveloppe aux puissances divisées R^{DP} de R par rapport à l'idéal $(\bar{\xi})$ et de l'isomorphisme $R^{DP} \simeq A_{\text{cris}}/pA_{\text{cris}}$ ([Fo3, 3.7]).

(ii) Par dévissage à partir des propriétés précédentes de $\text{Fil}^r(A_{\text{cris}}/p^n A_{\text{cris}})$, on se ramène au cas $n = 1$. Par (i), on voit facilement qu'il suffit de montrer $\{x \in R/\bar{\xi}^p R \text{ tq } \bar{\xi}^{s-r} \cdot x \in \bar{\xi}^s(R/\bar{\xi}^p R)\} = \bar{\xi}^r(R/\bar{\xi}^p R)$ et ceci vient du fait que $\bar{\xi}$ n'est pas un diviseur de zéro dans R . \square

LEMME 3.1.2.3. – (i) $(\widehat{A}_{\text{st}}/p^n \widehat{A}_{\text{st}})^{N=0} = A_{\text{cris}}/p^n A_{\text{cris}}$

(ii) Soient r, s des entiers tels que $0 \leq r \leq s \leq p - 1$:

$$\{x \in \widehat{A}_{\text{st}}/p^n \widehat{A}_{\text{st}} \text{ tq } (u - p)^{s-r} \cdot x \in \text{Fil}^s(\widehat{A}_{\text{st}}/p^n \widehat{A}_{\text{st}})\} = \text{Fil}^r(\widehat{A}_{\text{st}}/p^n \widehat{A}_{\text{st}})$$

Preuve. – (i) vient du fait que $N(X)$ est une unité et (ii) se ramène à (3.1.2.2, (ii)) sachant que $u = [\bar{\xi}](1 + X)^{-1}$. \square

3.1.3.

Soit $\widehat{A}_{\text{st}, \infty} = \widehat{A}_{\text{st}} \otimes_W K_0/W$, d'après (3.1.1) et (3.1.2), c'est un objet de $'\underline{\mathcal{M}}^{p-2}$. Notons $\text{Rep}_{\mathbf{Z}_p}(G)$ la catégorie des représentations linéaires de G dans un \mathbf{Z}_p -module. On définit un foncteur $V_{\text{st}} : \underline{\mathcal{M}}^{p-2} \rightarrow \text{Rep}_{\mathbf{Z}_p}(G)$ par $V_{\text{st}}(\mathcal{M}) = \text{Hom}_{\underline{\mathcal{M}}^{p-2}}(\mathcal{M}, \widehat{A}_{\text{st}, \infty})$ avec $g(f)(x) = g(f(x))$ si $f \in \text{Hom}_{\underline{\mathcal{M}}^{p-2}}(\mathcal{M}, \widehat{A}_{\text{st}, \infty})$. Les représentations obtenues sont par construction tuées par la puissance de p qui annule \mathcal{M} et continues pour la topologie discrète. L'objet de cette section est de prouver le théorème suivant :

THÉORÈME 3.1.3.1. – *Le foncteur V_{st} est exact et pleinement fidèle. De plus, si $\mathcal{M} \simeq \bigoplus_{i \in I} S/p^{n_i} S$ (isomorphisme de S -modules et I fini), alors $V_{\text{st}}(\mathcal{M}) \simeq \bigoplus_{i \in I} \mathbf{Z}_p/p^{n_i} \mathbf{Z}_p$ (isomorphisme de \mathbf{Z}_p -modules).*

COROLLAIRE 3.1.3.2. – *La restriction du foncteur V_{st} aux sous-catégories pleines $\underline{\mathcal{M}}^r$ ($0 \leq r \leq p - 2$) est exacte et pleinement fidèle.*

3.2. Exactitude et fidélité

3.2.1.

Soit $A_{cris,\infty} = A_{cris} \otimes_W K_0/W$, dans [FL], Fontaine et Laffaille introduisent le foncteur V_{cris} de $\underline{MF}_{tor}^{f,p-2}$ dans $Rep_{\mathbb{Z}_p}(G)$ défini par :

$$V_{cris}(M) = Hom_{\mathcal{MF}}(M, A_{cris,\infty})$$

(en fait, ils utilisent une version "primitive" de $A_{cris,\infty}$, voir ([Fo3], 3.8)) où M est un objet de $\underline{MF}_{tor}^{f,p-2}$ et \mathcal{MF} une certaine catégorie abélienne ([FL], 1.11) que nous n'utiliserons pas, l'indice \mathcal{MF} signifiant qu'on prend les morphismes W -linéaires compatibles aux filtrations et commutant aux ϕ_i .

PROPOSITION 3.2.1.1. – La restriction du foncteur V_{st} à $\underline{MF}_{tor}^{f,p-2}$ (par 2.4.1.1) induit le foncteur V_{cris} .

Preuve. – Soit M un objet de $\underline{MF}_{tor}^{f,p-2}$ et notons $\mathcal{M} = \mathcal{F}^{p-2}(M)$ l'objet de $\underline{\mathcal{MF}}_{tor}^{f,p-2}$ associé. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ suffisamment grand pour que $V_{cris}(M) = Hom_{\mathcal{MF}}(M, A_{cris}/p^n A_{cris})$, par extension des scalaires à S et l'inclusion de $A_{cris}/p^n A_{cris}$ dans $\widehat{A_{st}/p^n A_{st}}$, il est clair qu'on a un morphisme injectif de modules galoisiens $Hom_{\mathcal{MF}}(M, A_{cris}/p^n A_{cris}) \rightarrow Hom_{\underline{\mathcal{M}}^{p-2}}(\mathcal{M}, \widehat{A_{st}/p^n A_{st}})$ et le lemme (3.1.2.3) donne ce qu'il faut pour qu'il s'agisse d'un isomorphisme. \square

3.2.2.

La catégorie $'\underline{\mathcal{M}}^{p-2}$ n'est pas abélienne, mais on y dispose de suites exactes courtes : nous dirons que $0 \rightarrow \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'' \rightarrow 0$ est une suite exacte courte dans $'\underline{\mathcal{M}}^{p-2}$ si la suite de S -modules est exacte ainsi que la suite $0 \rightarrow Fil^{p-2}\mathcal{M}' \rightarrow Fil^{p-2}\mathcal{M} \rightarrow Fil^{p-2}\mathcal{M}'' \rightarrow 0$. L'assertion $Ext_{\underline{\mathcal{M}}^{p-2}}^1(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = 0$ signifie alors que toute suite exacte dans $'\underline{\mathcal{M}}^{p-2}$: $0 \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow 0$ est scindée dans $'\underline{\mathcal{M}}^{p-2}$. En raisonnant directement sur les classes d'extension, on montre que si $0 \rightarrow \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'' \rightarrow 0$ est une suite exacte courte dans $'\underline{\mathcal{M}}^{p-2}$ et si $\mathcal{N} \in '\underline{\mathcal{M}}^{p-2}$, alors : 1) si $Ext^1(\mathcal{M}', \mathcal{N}) = 0$ et $Ext^1(\mathcal{M}'', \mathcal{N}) = 0$, on a $Ext^1(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = 0$ et 2) si $Ext^1(\mathcal{M}'', \mathcal{N}) = 0$, on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow Hom(\mathcal{M}'', \mathcal{N}) \rightarrow Hom(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \rightarrow Hom(\mathcal{M}', \mathcal{N}) \rightarrow 0$$

PROPOSITION 3.2.2.1. – Soit M un objet de $\underline{MF}_{tor}^{f,p-2}$, alors

$$Ext_{\underline{\mathcal{M}}^{p-2}}^1(\mathcal{F}^{p-2}(M), \widehat{A_{st,\infty}}) = 0.$$

Preuve. – Par dévissage en utilisant ce qui précède, on peut supposer $M \in \underline{MF}_k^{f,p-2}$. Notons $\mathcal{M} = \mathcal{F}^{p-2}(M)$, il suffit d'abord d'avoir $Ext_{\underline{\mathcal{M}}_k^{p-2}}^1(\mathcal{M}, \widehat{A_{st}/p A_{st}}) = 0$. En effet, si \mathcal{E} est une extension de \mathcal{M} par $\widehat{A_{st,\infty}}$ dans $'\underline{\mathcal{M}}^{p-2}$, on regarde le diagramme commutatif

à lignes et colonnes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & \widehat{A_{st}/pA_{st}} & \rightarrow & \text{Ker}(p) & \rightarrow & \mathcal{M} \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow Id \\
 0 & \rightarrow & \widehat{A_{st,\infty}} & \rightarrow & \mathcal{E} & \rightarrow & \mathcal{M} \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow p & & \downarrow p & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & \widehat{A_{st,\infty}} & \rightarrow & \text{Im}(p) & \rightarrow & 0 \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

et si on a une section sur la ligne du haut, on a une section sur la ligne du milieu. Soit donc $0 \rightarrow \widehat{A_{st}/pA_{st}} \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\sigma} S/pS \otimes_k M \rightarrow 0$ une extension de $\mathcal{M} = \mathcal{F}^{p-2}(M) = S/pS \otimes_k M$ par $\widehat{A_{st}/pA_{st}}$ dans $'\mathcal{M}_k^{p-2}$ et notons (e_1, \dots, e_n) une base de M adaptée à la filtration, r_i le plus petit entier tel que $e_i \in \text{Fil}^{p-2-r_i} M$ et \hat{e}_i des relevés quelconques des e_i dans \mathcal{E} . On va corriger les \hat{e}_i pour que la flèche de S -modules $s : e_i \mapsto \hat{e}_i$ soit un morphisme de $'\mathcal{M}_k^{p-2}$.

1) Compatibilité à $\text{Fil}^{p-2}\mathcal{M}$ et $\text{Fil}^{p-2}\mathcal{E}$

On sait qu'il existe $\mu_1, \dots, \mu_n \in \widehat{A_{st}/pA_{st}}$ tels que $u^{r_i} \cdot \hat{e}_i + \mu_i \in \text{Fil}^{p-2}\mathcal{E}$, d'où, puisque $u^{p-2}\mathcal{E} \subset \text{Fil}^{p-2}\mathcal{E}$, $u^{p-2-r_i} \cdot \mu_i \in \text{Fil}^{p-2}(\widehat{A_{st}/pA_{st}})$ soit (3.1.2.3, (ii)) $\mu_i \in \text{Fil}^{r_i}(\widehat{A_{st}/pA_{st}})$. En faisant agir l'opérateur N de \mathcal{E} sur $u^{r_i} \cdot \hat{e}_i + \mu_i$, on trouve des $y_i^{(r)}$ dans \mathcal{E} tels que pour $0 \leq r \leq p-3$: $u^r \cdot (u^{r_i} \cdot y_i^{(r)} + N^r(\mu_i)) \in \text{Fil}^{p-2}\mathcal{E}$, d'où on déduit comme précédemment :

- si $0 \leq r \leq p-2-r_i$, $N^r(\mu_i) \in \text{Fil}^{r_i}(\widehat{A_{st}/pA_{st}})$
- si $p-2-r_i \leq r \leq p-3$, $N^r(\mu_i) \in \text{Fil}^{p-2-r}(\widehat{A_{st}/pA_{st}})$

Comme on peut dès le départ choisir les μ_i de la forme $\mu_i = \sum_{j=0}^{p-3} a_j^{(i)} \gamma_j(X)$ (avec les $a_j^{(i)} \in A_{cris}/pA_{cris}$), on obtient

$$a_0^{(i)} \in \text{Fil}^{r_i}(A_{cris}/pA_{cris}), a_1^{(i)} \in \text{Fil}^{r_i}(A_{cris}/pA_{cris}), \dots, a_{p-2-r_i}^{(i)} \in \text{Fil}^{r_i}(A_{cris}/pA_{cris}), \\
 a_{p-2-r_i+1}^{(i)} \in \text{Fil}^{r_i-1}(A_{cris}/pA_{cris}), \dots, a_{p-3}^{(i)} \in \text{Fil}^1(A_{cris}/pA_{cris}).$$

On peut donc écrire (c.f. 3.1.2.2 (i)) $\mu_i = \sum_{j=0}^{p-2-r_i} \bar{\xi}^{r_i} b_j^{(i)} \gamma_j(X) + v_i$ avec $b_j^{(i)} \in A_{cris}/pA_{cris}$ et $v_i \in \text{Fil}^{p-2}(\widehat{A_{st}/pA_{st}})$. Finalement, on obtient une flèche s compatible aux Fil^{p-2} en remplaçant \hat{e}_i par $\hat{e}_i + \sum_{j=0}^{p-2-r_i} b_j^{(i)} (1+X)^{r_i} \gamma_j(X)$.

2) Compatibilité à la monodromie

Remarquons que $N(\hat{e}_i) \in \widehat{A_{st}/pA_{st}}$. On cherche des $\mu_i \in \text{Fil}^{p-2-r_i}(\widehat{A_{st}/pA_{st}})$ tels que $N(\hat{e}_i + \mu_i) = 0$. De $u \cdot N(u^{r_i} \cdot \hat{e}_i) \in \text{Fil}^{p-2}\mathcal{E}$, on tire $u^{r_i+1} \cdot N(\hat{e}_i) \in \text{Fil}^{p-2}(\widehat{A_{st}/pA_{st}})$ soit $N(\hat{e}_i) \in \text{Fil}^{p-2-r_i-1}(\widehat{A_{st}/pA_{st}})$. Soient $b_j^{(i)} \in A_{cris}/pA_{cris}$, $j \geq 1$ tels que :

$$\sum_{j \in \mathbb{N}^*} b_j^{(i)} \gamma_{j-1}(X) = -(1+X)^{-1} N(\hat{e}_i)$$

(les $b_j^{(i)}$ sont tous nuls sauf un nombre fini) et soit $b_0^{(i)} \in A_{cris}/pA_{cris}$ quelconque, alors $\mu_i = \sum_{j \in \mathbb{N}} b_j^{(i)} \gamma_j(X) \in \text{Fil}^{p-2-r_i}(\widehat{A_{st}/pA_{st}})$ et en remplaçant \hat{e}_i par

$\hat{e}_i + \mu_i$, on a bien $N(\hat{e}_i + \mu_i) = 0$. La flèche s obtenue est compatible aux Fil^{p-2} et à la monodromie.

3) Compatibilité à ϕ_{p-2}

Soit \mathcal{G} l'unique matrice inversible de S/pS telle que :

$$\begin{pmatrix} \phi_{p-2}(u^{r_1} \cdot e_1) \\ \vdots \\ \phi_{p-2}(u^{r_n} \cdot e_n) \end{pmatrix} = \mathcal{G} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$$

La matrice \mathcal{G} s'écrit $\mathcal{G} = \mathcal{G}^0 + \mathcal{G}^1$ avec $\mathcal{G}^0 \in GL_n(k)$ et $\mathcal{G}^1 \in M_n(\gamma_p(u).k[\gamma_p(u)])$. On cherche des $\mu_i \in Fil^{p-2-r_i}(A_{cris}/pA_{cris})$ tels que :

$$\begin{pmatrix} \phi_{p-2}(u^{r_1} \cdot (\hat{e}_1 + \mu_1)) \\ \vdots \\ \phi_{p-2}(u^{r_n} \cdot (\hat{e}_n + \mu_n)) \end{pmatrix} = \mathcal{G} \begin{pmatrix} \hat{e}_1 + \mu_1 \\ \vdots \\ \hat{e}_n + \mu_n \end{pmatrix}$$

On sait que :

$$\begin{pmatrix} \phi_{p-2}(u^{r_1} \cdot \hat{e}_1) \\ \vdots \\ \phi_{p-2}(u^{r_n} \cdot \hat{e}_n) \end{pmatrix} - \mathcal{G} \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \vdots \\ \hat{e}_n \end{pmatrix} \in (\widehat{A_{st}/pA_{st}})^n$$

Mais pour tout i , $N(\hat{e}_i) = 0$ et :

$$N(\phi_{p-2}(u^{r_i} \cdot \hat{e}_i)) = c^{-1} \cdot \phi_{p-2}(u \cdot N(u^{r_i} \hat{e}_i)) = c^{-1} \cdot \phi_{p-2}(-r_i u^{r_i+1} \cdot \hat{e}_i) = 0$$

Puisque $N(k[\gamma_p(u)]) = 0$, on a aussi :

$$N\left(\mathcal{G} \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \vdots \\ \hat{e}_n \end{pmatrix}\right) = 0$$

d'où :

$$\begin{pmatrix} \phi_{p-2}(u^{r_1} \cdot \hat{e}_1) \\ \vdots \\ \phi_{p-2}(u^{r_n} \cdot \hat{e}_n) \end{pmatrix} - \mathcal{G} \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \vdots \\ \hat{e}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in (A_{cris}/pA_{cris})^n$$

En remarquant que $\gamma_p(u) = \gamma_p(\bar{\xi})$ dans $\widehat{A_{st}/pA_{st}}$, on a donc à résoudre dans $(A_{cris}/pA_{cris})^n$:

$$\begin{pmatrix} \phi_{p-2}(\bar{\xi}^{r_1} \mu_1) \\ \vdots \\ \phi_{p-2}(\bar{\xi}^{r_n} \mu_n) \end{pmatrix} = \mathcal{G} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

avec $\mu_i \in \text{Fil}^{p-2-r_i}(A_{\text{cris}}/pA_{\text{cris}})$. Tout $x \in A_{\text{cris}}/pA_{\text{cris}}$ s'écrit de façon unique $x = x^0 + x^1$ avec $x^0 \in R/\bar{\xi}^p R$ et $x^1 \in \text{Fil}^p(A_{\text{cris}}/pA_{\text{cris}})$ (3.1.2.2, (i)) et le système précédent est équivalent au système :

$$\begin{pmatrix} \left(\phi_{p-2}(\bar{\xi}^{r_1} \mu_1^0)\right)^0 \\ \vdots \\ \left(\phi_{p-2}(\bar{\xi}^{r_n} \mu_n^0)\right)^0 \end{pmatrix} = \mathcal{G}^0 \begin{pmatrix} \mu_1^0 \\ \vdots \\ \mu_n^0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1^0 \\ \vdots \\ c_n^0 \end{pmatrix} \tag{0}$$

$$\begin{pmatrix} \left(\phi_{p-2}(\bar{\xi}^{r_1} \mu_1^0)\right)^1 \\ \vdots \\ \left(\phi_{p-2}(\bar{\xi}^{r_n} \mu_n^0)\right)^1 \end{pmatrix} = \mathcal{G}^1 \begin{pmatrix} \mu_1^0 \\ \vdots \\ \mu_n^0 \end{pmatrix} + \mathcal{G} \begin{pmatrix} \mu_1^1 \\ \vdots \\ \mu_n^1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1^1 \\ \vdots \\ c_n^1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Par ([Wa], 2.3.2.2) on sait que (0) admet des solutions. Comme \mathcal{G} est inversible, à partir d'une solution $(\mu_1^0, \dots, \mu_n^0)$ de (0) on déduit une unique solution $(\mu_1^1, \dots, \mu_n^1)$ de (1). En posant $\mu_i = \mu_i^0 + \mu_i^1$ et en remplaçant \hat{e}_i par $\hat{e}_i + \mu_i$, on a construit une section $s : e_i \mapsto \hat{e}_i$ dans $'\mathcal{M}_k^{p-2}$. \square

3.2.3.

PROPOSITION 3.2.3.1. – *Le foncteur V_{st} est exact et fidèle de \mathcal{M}^{p-2} (et donc de \mathcal{M}^r pour tout $r \in \{0, \dots, p-2\}$) dans $\text{Rep}_{\mathbf{Z}_p}(G)$.*

Preuve. – Par (2.1.2.2), (3.2.2) et (2.4.2.2) $\text{Ext}_{\mathcal{M}^{p-2}}^1(\mathcal{M}, \widehat{A_{st, \infty}}) = 0$ pour tout $\mathcal{M} \in \mathcal{M}^{p-2}$, donc le foncteur V_{st} est exact. Pour la fidélité, en utilisant (2.1.2.2), (2.4.1.1), (2.4.2.2) et (3.2.1.1), on se ramène à montrer la fidélité de V_{cris} , ce qui est fait dans ([FL], 3.3). \square

COROLLAIRE 3.2.3.2. – *Soit \mathcal{M} un objet de \mathcal{M}^{p-2} de la forme $\mathcal{M} \simeq \bigoplus_{i \in I} S/p^{n_i} S$, alors $V_{st}(\mathcal{M})$ est de la forme $V_{st}(\mathcal{M}) \simeq \bigoplus_{i \in I} \mathbf{Z}_p/p^{n_i} \mathbf{Z}_p$.*

Preuve. – Si $p\mathcal{M} = 0$, on a par (2.1.2.2), (3.2.3.1), (2.4.2.2), (3.2.1.1) et ([FL], 5.3) : $\dim_{\mathbf{F}_p} V_{st}(\mathcal{M}) = \text{rg}_{S/pS} \mathcal{M}$. Un dévissage facile conclut. \square

3.3. Pleine fidélité

On suit, mutatis mutandis, la preuve de Faltings ([Fa2], 5.2).

3.3.1.

On rappelle que $A_{\text{cris}}/pA_{\text{cris}} \simeq R[X_i]/(\bar{\xi}^p, X_i^p)_{i \in \mathbf{N}^*}$ (3.1.2.2, (i)) et que $\widehat{A_{st}}/p\widehat{A_{st}} \simeq A_{\text{cris}}/pA_{\text{cris}} \langle X \rangle$. Soient $A = R/\bar{\xi}^p R$ et $\tilde{A} = A \langle X \rangle$, il est clair que le morphisme surjectif R -linéaire $\widehat{A_{st}}/p\widehat{A_{st}} \rightarrow \tilde{A}$, $X_i \mapsto 0$ ($i \in \mathbf{N}^*$) permet de munir \tilde{A} des structures quotients de celles de $\widehat{A_{st}}/p\widehat{A_{st}}$ et, en particulier, \tilde{A} est un objet de $'\mathcal{M}_k^{p-2}$. D'autre part, la projection sur la première composante $R = \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0} \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0}$

induit un isomorphisme $R/\bar{\xi}^p R \simeq \mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0}$. On a donc un isomorphisme $\tilde{A} \simeq \mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0} \langle X \rangle$ et on vérifie que les structures images correspondantes sont données par $\text{Fil}^i(\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0}) = \bar{\xi}_1^i \cdot (\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0})$ (donc $\text{Fil}^i(\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0}) = 0$ si $i \geq p$, rappelons que $(\xi_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est un système de racines $p^{i \text{èmes}}$ de p dans $\mathcal{O}_{\bar{K}_0}$), $\phi_i(\bar{\xi}_1^i \cdot x) = (-1)^i x^p$

($0 \leq i \leq p-1$), $Fil^i \tilde{A} = \{ \sum_{k=0}^N a_k \gamma_k(X), N \in \mathbf{N}, a_k \in Fil^{i-k}(\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0}) \}$,
 $\phi_1(X) = \frac{(1+X)^{p-1}}{p}$, $N(X) = 1 + X$ et $u = \tilde{\xi}_1(1+X)^{-1}$. Comme en (3.1.2.3), on a :

LEMME 3.3.1.1. – (i) $(\tilde{A})^{N=0} = \mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0}$

(ii) Soient r, s des entiers tels que $0 \leq r \leq s \leq p-1$, on a $\{x \in \tilde{A} \text{ tq } u^{s-r}.x \in Fil^s \tilde{A}\} = Fil^r \tilde{A}$.

En raisonnant comme dans ([FL], 6.2), on se ramène à montrer la pleine fidélité pour k algébriquement clos. Par un dévissage standard (voir [FL], 6.5), on est ramené à montrer que :

$$Ext_{\underline{\mathcal{M}}^{p-2}}^1(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \rightarrow Ext_{Rep_{\mathbb{F}_p}(G)}^1(V_{st}(\mathcal{N}), V_{st}(\mathcal{M}))$$

est injectif et que :

$$Hom_{\underline{\mathcal{M}}^{p-2}}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \rightarrow Hom_{Rep_{\mathbb{F}_p}(G)}(V_{st}(\mathcal{N}), V_{st}(\mathcal{M}))$$

est un isomorphisme pour \mathcal{M} et \mathcal{N} objets simples de $\underline{\mathcal{M}}^{p-2}$. L'isomorphisme provient de (2.4.1.1), (2.4.2.2), (3.2.1.1) et ([FL], 6.5). Si $0 \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow 0$ est une suite exacte dans $\underline{\mathcal{M}}^{p-2}$ avec \mathcal{N} et \mathcal{M} simples et si \mathcal{P} n'est pas tué par p , par (3.2.3.2) $V_{st}(\mathcal{P})$ n'est pas tué par p et la suite exacte $0 \rightarrow V_{st}(\mathcal{M}) \rightarrow V_{st}(\mathcal{P}) \rightarrow V_{st}(\mathcal{N}) \rightarrow 0$ n'est pas scindée. Il suffit donc de montrer que l'application canonique $e(\mathcal{M}, \mathcal{N}) : Ext_{\underline{\mathcal{M}}^{p-2}}^1(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \rightarrow Ext_{Rep_{\mathbb{F}_p}(G)}^1(V_{st}(\mathcal{N}), V_{st}(\mathcal{M}))$ est injective pour \mathcal{M} et \mathcal{N} simples. Soient M et N les objets simples correspondants de $\underline{MF}_k^{f,p-2}$ (2.4.2.2), par ([FL], 6.6), il suffit de montrer que $Ker(e(\mathcal{M}, \mathcal{N})) \subset Ext_{\underline{MF}_k^{f,p-2}}^1(M, N)$ i.e., si $0 \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow 0$ est une extension de \mathcal{M} par \mathcal{N} dans $\underline{\mathcal{M}}^{p-2}$ telle que $V_{st}(\mathcal{P}) \simeq V_{st}(\mathcal{N}) \oplus V_{st}(\mathcal{M})$, alors \mathcal{P} provient aussi de $\underline{MF}_k^{f,p-2}$. Nous allons travailler avec les catégories $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}_k^{p-2}$ et $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}_k^{p-2}$ (2.2.1), plus commodes.

LEMME 3.3.1.2. – Soit \mathcal{P} un objet de $\underline{\mathcal{M}}_k^{p-2}$ et $\tilde{\mathcal{P}}$ l'objet associé de $\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}_k^{p-2}$ (2.2.1), on a un isomorphisme \mathbf{F}_p -linéaire de modules galoisiens :

$$V_{st}(\mathcal{P}) = Hom_{\underline{\mathcal{M}}_k^{p-2}}(\mathcal{P}, \widehat{A_{st}}/p\widehat{A_{st}}) \xrightarrow{\sim} Hom_{\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}_k^{p-2}}(\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{A})$$

Preuve. – Supposons d'abord que \mathcal{P} provient d'un objet P de $\underline{MF}_k^{f,p-2}$, on sait que $V_{st}(\mathcal{P}) \simeq V_{cris}(P)$ (3.2.1.1). La même démonstration qu'en (3.2.1.1) à partir de (3.3.1.1) donne $Hom_{\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}_k^{p-2}}(\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{A}) \simeq Hom_{\mathcal{MF}}(P, \mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0})$ (voir 3.2.1 pour la "notation" \mathcal{MF}). Il suffit donc de montrer que la projection $A_{cris}/pA_{cris} \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0}$ déduite de $\widehat{A_{st}}/p\widehat{A_{st}} \rightarrow \tilde{A}$ induit un isomorphisme $V_{cris}(P) \simeq Hom_{\mathcal{MF}}(P, \mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0})$ ce qui est fait dans ([Wa], 2.3.1.2). La même preuve qu'en (3.2.2.1) et (3.2.3.1) (en plus simple) donne $Ext_{\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}_k^{p-2}}^1(\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{A}) = 0$ pour $\tilde{\mathcal{P}} \in \widetilde{\underline{\mathcal{M}}}_k^{p-2}$, donc le foncteur $Hom_{\widetilde{\underline{\mathcal{M}}}_k^{p-2}}(\cdot, \tilde{A})$ est exact comme V_{st} et le résultat découle du cas $\underline{MF}_k^{f,p-2}$ et d'un dévissage élémentaire. \square

Remarque. – Je remercie le referee de m'avoir signalé une preuve directe, sans dévissages, de ce lemme.

3.3.2.

Soit $0 \rightarrow \tilde{\mathcal{N}} \rightarrow \tilde{\mathcal{P}} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}} \rightarrow 0$ une suite exacte dans $\tilde{\mathcal{M}}_k^{p-2}$ avec $\tilde{\mathcal{M}}$ et $\tilde{\mathcal{N}}$ simples et $V_{st}(\tilde{\mathcal{P}}) \simeq V_{st}(\tilde{\mathcal{N}}) \oplus V_{st}(\tilde{\mathcal{M}})$ (si $\tilde{\mathcal{P}}$ est dans $\tilde{\mathcal{M}}_k^{p-2}$, on note $V_{st}(\tilde{\mathcal{P}}) = V_{st}(T^{-1}(\tilde{\mathcal{P}})) \simeq Hom_{\tilde{\mathcal{M}}_k^{p-2}}(\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathcal{A}})$ par (3.3.1.2)). Par ([FL], 5.3), l'action de Galois sur $V_{st}(\tilde{\mathcal{N}})$ et $V_{st}(\tilde{\mathcal{M}})$ est modérément ramifiée, donc sur $V_{st}(\tilde{\mathcal{P}})$ aussi. Notons K_0^{mod} l'extension maximale modérément ramifiée de K_0 dans \bar{K}_0 (rappelons que $K_0^{nr} = K_0$ puisque k est algébriquement clos), $\mathcal{O}_{K_0^{mod}}$ l'anneau de ses entiers et $G^{mod} = Gal(\bar{K}_0/K_0^{mod}) \subset G$. Soit $\rho \in Hom_{\tilde{\mathcal{M}}_k^{p-2}}(\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathcal{A}})$, pour tout $x \in \tilde{\mathcal{P}}$, on a des $\rho_i(x)$ uniques dans $\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0}$ et presque tous nuls tels que $\rho(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \rho_i(x) \cdot \gamma_i(X)$. On a $g(\rho(x)) = \rho(x)$ pour tout $g \in G^{mod}$ et on vérifie facilement à partir des conditions de commutation les deux égalités ($i \in \mathbf{N}, x \in \tilde{\mathcal{P}}, g \in G^{mod}$) :

$$\rho_i(x) = \rho_0(\tilde{N} \circ (\tilde{N} - Id) \circ \dots \circ (\tilde{N} - (i-1)Id)(x)) \tag{1}$$

$$\rho_0(x) = \sum_{i=0}^{p-1} g(\rho_i(x)) \gamma_i(\epsilon_1(g) - 1) \tag{2}$$

où $g(\xi_1) = \epsilon_1(g)\xi_1$. On note $K_1^{mod} = K_0^{mod}[\xi_1]$, $\mathcal{O}_{K_1^{mod}}$ les entiers de K_1^{mod} et G_1^{mod} le groupe de Galois $Gal(\bar{K}_0/K_1^{mod}) \subset G^{mod}$.

LEMME 3.3.2.1. - (i) Pour $r \in \mathbf{Z}$, on a $\xi_1^r \mathcal{O}_{K_1^{mod}} = \bigoplus_{i=0}^{p-1} (K_0^{mod} \cap \xi_1^{r-i} \mathcal{O}_{\bar{K}_0}) \cdot \xi_1^i$

(ii) Pour $0 \leq i \leq p-1$, soit $\mathcal{O}_{K_0^{mod}}^{(i)}$ l'image de $\mathcal{O}_{K_0^{mod}}$ dans $\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/\xi_1^{p-i} \mathcal{O}_{\bar{K}_0}$ et Ξ l'image de $\mathcal{O}_{K_0^{mod}}[\xi_1]$ dans $\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0}$, alors $\Xi = \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathcal{O}_{K_0^{mod}}^{(i)} \cdot \bar{\xi}_1^i$.

Preuve. - (i) Soit ν_p la valuation p -adique sur \bar{K}_0 normalisée par $\nu_p(p) = 1$. On a $K_1^{mod} = \bigoplus_{i=0}^{p-1} K_0^{mod} \cdot \xi_1^i$. Soit $x = \sum_{i=0}^{p-1} x_i \cdot \xi_1^i \in K_1^{mod}$, comme $\nu_p(K_0^{mod}) \subset \mathbf{Z}_{(p)} \cup \{\infty\}$ et $\nu_p(\xi_1) = p^{-1}$, on a $\nu_p(x_i \cdot \xi_1^i) \neq \nu_p(x_j \cdot \xi_1^j)$ si $i \neq j$ et $x_i \neq 0 \neq x_j$. D'où $\nu_p(x) = \min_{0 \leq i \leq p-1} \nu_p(x_i \cdot \xi_1^i) = \min_{0 \leq i \leq p-1} (\nu_p(x_i) + ip^{-1})$.

(ii) De (i) pour $r = p$, on déduit $p\mathcal{O}_{K_1^{mod}} = \mathcal{O}_{K_0^{mod}}[\xi_1] \cap p\mathcal{O}_{\bar{K}_0}$, donc $\Xi = \mathcal{O}_{K_0^{mod}}[\xi_1]/p\mathcal{O}_{K_1^{mod}}$. On obtient (ii) en faisant le quotient de $\mathcal{O}_{K_0^{mod}}[\xi_1] = \bigoplus_{i=0}^{p-1} \mathcal{O}_{K_0^{mod}} \cdot \xi_1^i$ par l'égalité (i) pour $r = p$. \square

PROPOSITION 3.3.2.2 (D'après Faltings [Fa2], 5.2). - Avec les notations précédentes, on a pour tout $x \in \tilde{\mathcal{P}} : \rho_0(x) \in \Xi = Im(\mathcal{O}_{K_0^{mod}}[\xi_1] \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0})$.

Preuve. - Soit n le rang de $\tilde{\mathcal{P}}$ sur $k[u]/u^p$, par des arguments d'algèbre linéaire élémentaires, on trouve une base $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$ de $\tilde{\mathcal{P}}$ sur $k[u]/u^p$ et des entiers $1 = n_0 \leq n_1 \leq \dots \leq n_{p-2} \leq n+1 = n_{p-1}$ tels que si $\tilde{\mathcal{P}}_i = \bigoplus_{j=n_i}^{n_{i+1}-1} k[u]/u^p \cdot \tilde{e}_j$ ($0 \leq i \leq p-2$), on a $Fil^{p-2} \tilde{\mathcal{P}} = \bigoplus_{i=0}^{p-2} u^{p-2-i} \cdot \tilde{\mathcal{P}}_i$. Notons $r_i = Max\{r \in \mathbf{N} \text{ tq } \tilde{e}_i \in \tilde{\mathcal{P}}_r\}$, par (3.3.1.1, (ii)) on a que, si $x \in \tilde{\mathcal{P}}_i$, $\rho_0(x) \in Fil^i(\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0}) = \bar{\xi}_1^i (\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0})$ et les $\rho_0(\tilde{e}_i)$ satisfont un système d'équations dans $\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0}$:

$$(S) \quad \begin{pmatrix} \phi_{r_1}(\rho_0(\tilde{e}_1)) \\ \vdots \\ \phi_{r_n}(\rho_0(\tilde{e}_n)) \end{pmatrix} = \mathcal{G} \begin{pmatrix} \rho_0(\tilde{e}_1) \\ \vdots \\ \rho_0(\tilde{e}_n) \end{pmatrix}$$

où $\rho_0(\tilde{e}_i) \in Fil^{r_i}(\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0})$ et $\mathcal{G} \in GL_n(k[\bar{\xi}_1])$. Soit \mathcal{G}_∞ un relèvement de \mathcal{G} dans $GL_n(W[\bar{\xi}_1])$ et \mathcal{G}_m son image dans $GL_n(\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/\xi_1^m \mathcal{O}_{\bar{K}_0})$. Pour $m \geq p$ et

$0 \leq i \leq p - 2$, on pose $Fil^i(\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/\xi_1^m \mathcal{O}_{\bar{K}_0}) = \bar{\xi}_1^i(\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/\xi_1^m \mathcal{O}_{\bar{K}_0})$ et si $x = \bar{\xi}_1^i y \in Fil^i(\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/\xi_1^m \mathcal{O}_{\bar{K}_0})$, $\phi_i(x) = (-1)^i y^p$. Les conditions sur m et i entraînent que $\phi_i(x)$ est bien défini dans $\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/\xi_1^m \mathcal{O}_{\bar{K}_0}$. On considère les systèmes d'équations dans $\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/\xi_1^m \mathcal{O}_{\bar{K}_0}$:

$$(S_m) \quad \begin{pmatrix} \phi_{r_1}(x_1) \\ \vdots \\ \phi_{r_n}(x_n) \end{pmatrix} = \mathcal{G}_m \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

où $x_i \in Fil^{r_i}(\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/\xi_1^m \mathcal{O}_{\bar{K}_0})$. En utilisant que \mathcal{G}_m est inversible, on vérifie facilement que pour $m \geq p$, toute solution de (S_m) se remonte de façon unique en une solution de (S_{m+1}) . Finalement, en posant $Fil^i \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} = \xi_1^i \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ ($0 \leq i \leq p - 2$), $\phi_i(\xi_1^i y) = (-1)^i y^p$ et S_∞ le système d'équations dans $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$:

$$(S_\infty) \quad \begin{pmatrix} \phi_{r_1}(x_1) \\ \vdots \\ \phi_{r_n}(x_n) \end{pmatrix} = \mathcal{G}_\infty \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

où $x_i \in Fil^{r_i} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$, toute solution de (S) se relève de manière unique en solution de (S_∞) . Soient (a_{ij}) les coefficients de \mathcal{G}_∞ dans $W[\xi_1]$, comme dans la preuve de ([Fa1], 2.4) on voit facilement que :

$$\mathbb{C}_p[T_1, \dots, T_n] / \left((-p)^{-r_i} T_i^p - \sum_{j=1}^n a_{ij} T_j \right)$$

est fini étale de degré p^n sur \mathbb{C}_p . Donc (S_∞) a p^n solutions dans \mathbb{C}_p puisque \mathbb{C}_p est algébriquement clos. Ces solutions sont en fait contenues dans \bar{K}_0 car le recouvrement étale ci-dessus est déjà défini sur \bar{K}_0 et \bar{K}_0 est algébriquement clos. Le groupe G_1^{mod} agit sur les solutions de (S) et comme par hypothèse, cette action est triviale modulo p , on en déduit que l'unique relèvement (x_1, \dots, x_n) dans (S_∞) de la solution $(\rho_0(\tilde{e}_1), \dots, \rho_0(\tilde{e}_n))$ de (S) est tel que $x_i \in (\xi_1^{r_i} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} \cap \bar{K}_0)^{G_1^{mod}} = \xi_1^{r_i} \mathcal{O}_{K_1^{mod}}$. En utilisant (S_∞) , il suffit donc de montrer $x^p \in \mathcal{O}_{K_0^{mod}}[\xi_1]$ si $x \in \mathcal{O}_{K_1^{mod}}$. Par (3.3.2.1, (i)), x s'écrit $\sum_{i=0}^{p-1} x_i \cdot \xi_1^i$, $x_i \in K_0^{mod}$, $\nu_p(x_i) \geq -ip^{-1}$, donc x^p est de la forme :

$$x^p = \sum_{i=0}^{p-1} (x_i \cdot \xi_1^i)^p + py = \sum_{i=0}^{p-1} p^i x_i^p + py$$

pour un $y \in \mathcal{O}_{K_1^{mod}}$. Le premier terme est contenu dans $\mathcal{O}_{K_0^{mod}}$ et le deuxième dans $\mathcal{O}_{K_0^{mod}}[\xi_1]$ par (3.3.2.1, (i)) avec $r = p$. \square

3.3.3.

Par (3.3.2.2) et (3.3.2.1, (ii)), pour tout x de $\tilde{\mathcal{P}}$, on a des $\delta_j(x)$ uniques dans $\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/\xi_1^{p-j} \mathcal{O}_{\bar{K}_0}$ tels que $\rho_0(x) = \bigoplus_{j=0}^{p-1} \delta_j(x) \bar{\xi}_1^j$. Les égalités (1) et (2) en (3.3.2) donnent d'autre part pour $i \in \mathbb{N}$, $x \in \tilde{\mathcal{P}}$ et $g \in G^{mod}$:

$$\rho_0(x) = \sum_{i=0}^{p-1} g(\rho_0(\tilde{N} \circ (\tilde{N} - Id) \circ \dots \circ (\tilde{N} - (i-1)Id)(x))) \frac{(\epsilon_1(g) - 1)^i}{i!} \quad (3)$$

En remarquant que pour tout $y \in \tilde{\mathcal{P}}$ et tout $g \in G^{mod}$, $g(\rho_0(y)) = \bigoplus_{j=0}^{p-1} \epsilon_1(g)^j \delta_j(x) \bar{\xi}_1^{-j}$ (avec des notations évidentes), on obtient par (3.3.2.1, (ii)) des égalités dans $\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/\xi_1^{p-j} \mathcal{O}_{\bar{K}_0}$:

$$\epsilon_1(g)^{p-j} \delta_j(x) = \sum_{i=0}^{p-1} \delta_j(\tilde{N} \circ (\tilde{N} - Id) \circ \dots \circ (\tilde{N} - (i-1)Id)(x)) \frac{(\epsilon_1(g) - 1)^i}{i!} \quad (4)$$

où $x \in \tilde{\mathcal{P}}$, $g \in G^{mod}$, $j \in \{0, \dots, p-1\}$. En développant $\epsilon_1(g)^{p-j} = [(\epsilon_1(g) - 1) + 1]^{p-j}$ (formule du binôme), on a finalement dans $\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/\xi_1^{p-j} \mathcal{O}_{\bar{K}_0}$ pour tout $j \in \{0, \dots, p-1\}$ et $g \in G^{mod}$:

$$\sum_{i=1}^{p-1} ((p-j)(p-j-1)\dots(p-j-i+1) \delta_j(x) - \delta_j(\tilde{N} \circ (\tilde{N} - Id) \circ \dots \circ (\tilde{N} - (i-1)Id)(x))) \frac{(\epsilon_1(g) - 1)^i}{i!} = 0 \quad (5)$$

Soit ϵ une racine primitive p -ième de 1, les équations (5) sont du type (pour j fixé et quitte à changer g) $\sum_{i=1}^{p-1} c_i(\epsilon^i - 1)^i = 0$ dans $\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/\xi_1^{p-j} \mathcal{O}_{\bar{K}_0}$, $1 \leq i \leq p-1$. En écrivant $(\epsilon^i - 1)^i = (\epsilon - 1)^i(1 + \epsilon + \dots + \epsilon^{i-1})^i$, on obtient un système :

$$\mathcal{G} \begin{pmatrix} c_1(\epsilon - 1) \\ \vdots \\ c_{p-1}(\epsilon - 1)^{p-1} \end{pmatrix} = 0$$

où $\mathcal{G} \in GL_{p-1}(\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/\xi_1^{p-j} \mathcal{O}_{\bar{K}_0})$. Donc $c_i(\epsilon - 1)^i = 0 \forall i \in \{0, \dots, p-2\}$. Appliqué à ce qui précède, on a en particulier pour $i = 1$, $0 \leq j \leq p-1$, $((p-j)\delta_j(x) - \delta_j(\tilde{N}(x)))(\epsilon - 1) = 0$ dans $\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/\xi_1^{p-j} \mathcal{O}_{\bar{K}_0}$ i.e. :

$$\nu_p((p-j)\delta_j(x) - \delta_j(\tilde{N}(x))) \geq \frac{p-j}{p} - \frac{1}{p-1} \geq \frac{p-2-j}{p}$$

soit, pour tout $j \in \{0, \dots, p-2\}$:

$$(p-j)\delta_j(x) - \delta_j(\tilde{N}(x)) \in \bar{\xi}_1^{p-2-j} (\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/\xi_1^{p-j} \mathcal{O}_{\bar{K}_0}) \quad (6)$$

Soit $Fil^i \tilde{\mathcal{P}} = (\bigoplus_{j=i}^{p-2} \tilde{\mathcal{P}}_j) \oplus u \cdot \tilde{\mathcal{P}}_{i-1} \oplus \dots \oplus u^i \cdot \tilde{\mathcal{P}}_0$, $0 \leq i \leq p-2$ (voir preuve de 3.3.2.2). On a $Fil^i \tilde{\mathcal{P}} = \{x \in \tilde{\mathcal{P}} \text{ tq } u^{p-2-i} \cdot x \in Fil^{p-2} \tilde{\mathcal{P}}\}$, $\tilde{N}(Fil^i \tilde{\mathcal{P}}) \subset Fil^{i-1} \tilde{\mathcal{P}}$ ($i \geq 1$) et, si $x \in Fil^i \tilde{\mathcal{P}}$, $\rho_0(x) \in Fil^i(\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0}) = \bar{\xi}_1^i(\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0})$ (3.3.1.1, (ii)). De (3.3.2.1), on déduit alors $\delta_j(x) \in \bar{\xi}_1^{i-j}(\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/\xi_1^{p-j} \mathcal{O}_{\bar{K}_0})$ pour $j \in \{0, \dots, i\}$. Par l'égalité (6), on a $(p-j)\delta_j(\tilde{N}^{k-1}(x)) - \delta_j(\tilde{N}^k(x)) \in \bar{\xi}_1^{p-2-j}(\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/\xi_1^{p-j} \mathcal{O}_{\bar{K}_0})$ pour tout $k \geq 1$. Donc, pour $j \in \{0, \dots, i\}$ et $k \geq 1$, $\delta_j(\tilde{N}^k(x)) \in \bar{\xi}_1^{i-j}(\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/\xi_1^{p-j} \mathcal{O}_{\bar{K}_0})$ et $\rho_0(\tilde{N}^k(x)) \in Fil^i(\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0})$ pour $k \geq 1$. Par (1), on en déduit $\rho_j(\tilde{N}(x)) \in Fil^i(\mathcal{O}_{\bar{K}_0}/p\mathcal{O}_{\bar{K}_0})$ pour $j \geq 0$ qui entraîne $\rho(\tilde{N}(x)) \in Fil^i \tilde{\mathcal{A}}$.

3.3.4.

Notons $N = \tilde{\phi}_{p-2}(Fil^{p-2} \tilde{\mathcal{N}})$, $M = \tilde{\phi}_{p-2}(Fil^{p-2} \tilde{\mathcal{M}})$ et $P = \tilde{\phi}_{p-2}(Fil^{p-2} \tilde{\mathcal{P}})$. Par hypothèse, N et M sont munis d'une structure d'objets de $\underline{MF}_k^{f,p-2}$, et on a une suite exacte de k -espaces vectoriels par (2.2.1.2, (iii)) : $0 \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$. Remarquons que $\tilde{N}(P) \subset N$. Soit $x \in Fil^{p-2} \tilde{\mathcal{P}}$ et $\rho \in Hom_{\underline{M}_k}(\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{\mathcal{A}})$, on a

$N \circ \phi_{p-2}(\rho(x)) = \phi_{p-3} \circ N(\rho(x))$. Par (3.3.3), $N(\rho(x)) = \rho(\tilde{N}(x)) \in \text{Fil}^{p-2}\tilde{A}$, donc $\phi_{p-3} \circ N(\rho(x)) = 0$ i.e. $\rho|_{\tilde{N}(P)} = 0$. La flèche $\text{Hom}_{\underline{\mathcal{M}}_k^{f,p-2}}(\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{A}) \rightarrow \text{Hom}_{\underline{\mathcal{M}}_k^{f,p-2}}(\tilde{N}, \tilde{A})$ étant surjective par (3.2.3.1), on obtient :

$$\forall \rho \in \text{Hom}_{\underline{\mathcal{M}}_k^{f,p-2}}(\tilde{N}, \tilde{A}) = V_{st}(\tilde{N}), \quad \rho|_{\tilde{N}(P)} = 0$$

LEMME 3.3.4.1. – Soit N un objet de $\underline{MF}_k^{f,p-2}$ et N_1 un sous- k -espace vectoriel de N tel que $\rho(N_1) = 0$ pour tout $\rho \in \text{Hom}_{\mathcal{MF}}(N, A_{cris}/pA_{cris})$, alors $N_1 = 0$.

Preuve. – On peut supposer N_1 maximal : posons $\text{Fil}^i N_1 = \text{Fil}^i N \cap N_1$ ($i \in \mathbf{Z}$), la compatibilité de $\rho \in \text{Hom}_{\mathcal{MF}}(N, A_{cris}/pA_{cris})$ avec ϕ_i implique alors $\phi_i(\text{Fil}^i N_1) \subset N_1$. Comme $\tilde{\phi}_\cdot : gr_{\text{Fil}} N \rightarrow N$ induit par les ϕ_i est bijectif et que $\dim_k(gr_{\text{Fil}} N_1) = \dim_k(N_1)$, $\tilde{\phi}_\cdot : gr_{\text{Fil}} N_1 \rightarrow N_1$ est aussi bijectif et $(N_1, \text{Fil}^i N_1, \phi_i)$ est un sous-objet de $(N, \text{Fil}^i N, \phi_i)$ dans $\underline{MF}_k^{f,p-2}$. Mais :

$$\text{Hom}_{\mathcal{MF}}(N, A_{cris}/pA_{cris}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{MF}}(N_1, A_{cris}/pA_{cris}) = V_{cris}(N_1)$$

est alors surjectif donc $V_{cris}(N_1) = 0$ d'où $N_1 = 0$ par (3.2.3.2). \square

Par (3.2.1.1) et (3.3.4.1), on a donc $\tilde{N}(P) = 0$ d'où, si $x \in \text{Fil}^{p-2}\tilde{\mathcal{P}}$, $(\tilde{N} \circ \tilde{\phi}_{p-2})(x) = 0 = \tilde{\phi}_{p-2}(u.\tilde{N}(x))$ et par (2.2.1.2), $u.\tilde{N}(x) \in u.\text{Fil}^{p-2}\tilde{\mathcal{P}}$ i.e. $\tilde{N}(x) \in \text{Fil}^{p-2}\tilde{\mathcal{P}}$. On en déduit aisément qu'en fait $\tilde{N}(\text{Fil}^i \tilde{\mathcal{P}}) \subset \text{Fil}^i(\tilde{\mathcal{P}})$, $0 \leq i \leq p-2$. Montrons que P est un objet de $\underline{MF}_k^{f,p-2}$. On pose $\text{Fil}^i P = P \cap \text{Fil}^i \tilde{\mathcal{P}}$, $0 \leq i \leq p-2$, $\text{Fil}^i P = P$, $i \leq 0$ et $\text{Fil}^i P = 0$, $i \geq p-1$. On définit $\phi_i : \text{Fil}^i P \rightarrow P$ par $\phi_i(x) = (-1)^{p-2-i} \tilde{\phi}_{p-2}(u^{p-2-i}.x) \in P$. Par (2.2.1.2), on a un isomorphisme de $k[u]/u^p$ -modules : $k[u]/u^p \otimes_k P \simeq \tilde{\mathcal{P}}$ compatible aux monodromies (la dérivation à gauche est la dérivation produit tensoriel). Par récurrence sur i , supposons $\text{Fil}^i \tilde{\mathcal{P}} = \sum_{j=0}^{p-1} u^j \otimes \text{Fil}^{i-j} P$ (vrai pour $i = 0$) et soit $x \in \text{Fil}^{i+1} \tilde{\mathcal{P}}$. On a $x = x_0 + u.x_1 + \dots + u^i.x_i + y$ avec $x_0, \dots, x_i \in P$ et $y \in \sum_{j \geq i+1} u^j.P$. De ce qui précède, on déduit en appliquant $\tilde{N} : u.x_1 + 2u^2.x_2 + \dots + iu^i.x_i \in \text{Fil}^{i+1} \tilde{\mathcal{P}}$ i.e. $x_1 + 2u.x_2 + \dots + iu^{i-1}.x_i \in \text{Fil}^i \tilde{\mathcal{P}}$ soit par récurrence $x_j \in \text{Fil}^{i+1-j} P$ ($1 \leq j \leq i$) d'où $x_0 = x - \sum_{j=1}^i u^j.x_j - y \in \text{Fil}^{i+1} \tilde{\mathcal{P}} \cap P = \text{Fil}^{i+1} P$. En particulier $\text{Fil}^{p-2} \tilde{\mathcal{P}} = \sum_{j=0}^{p-1} u^j \otimes \text{Fil}^{p-2-j} P$ et de $\phi_{p-2}(\text{Fil}^{p-2} \tilde{\mathcal{P}}) = P$, on déduit $\sum_{i \in \mathbf{N}} \phi_i(\text{Fil}^i P) = P$ i.e. $P \in \underline{MF}_k^{f,p-2}$. Soit $\text{Fil}^i \tilde{N} = \{x \in \tilde{N} \text{ tq } u^{p-2-i}.x \in \text{Fil}^{p-2} \tilde{N}\}$ (resp. $\text{Fil}^i \tilde{M} = \dots$), on vérifie que $\text{Fil}^i N = \text{Fil}^i \tilde{N} \cap N$ et qu'on a des suites exactes : $0 \rightarrow \text{Fil}^i \tilde{N} \rightarrow \text{Fil}^i \tilde{\mathcal{P}} \rightarrow \text{Fil}^i \tilde{M}$ pour tout $i \in \{0, \dots, p-2\}$. La suite $0 \rightarrow \text{Fil}^i N \rightarrow \text{Fil}^i P \rightarrow \text{Fil}^i M$ est donc exacte $\forall i \in \{0, \dots, p-2\}$. Mais le morphisme $P \rightarrow M$ de $\underline{MF}_k^{f,p-2}$ est strict par rapport aux Fil^i ([FL], 1.8), donc $\text{Fil}^i P \rightarrow \text{Fil}^i M$ est surjectif pour tout i et on a bien finalement une suite exacte $0 \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$ dans $\underline{MF}_k^{f,p-2}$.

Remarque. – Toute la théorie des sections 2 et 3 a été faite en se restreignant au Fil^{p-2} . Il est possible qu'on puisse, comme dans [FL], prolonger la théorie jusqu'au Fil^{p-1} moyennant certaines conditions supplémentaires sur les objets considérés (voir [FL], 6.1 et 6.6).

4. Construction de représentations semi-stables

Dans cette section, on introduit des modules “fortement divisibles” grâce auxquels on construit des représentations p -adiques semi-stables par passage à la limite sur des représentations de torsion. On fait le lien entre ces modules et les (ϕ, N) -modules filtrés admissibles de Fontaine.

4.1. Des représentations semi-stables

4.1.1.

DÉFINITION 4.1.1.1. – On appelle S -module fortement divisible tout objet \mathcal{M} de la catégorie $'\underline{\mathcal{M}}^{p-2}$ (2.1.2) vérifiant les trois conditions supplémentaires :

- le S -module \mathcal{M} est libre de rang fini
- le S -module $\mathcal{M}/\text{Fil}^{p-2}\mathcal{M}$ est sans p -torsion
- le S -module \mathcal{M} est engendré par $\phi_{p-2}(\text{Fil}^{p-2}\mathcal{M})$.

La deuxième condition équivaut à demander $px \in \text{Fil}^{p-2}\mathcal{M} \Leftrightarrow x \in \text{Fil}^{p-2}\mathcal{M}$. Si \mathcal{M} est un module fortement divisible, $\mathcal{M}/p^n\mathcal{M}$ est un objet de $\underline{\mathcal{M}}^{p-2}$ ($n \in \mathbf{N}$) et \mathcal{M} s'identifie à $\varprojlim \mathcal{M}/p^n\mathcal{M}$ (le fait que $\text{Fil}^{p-2}\mathcal{M} = \varprojlim \text{Fil}^{p-2}\mathcal{M}/p^n\text{Fil}^{p-2}\mathcal{M}$ provient de la condition $\text{Fil}^{p-2}S\mathcal{M} \subset \text{Fil}^{p-2}\mathcal{M}$ qui ramène la description de $\text{Fil}^{p-2}\mathcal{M}$ essentiellement à celle d'un sous- W -module libre de rang fini de \mathcal{M}). Soit $V_{st}(\mathcal{M}) = \text{Hom}_{\underline{\mathcal{M}}^{p-2}}(\mathcal{M}, \widehat{A}_{st})$, on a $V_{st}(\mathcal{M}) = \text{Hom}_{\underline{\mathcal{M}}^{p-2}}(\varprojlim \mathcal{M}/p^n\mathcal{M}, \widehat{A}_{st, \infty}) = \varprojlim \text{Hom}_{\underline{\mathcal{M}}^{p-2}}(\mathcal{M}/p^n\mathcal{M}, \widehat{A}_{st, \infty})$ et par (3.1.3.1), $V_{st}(\mathcal{M})$ est un \mathbf{Z}_p -module libre de rang celui de \mathcal{M} . Nous allons nous intéresser à $V_{st}(\mathcal{M}) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p$.

On note $MF_{K_0}(\phi, N)$ la catégorie suivante : les objets sont des K_0 -espaces vectoriels D munis :

- d'une filtration décroissante par des sous- K_0 -espaces vectoriels $\text{Fil}^i D$ telle que $\bigcup_{i \in \mathbf{Z}} \text{Fil}^i D = D$ et $\bigcap_{i \in \mathbf{Z}} \text{Fil}^i D = 0$
- d'une application K_0 -semi-linéaire injective $\phi : D \rightarrow D$
- d'une application K_0 -linéaire $N : D \rightarrow D$ telle que $N\phi = p\phi N$.

Les flèches sont définies de la manière évidente. Les algèbres B_{cris}^+ et B_{st}^+ sont des exemples d'objets de $MF_{K_0}(\phi, N)$. Lorsque $\dim_{K_0} D < \infty$, la relation $N\phi = p\phi N$ entraîne que N est nilpotent. On pose $S_{K_0} = K_0 \otimes_W S$ et on étend à S_{K_0} toutes les structures de S par K_0 -linéarité (K_0 -semi-linéarité pour le Frobenius). Soit \mathcal{M} un module fortement divisible et $\mathcal{D} = \mathcal{M} \otimes_W K_0$. On pose $\text{Fil}^i \mathcal{D} = \{x \in \mathcal{D} \text{ tq } (u-p)^{p-2-i} \cdot x \in \text{Fil}^{p-2}\mathcal{M} \otimes_W K_0\}$ si $0 \leq i \leq p-2$, $\text{Fil}^i \mathcal{D} = \mathcal{D}$ si $i \leq 0$, $\text{Fil}^i \mathcal{D} = \sum_{j=0}^{i-1} \text{Fil}^{i-j} S_{K_0} \cdot \text{Fil}^j \mathcal{D}$ si $i \geq p-1$ et $\text{Fil}^i \mathcal{M} = \mathcal{M} \cap \text{Fil}^i \mathcal{D}$. Pour $x \in \mathcal{D}$, on pose $\phi(x) = (c^{-1})^{p-2} \cdot \phi_{p-2}((u-p)^{p-2} \cdot x)$ et on étend N par K_0 -linéarité. Les propriétés de \mathcal{M} font que \mathcal{D} est alors un objet de la catégorie $\mathcal{MF}_{S_{K_0}}(\Phi, \mathcal{N})$ de ([Br2], 6) (attention, dans [Br2], on notait \hat{M} un objet de $\mathcal{MF}_{S_{K_0}}(\Phi, \mathcal{N})$ et Φ et \mathcal{N} les opérateurs sur un tel objet). En particulier, \mathcal{D} peut s'écrire canoniquement $\mathcal{D} = S_{K_0} \otimes_{K_0} D$ où D est un objet de $MF_{K_0}(\phi, N)$ de dimension finie (voir [Br2], 6.1) : on vérifie alors que D s'identifie aux éléments de \mathcal{D} annulés par une puissance de la monodromie. Soit $\rho \in \text{Hom}_{\underline{\mathcal{M}}^{p-2}}(\mathcal{M}, \widehat{A}_{st})$ et $x \in D \cap \mathcal{M}$, alors $\rho(x) \in A_{st}$ (c.f. 3.1.1)

d'où une flèche \mathbf{Q}_p -linéaire $\Psi : \text{Hom}_{\mathcal{M}^{p-2}}(\mathcal{M}, \widehat{A}_{st}) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p \rightarrow \text{Hom}_{K_0}(D, B_{st}^+)$. Le résultat suivant se déduit de [Br2], nous en donnons une preuve rapide :

PROPOSITION 4.1.1.2. – Avec les notations précédentes, Ψ induit un isomorphisme de modules galoisiens :

$$\text{Hom}_{\mathcal{M}^{p-2}}(\mathcal{M}, \widehat{A}_{st}) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{MF_{K_0}(\phi, N)}(D, B_{st}^+)$$

Preuve. – Il est clair d'après sa définition que Ψ commute à l'action de Galois et est injective. Soit $\rho \in \text{Hom}_{\mathcal{M}^{p-2}}(\mathcal{M}, \widehat{A}_{st})$, on voit facilement que $\Psi(\rho)$ commute au Frobenius et à la monodromie. Montrons que $\Psi(\rho)$ préserve les filtrations. Soit $f_p : S_{K_0} \rightarrow K_0$, $\sum_{i=0}^{\infty} w_i \frac{u^i}{i!} \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} w_i \frac{v^i}{i!}$ ($\lim_{i \rightarrow \infty} w_i = 0$) et F_p l'application K_0 -linéaire $\mathcal{D} = S_{K_0} \otimes_{K_0} D \rightarrow D$ définie par $F_p(\lambda \otimes x) = f_p(\lambda)x$, on rappelle que par définition $Fil^i D = F_p(Fil^i \mathcal{D})$ ([Br2], 6). Notons $\Psi_p(\rho)$ la composée de $\Psi(\rho)$ avec l'injection $B_{st}^+ \hookrightarrow B_{dR}^+$ induite par f_p (3.1.1), on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{\rho} & \widehat{A}_{st} \\ F_p \downarrow & & \downarrow f_p \\ D & \xrightarrow{\Psi_p(\rho)} & B_{dR}^+ \end{array}$$

où seule la flèche du bas ne préserve peut-être pas les filtrations. Soit $x \in Fil^i D$, il existe $\widehat{x} \in \mathcal{M} \cap Fil^i \mathcal{D} = Fil^i \mathcal{M}$ et $r \in \mathbf{N}$ tels que $F_p(\widehat{x}) = p^r x$. De $(f_p \circ \rho)(\widehat{x}) \in Fil^i B_{dR}^+$, on déduit $\Psi_p(\rho)(x) \in Fil^i B_{dR}^+$, d'où $\Psi(\rho)(x) \in f_p^{-1}(Fil^i B_{dR}^+) \cap B_{st}^+ = Fil^i B_{st}^+$ (3.1.1) et l'image de Ψ tombe dans $\text{Hom}_{MF_{K_0}(\phi, N)}(D, B_{st}^+)$. Montrons la surjectivité de Ψ . Soient $\widehat{e}_1, \dots, \widehat{e}_n$ une base de \mathcal{M} sur S et $\bar{\rho} \in \text{Hom}_{MF_{K_0}(\phi, N)}(D, B_{st}^+)$, il existe $r \in \mathbf{N}$ tel que $p^r \widehat{e}_i = \sum_j \lambda_{i,j} \otimes x_{i,j} \in S_{K_0} \otimes_{K_0} D$ avec $\forall i, j, \lambda_{i,j} \cdot \bar{\rho}(x_{i,j}) \in \widehat{A}_{st}$. On pose $\rho(\widehat{e}_i) = \sum_j \lambda_{i,j} \cdot \bar{\rho}(x_{i,j}) \in \widehat{A}_{st}$ qu'on étend à \mathcal{M} par S -linéarité. Si on montre que $\rho \in \text{Hom}_{\mathcal{M}^{p-2}}(\mathcal{M}, \widehat{A}_{st})$, il est clair que $\rho \otimes 1/p^r$ sera un antécédent de $\bar{\rho}$. On vérifie que ρ commute avec N et que $\rho \circ \phi|_{\mathcal{M}} = \phi \circ \rho$, il suffit donc de montrer $\rho(Fil^{p-2} \mathcal{M}) \subset Fil^{p-2} \widehat{A}_{st}$. Montrons par récurrence sur i que $\rho(Fil^i \mathcal{M}) \subset Fil^i \widehat{A}_{st}$, $0 \leq i \leq p-2$. C'est vrai pour $i = 0$. Supposons le résultat à l'ordre $i-1$ et soit $y \in Fil^i \mathcal{M}$ ($i \geq 1$), on a :

- i) $f_p(\rho(y)) = p^r \bar{\rho}(F_p(y)) \in Fil^i A_{st}$,
- ii) $N(\rho(y)) = \rho(N(y)) \in Fil^{i-1} \widehat{A}_{st}$ par hypothèse de récurrence.

Dans \widehat{A}_{st} , $\rho(y)$ s'écrit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \gamma_k(X)$ où les a_k sont dans A_{cris} . Par ii), on a $N(\rho(y)) = (1+X) \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \gamma_k(X) \in Fil^{i-1} \widehat{A}_{st}$ d'où $\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \gamma_k(X) \in Fil^{i-1} \widehat{A}_{st}$. On en déduit facilement $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \gamma_k(X) \in Fil^i \widehat{A}_{st}$. Mais i) donne alors $a_0 \in Fil^i A_{cris}$, d'où finalement $\rho(y) \in Fil^i \widehat{A}_{st}$. \square

4.1.2.

Il existe ([Fo1], 2.3.4) un élément t de $Fil^1 A_{cris}$ qui engendre $\mathbf{Z}_p(1)$ et on définit $B_{cris} = B_{cris}^+[1/t]$ et $B_{st} = B_{st}^+[1/t]$. Si V est une représentation linéaire continue de G dans un \mathbf{Q}_p -espace vectoriel de dimension finie, on dit que V est semi-stable si $\dim_{K_0}(B_{st} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G = \dim_{\mathbf{Q}_p} V$ ([Fo2], 5.1.4).

THÉORÈME 4.1.2.1. – Soit \mathcal{M} un module fortement divisible, alors $V_{st}(\mathcal{M}) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p$ est une représentation p -adique semi-stable.

Preuve. – Soit n le rang de \mathcal{M} , $V = V_{st}(\mathcal{M}) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p$ et $V^* = \text{Hom}_{\mathbf{Q}_p}(V, \mathbf{Q}_p)$. Il est équivalent de montrer que V^* est semi-stable ([Fo2], 5.1.7) i.e. $\dim_{K_0}(B_{st} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V^*)^G = n$. Par ([Fo2], 1.4.2), il suffit d'avoir $\dim_{K_0}(B_{st} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V^*)^G \geq n$ ou encore $\dim_{K_0} \text{Hom}_{\text{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(G)}(V, B_{st}^+) \geq n$. En reprenant les notations de (4.1.1), on a par (4.1.1.2) une flèche canonique $D \rightarrow \text{Hom}_{\text{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(G)}(V, B_{st}^+)$ et il suffit de montrer qu'elle est injective, ou encore que si $x \in \mathcal{M}$ est tel que $N^s(x) = 0$ pour un $s \in \mathbf{N}^*$ et $\rho(x) = 0$ pour tout $\rho \in V_{st}(\mathcal{M})$, alors $x = 0$. Soit un tel x supposé non nul dans \mathcal{M} . On peut prendre $x \notin p\mathcal{M}$. Soit \bar{x} son image (non nulle) dans $\mathcal{M}/p\mathcal{M}$, puisque $\text{Hom}_{\mathcal{M}^{p-2}}(\mathcal{M}, \widehat{A}_{st}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{M}^{p-2}}(\mathcal{M}/p\mathcal{M}, \widehat{A}_{st}/p\widehat{A}_{st})$ est surjectif, on a $\rho(\bar{x}) = 0$ pour tout $\rho \in V_{st}(\mathcal{M}/p\mathcal{M})$. Par (2.4.2.1), on peut trouver une filtration dans $\mathcal{M}_k^{p-2} : 0 = \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_1 \subset \dots \subset \mathcal{M}_l = \mathcal{M}/p\mathcal{M}$ (les inclusions sont strictes) telle que les gradués proviennent de $\underline{MF}_k^{f,p-2}$. Soit r le plus petit indice tel que $\bar{x} \in \mathcal{M}_r$ ($r \geq 1$ puisque $\bar{x} \neq 0$), soit $\mathcal{P} = \mathcal{M}_r/\mathcal{M}_{r-1}$ et notons encore \bar{x} l'image (non nulle) de \bar{x} dans \mathcal{P} . Par hypothèse, on a un isomorphisme dans $\mathcal{M}_k^{p-2} : \mathcal{P} \simeq k \langle u \rangle \otimes_k P$ où P est un objet de $\underline{MF}_k^{f,p-2}$. Soit $\tilde{\mathcal{P}} = k[u]/u^p \otimes_k P$ l'objet associé de $\widetilde{\mathcal{M}}_k^{p-2}$ (2.2.2.1) et \tilde{x} l'image de \bar{x} dans $\tilde{\mathcal{P}}$. On vérifie que P s'identifie aux éléments de $\tilde{\mathcal{P}}$ annulés par une puissance de \tilde{N} , donc $\tilde{x} \in P$. Par (3.1.3.1), on a une surjection $V_{st}(\mathcal{M}/p\mathcal{M}) \rightarrow V_{st}(\mathcal{M}_r)$ qui entraîne $\rho(\bar{x}) = 0$ pour tout $\rho \in \text{Hom}_{\widetilde{\mathcal{M}}_k^{p-2}}(\tilde{\mathcal{P}}, \tilde{A}) = \text{Hom}_{\mathcal{MF}}(P, A_{cris}/pA_{cris})$. Par (3.3.4.1), on a $\tilde{x} = 0$ et, de $N^s(\bar{x}) = 0$, on déduit que \bar{x} est de la forme $\bar{x} = \sum_{\alpha} \underline{X}^{\alpha} \otimes p_{\alpha}$ dans $\mathcal{P} \simeq k[u, X_i]/(u^p, X_i^p)_{i \in \mathbf{N}^*} \otimes_k P$ où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $m \in \mathbf{N}^*$, $\alpha_i \in \{0, \dots, p-1\}$, $\underline{X}^{\alpha} = X_1^{\alpha_1} \dots X_m^{\alpha_m}$, $\sum \alpha_i \neq 0$ et $p_{\alpha} \in P$, $p_{\alpha} \neq 0$. Soit $\rho \in V_{st}(\mathcal{P})$, par hypothèse, on a donc $\rho(\sum_{\alpha} \underline{X}^{\alpha} \otimes p_{\alpha}) = 0$ dans $\widehat{A}_{st}/p\widehat{A}_{st} \simeq R[X_i]/(\xi^p, X_i^p)_{i \in \mathbf{N}^*} \langle X \rangle$ (3.1.2.2) d'où $\sum_{\alpha} \underline{X}^{\alpha} \rho(p_{\alpha}) = 0$ dans $R[X_i]/(\xi^p, X_i^p)_{i \in \mathbf{N}^*}$. Soit α^0 l'unique uplet dans l'écriture de \bar{x} tel que $\sum_{i=1}^m p^i \alpha_i^0$ est minimal dans \mathbf{N}^* , en décomposant $\rho(p_{\alpha^0})$ dans $A_{cris}/pA_{cris} \simeq R[X_i]/(\xi^p, X_i^p)_{i \in \mathbf{N}^*}$, on en déduit $\rho(p_{\alpha^0}) \in \text{Fil}^p(A_{cris}/pA_{cris})$, $\forall \rho \in V_{st}(\mathcal{P}) = \text{Hom}_{\mathcal{MF}}(P, A_{cris}/pA_{cris})$. Comme $p_{\alpha^0} \neq 0$, soit i l'entier de $\{0, \dots, p-2\}$ tel que $p_{\alpha^0} \in \text{Fil}^i P$, $p_{\alpha^0} \notin \text{Fil}^{i+1} P$, alors $\phi_i(p_{\alpha^0}) \neq 0$. Mais pour tout $\rho \in \text{Hom}_{\mathcal{MF}}(P, A_{cris}/pA_{cris})$, $\rho(\phi_i(p_{\alpha^0})) = \phi_i(\rho(p_{\alpha^0})) = 0$ puisque $\rho(p_{\alpha^0}) \in \text{Fil}^p(A_{cris}/pA_{cris})$. Par (3.3.4.1), cela n'est possible que si $\phi_i(p_{\alpha^0}) = 0$ d'où une contradiction qui achève la preuve. \square

4.2. Des (ϕ, N) -modules filtrés admissibles

Soit D un objet de dimension finie de la catégorie $MF_{K_0}(\phi, N)$ (4.1.1), on dit que D est admissible s'il existe une représentation p -adique semi-stable V telle qu'on ait un isomorphisme dans $MF_{K_0}(\phi, N) : (B_{st} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^G \simeq D$ ([Fo2], 5.3.3). On montre que la catégorie des modules filtrés admissibles est équivalente à celle des représentations semi-stables ([Fo2], 5.3.5). Un des problèmes de la théorie est de décrire tous les modules filtrés admissibles (et donc toutes les représentations semi-stables).

Pour D dans $MF_{K_0}(\phi, N)$, on pose $t_H(D) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} (\dim_{K_0} gr^i D) \cdot i$ et $t_N(D) = \sum_{\alpha \in \mathbf{Q}} (\dim_{K_0} D_{\alpha}) \cdot \alpha$ où $\alpha \in \mathbf{Q}$ et D_{α} est la partie de D de pente α pour l'action de ϕ (voir [Be], p. 316). Si D est de dimension n , on remarque que $\bigwedge^n D$ est muni de la façon évidente d'une structure d'objet de $MF_{K_0}(\phi, N)$ et que $t_H(\bigwedge^n D) = t_H(D)$ et $t_N(\bigwedge^n D) = t_N(D)$.

COROLLAIRE 4.2.1. – Soit \mathcal{M} un module fortement divisible, D l'objet associé de $MF_{K_0}(\phi, N)$ (c.f. 4.1.1), $V = V_{st}(\mathcal{M}) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{Q}_p = \text{Hom}_{MF_{K_0}(\phi, N)}(D, B_{st}^+)$ (4.1.1.2) et

$V^* = \text{Hom}_{\mathbf{Q}_p}(V, \mathbf{Q}_p)$. Alors la flèche canonique :

$$D \rightarrow \text{Hom}_{\text{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(G)}(V, B_{st}^+) = (B_{st} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V^*)^G$$

est un isomorphisme dans $MF_{K_0}(\phi, N)$. En particulier, D est admissible.

Preuve. – Soit $D' = \text{Hom}_{\text{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(G)}(V, B_{st}^+)$, dans la preuve de (4.1.2.1), on montre que la flèche canonique $D \rightarrow D'$ est injective. Comme les deux K_0 -espaces vectoriels ont même dimension, c'est un isomorphisme clairement compatible aux opérateurs ϕ et N et aux filtrations. Il faut montrer que c'est un isomorphisme sur les filtrations et il suffit d'avoir $t_H(D) = t_H(D')$. Par ([Fo2], 5.4), on a $t_H(D') = t_N(D')$ et par (A.4), $t_H(D) = t_N(D)$. D'où le résultat puisque $t_N(D') = t_N(D)$. \square

4.3. Les (ϕ, N) -modules filtrés faiblement admissibles

On dit qu'un objet D de dimension finie de $MF_{K_0}(\phi, N)$ est faiblement admissible si $t_H(D) = t_N(D)$ et si pour tout sous- K_0 -espace vectoriel D' de D stable par ϕ et N avec $\text{Fil}^i D' = \text{Fil}^i D \cap D'$, on a $t_H(D') \leq t_N(D')$. On montre que la catégorie des modules filtrés faiblement admissibles est abélienne, stable par dualité et extension ([Fo2], 4.4.4) et que tout module filtré admissible est faiblement admissible ([Fo2], 5.4.2). L'intérêt de cette notion est que Fontaine conjecture la réciproque ([Fo2], 5.4.4) i.e. que tout module filtré faiblement admissible est admissible. Lorsque $N = 0$ et que la longueur de la filtration n'excède pas $p - 1$, cette conjecture est démontrée dans [FL]. La méthode est basée sur un théorème de Laffaille ([La], 3.2) qui dit que si $N = 0$ et $\text{Fil}^0 D = D$, la faible admissibilité est équivalente à l'existence de réseaux fortement divisibles, qui permettent de construire des représentations cristallines comme en (4.1.2.1) et (4.2.1).

Soit D un objet de $MF_{K_0}(\phi, N)$ de dimension finie avec $N \neq 0$ et tel que la longueur de la filtration n'excède pas $p - 2$. Quitte à décaler la filtration et à multiplier ϕ par la puissance de p correspondante (ce qui revient du côté galoisien à tordre par une puissance du caractère cyclotomique), on peut supposer $\text{Fil}^0 D = D$ et $\text{Fil}^{p-1} D = 0$ (voir [Pe], 2.1). Soit $\mathcal{D} = S_{K_0} \otimes_{K_0} D$ son S_{K_0} -module filtré associé ([Br2], 6). Si \mathcal{M} est un S -réseau de \mathcal{D} stable par ϕ et N , on pose $\text{Fil}^{p-2} \mathcal{M} = \mathcal{M} \cap \text{Fil}^{p-2} \mathcal{D}$ et $\phi_{p-2} = \frac{\phi}{p^{p-2}} : \text{Fil}^{p-2} \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{D}$. Si $\phi_{p-2}(\text{Fil}^{p-2} \mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$ et si $\phi_{p-2}(\text{Fil}^{p-2} \mathcal{M})$ engendre \mathcal{M} comme S -module, il est clair que \mathcal{M} est un module fortement divisible (4.1.1.1) et l'objet de $\mathcal{MF}_{S_{K_0}}(\Phi, \mathcal{N})$ associé à \mathcal{M} en (4.1.1) s'identifie bien alors à \mathcal{D} via l'isomorphisme de S_{K_0} -module $S_{K_0} \otimes_S \mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}$. En vertu du résultat de Laffaille pour le cas cristallin, il est naturel de se poser la question :

Si D est faiblement admissible, est-ce qu'il existe toujours un réseau fortement divisible dans $S_{K_0} \otimes_{K_0} D$?

Remarque. – Comme me l'a fait remarquer le referee, quand on sait à l'avance que D est faiblement admissible, il suffit de vérifier la divisibilité (i.e. $\phi(\text{Fil}^{p-2} \mathcal{M}) \subset p^{p-2} \mathcal{M}$), la forte divisibilité (i.e. $\frac{\phi}{p^{p-2}}(\text{Fil}^{p-2} \mathcal{M})$ engendre \mathcal{M}) étant alors automatique (A.3).

Une réponse affirmative à la question ci-dessus entraînerait par (4.2.1) la conjecture de Fontaine pour le cas $N \neq 0$ (avec la restriction sur les longueurs des filtrations). D'autre part, si $\text{Fil}^{r+1} D = 0$ ($0 \leq r \leq p - 2$) et s'il existe un réseau fortement divisible \mathcal{M} dans $S_{K_0} \otimes_{K_0} D$, on a vu que les gradués dans une suite de Jordan-Hölder de $\mathcal{M}/p\mathcal{M}$ sont des

objets de la catégorie $MF_k^{f,r}$ (2.4.2.2 et 2.1.2.1). En particulier, les exposants des caractères fondamentaux qui décrivent l'action de l'inertie modérée sur la semi-simplifiée modulo p de la représentation galoisienne $Hom_{MF_{K_0}(\phi,N)}(D, B_{st})$ associée à D (voir 6.1.1) ont des chiffres en base p qui sont compris entre 0 et r (le fait que ces chiffres soient ainsi bornés est conjecturé par Serre). Une réponse affirmative à la question précédente entraînerait donc aussi cette conjecture de Serre pour toutes les représentations semi-stables à poids de Hodge-Tate dans un intervalle de longueur ne dépassant pas $p - 2$.

Dans la suite, nous montrons que la réponse est oui lorsque la transversalité de Griffiths est vérifiée sur D (cas naïf) ou lorsque D est de dimension 2.

5. Le cas naïf

Pour $i \in \mathbf{Z}$, soit $K_0[i]$ l'objet de $MF_{K_0}(\phi, N)$ donné par K_0 , $\phi(1) = p^i 1$, $Fil^i(K_0[i]) = K_0[i]$, $Fil^{i+1}(K_0[i]) = 0$, $N = 0$. Si D est un objet de $MF_{K_0}(\phi, N)$, on pose $D[i] = D \otimes_{K_0} K_0[i]$ (produit tensoriel dans la catégorie $MF_{K_0}(\phi, N)$, [Fo2], 4.3.4).

LEMME 5.1. – *Pour tout $i \in \mathbf{Z}$, D est admissible si et seulement si $D[i]$ est admissible.*

Preuve. – Facile, voir ([Pe], 2.2). \square

Notons $MF_{K_0}^{fa}(\phi, N)$ la catégorie abélienne des modules faiblement admissibles (4.3) et $MF_{K_0}^{fa}(\phi)$ la sous-catégorie pleine (encore abélienne) des objets pour lesquels $N = 0$.

DÉFINITION 5.2. – *Soit D un objet de $MF_{K_0}(\phi, N)$, on dit que D est naïf s'il vérifie la transversalité de Griffiths, i.e. si, pour tout $i \in \mathbf{Z}$, on a $N(Fil^i D) \subset Fil^{i-1} D$.*

Remarquons que si D est de dimension finie et naïf, la filtration construite en ([Br2], 6) sur $S_{K_0} \otimes_{K_0} D$ n'est autre que la filtration produit tensoriel. Soit D un objet de $MF_{K_0}^{fa}(\phi, N)$ naïf et dont la longueur de la filtration n'excède pas $p - 2$. On a alors :

PROPOSITION 5.3. – *Le module D est admissible (4.2).*

Preuve. – (La preuve suivante m'a été indiquée par J.-M. Fontaine). Par (5.1), on se ramène au cas où $Fil^0 D = D$ et $Fil^{p-1} D = 0$. Si $N = 0$, on conclut par ([La], 3.2) et ([FL], 8.4) (ou la théorie précédente). Supposons $N \neq 0$, nous allons d'abord montrer que D contient encore un réseau fortement divisible au sens classique ([La], 3.1) stable par l'opérateur N . A cause des relations $N(Fil^i D) \subset Fil^{i-1}(D)$ et $N\phi = p\phi N$, l'opérateur $N^n = \underbrace{N \circ \dots \circ N}_{n \text{ fois}}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) induit des morphismes dans $MF_{K_0}(\phi, N)$: $N^n : D \rightarrow D[n]$.

Comme D et $D[n]$ sont faiblement admissibles et que la catégorie $MF_{K_0}^{fa}(\phi, N)$ est abélienne, $Ker N^n$ et $Ker N^n / Ker N^{n-1}$ sont aussi faiblement admissibles. Soit n_0 le plus petit entier dans \mathbf{N}^* tel que $N^{n_0+1} = 0$, on a en particulier une filtration de D par des objets de $MF_{K_0}^{fa}(\phi, N)$:

$$0 \subset Ker N \subset \dots \subset Ker N^{n_0} \subset D$$

(les inclusions sont strictes) telle que les gradués sont dans $MF_{K_0}^{fa}(\phi)$. Il suffit donc de montrer que si on a une suite exacte courte $0 \rightarrow D' \rightarrow D \rightarrow D'' \rightarrow 0$ dans $MF_{K_0}^{fa}(\phi, N)$ (avec filtrations positives inférieures à $p - 2$) avec D'' dans $MF_{K_0}^{fa}(\phi)$ et D' contenant

un réseau fortement divisible stable par N , alors D contient aussi un réseau fortement divisible stable par N . Soient M'' un réseau fortement divisible de D'' et $(e_j)_{1 \leq j \leq n''}$ une base de M'' adaptée à la filtration. On a des entiers r_j tels que $e_j \in \text{Fil}^{r_j} M''$ avec r_j le plus grand possible et une matrice \mathcal{G} dans $GL_{n''}(W)$ telle que :

$$\begin{pmatrix} \phi_{r_1}(e_1) \\ \vdots \\ \phi_{r_{n''}}(e_{n''}) \end{pmatrix} = \mathcal{G} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_{n''} \end{pmatrix}$$

Soient \hat{e}_j des relèvements des e_j dans D tels que $\hat{e}_j \in \text{Fil}^{r_j} D$ et $(x_j)_{1 \leq j \leq n''}$ les éléments de D' tels que :

$$\begin{pmatrix} \frac{\phi}{p^{r_1}}(\hat{e}_1) \\ \vdots \\ \frac{\phi}{p^{r_{n''}}}(\hat{e}_{n''}) \end{pmatrix} = \mathcal{G} \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \vdots \\ \hat{e}_{n''} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n''} \end{pmatrix}$$

Soit M' un réseau fortement divisible de D' stable par N , quitte à diviser M' par une puissance de p , on peut supposer que M' contient les x_j et les $N(\hat{e}_j)$. Soit M le réseau de D engendré par M' et les \hat{e}_j , il est clairement stable par N . On vérifie facilement que $\phi(\text{Fil}^i M) \subset p^i M$ et qu'on a une suite exacte courte :

$$0 \rightarrow M' \rightarrow \sum_{i \in \mathbf{N}} \frac{\phi}{p^i}(\text{Fil}^i M) \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

ce qui montre qu'on a bien $\sum_{i \in \mathbf{N}} \frac{\phi}{p^i}(\text{Fil}^i M) = M$. Si maintenant on pose $\mathcal{M} = S \otimes_W M$ avec $\text{Fil}^{p-2} \mathcal{M} = \sum_{i=0}^{p-2} \text{Fil}^i S \otimes \text{Fil}^{p-2-i} M$, $\phi_{p-2} = \sum_{i=0}^{p-2} \phi_i \otimes \phi_{p-2-i}$ et $N = N \otimes Id + Id \otimes N$, \mathcal{M} est un réseau fortement divisible au sens (4.1.1.1) et par (4.2.1), on a le résultat. \square

Remarque. – La naïveté est automatique lorsque la longueur de la filtration n'excède pas 1. En dehors de ce cas, la plupart des modules faiblement admissibles ne sont, bien sur, pas naïfs ! (voir section suivante).

6. Le cas de dimension 2

Nous montrons que les modules faiblement admissibles de dimension 2 dont la longueur de la filtration n'excède pas $p - 2$ sont admissibles en exhibant des réseaux fortement divisibles (4.1.1.1). Nous décrivons les exposants de l'inertie modérée sur la semi-simplifiée modulo p des représentations galoisiennes semi-stables associées. Les démonstrations sont assez calculatoires et le lecteur est invité à traiter d'abord quelques cas simples (petites valeurs des paramètres).

6.1. Les (ϕ, N) -modules filtrés faiblement admissibles de dimension 2 et leur S_{K_0} -module associé

6.1.1.

Notons ν_p la valuation p -adique sur \bar{K}_0 normalisée par $\nu_p(p) = 1$. Soit D un module filtré faiblement admissible de dimension 2 tel que N est non nul. Soit r le plus petit élément de \mathbf{Z} tel que $Fil^{r+1}D \neq Fil^rD$ et s le plus petit élément de \mathbf{N} tel que $Fil^{r+s+1}D = 0$. Soit e_1 un vecteur de D tel que $N(e_1) \neq 0$, $(e_1, N(e_1))$ est alors une base de D et $\phi(N(e_1)) = lN(e_1)$ pour un $l \in K_0^*$. On peut alors choisir e_1 tel que $\phi(e_1) = ple_1$ et un tel e_1 est unique à multiplication par un élément de K_0^* près. Si on remplace e_1 par ae_1 ($a \in K_0^*$), l est remplacé par $\phi(a)a^{-1}l$ et en particulier $\nu_p(l)$ est indépendant des choix. Soit $e_2 = N(e_1)$:

1^{er} cas : $s = 0$, les conditions d'admissibilité faible s'écrivent $\nu_p(l) + \nu_p(pl) = 2r$ et $r \leq \nu_p(l)$ qui entraîne $2\nu_p(l) + 1 \leq 2\nu_p(l)$ et est donc impossible.

2^{ième} cas : $s \geq 1$, on a $Fil^{r+1}D = Fil^{r+2}D = \dots = Fil^{r+s}D = K_0 \cdot (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in K_0$, $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$.

- Si $\lambda_1 = 0$, les conditions d'admissibilité faible s'écrivent $\nu_p(l) + \nu_p(pl) = 2r + s$ et $r + s \leq \nu_p(l)$, qui donne $2(r + s) + 1 \leq 2r + s$ et est encore impossible.
- Si $\lambda_1 \neq 0$, on a un unique $\mathcal{L} \in K_0$ tel que $Fil^{r+1}D = \dots = Fil^{r+s}D = K_0 \cdot (e_1 + \mathcal{L}e_2)$ et les conditions d'admissibilité faible s'écrivent $\nu_p(l/p^r) \geq 0$ et $2\nu_p(l/p^r) + 1 = s$: s est impair.

Nous allons montrer le théorème :

THÉORÈME 6.1.1.1. – Soit D faiblement admissible de dimension 2. Avec les notations précédentes, supposons $p \geq s + 2$, alors D est admissible.

Par (5.1), on se ramène au cas $r = 0$. La démonstration utilise alors l'existence de réseaux fortement divisibles (d'où la restriction inévitable sur la longueur de la filtration), mais va donner plus que la simple admissibilité :

Soit V une représentation p -adique de G de dimension finie et \bar{V} sa semi-simplifiée modulo p (la semi-simplifiée de la réduction modulo p d'un réseau stable par Galois : c'est indépendant du réseau, voir ([Se], 1.6)), on a sur \bar{V} une action de l'inertie modérée et cette action s'exprime comme puissances des caractères fondamentaux de Serre : $\chi_\alpha^{i_0 + i_1 p + \dots + i_{\alpha-1} p^{\alpha-1}}$, $0 \leq i_j \leq p - 1$ ([Se], 1.7). En dimension 2, on a donc deux chiffres $0 \leq i_0 \leq i_1 \leq p - 1$ (l'action étant $Diag(\chi_1^{i_0}, \chi_1^{i_1})$ ou $\chi_2^{i_0 + i_1 p}$ ou son conjugué). Supposons V semi-stable (de dimension 2) à poids de Hodge-Tate $(0, s)$ avec $0 \leq s \leq p - 2$. Si V est cristalline, un résultat de Fontaine et Laffaille ([FL], 5.3) donne $(i_0, i_1) = (0, s)$. Si V n'est pas cristalline, c'est une des représentation $Hom_{MF_{K_0}(\phi, N)}(D, B_{st})$ pour un certain D précédent : on note $\mathcal{L}(V) \in K_0$ l'invariant \mathcal{L} de D . Par un calcul explicite, on aura le résultat :

THÉORÈME 6.1.1.2. – Avec les notations précédentes :

$$\begin{aligned} (i_0, i_1) &= \left(\frac{s-1}{2}, \frac{s+1}{2}\right) \text{ si } \nu_p(\mathcal{L}(V)) \geq 0, \\ (i_0, i_1) &= \left(\frac{s-1}{2} + \nu_p(\mathcal{L}(V)), \frac{s+1}{2} - \nu_p(\mathcal{L}(V))\right) \text{ si } -\frac{s-1}{2} \leq \nu_p(\mathcal{L}(V)) \leq 0, \\ (i_0, i_1) &= (0, s) \text{ si } \nu_p(\mathcal{L}(V)) \leq -\frac{s-1}{2}. \end{aligned}$$

Remarque 1. – En combinant les deux théorèmes, on remarque que si l'on a deux entiers positifs i_0, i_1 tels que $i_0 + i_1 \leq p - 2$, on peut toujours trouver une représentation semi-stable de dimension 2 à poids de Hodge-Tate $(0, i_0 + i_1)$ et dont les chiffres des exposants de l'inertie modérée sont (i_0, i_1) .

Remarque 2. – Le nombre \mathcal{L} revêt une importance particulière pour les fonctions L p -adiques associées à certaines formes modulaires “nouvelles” de poids pair (voir [Ma2] et les travaux à venir de Kato).

6.1.2.

Soit D faiblement admissible de dimension 2 comme en (6.1.1) avec $r = 0$. Pour $s = 1$, D est naïf et donc, par (5.3), admissible (en fait, dans ce cas, D est même ordinaire ([Pe], 1.2)). De façon explicite, on voit facilement, lorsque $s = 1$, que $M = W.e_1 + W.\mathcal{L}\frac{e_2}{p}$ si $\nu_p(\mathcal{L}) \leq 0$ et $M = W.e_1 + W.\frac{e_2}{p}$ si $\nu_p(\mathcal{L}) \geq 0$ est un réseau fortement divisible stable par N . Le théorème (6.1.1.2) s'en déduit aisément dans ce cas.

On suppose dorénavant $s = 2t + 1$, $t \in \mathbf{N}^*$, $p \geq s + 2$, $Fil^0 D = D$, $Fil^1 D = \dots = Fil^s D = K_0.(e_1 + \mathcal{L}e_2)$, $Fil^{s+1} D = 0$, $\phi(e_1) = p^{t+1}\mu e_1$, $\phi(e_2) = p^t\mu e_2$ où $\mu \in W^*$ et $N(e_1) = e_2$, $N^2 = 0$. Soit $\mathcal{D} = S_{K_0} \otimes_{K_0} D$ le S_{K_0} -module filtré associé à D ([Br2], 6) : il est muni d'un Frobenius ϕ défini par $\phi(\lambda \otimes x) = \phi(\lambda) \otimes \phi(x)$ et d'un opérateur de monodromie N défini par $N(\lambda \otimes x) = N(\lambda) \otimes x + \lambda \otimes N(x)$. Soit $F_p : \mathcal{D} \rightarrow D$ l'application K_0 -linéaire $F_p(\sum_{i=0}^{\infty} w_i \frac{u^i}{i!} \otimes x) = \sum_{i=0}^{\infty} w_i \frac{p^i}{i!} x$, on définit la filtration par $Fil^i \mathcal{D} = \mathcal{D}$ si $i \leq 0$ et, pour $i \geq 1$, par la formule récurrente ([Br2], 6) :

$$Fil^i \mathcal{D} = \{y \in \mathcal{D} \text{ tq } N(y) \in Fil^{i-1} \mathcal{D} \text{ et } F_p(y) \in Fil^i D\}$$

On montre que $Fil^i \mathcal{D} = \sum_{j=i-(p-2)}^i Fil^j S_{K_0}.Fil^{i-j} \mathcal{D}$ pour $i \geq p - 1$ et que $(u - p)^j . x \in Fil^i \mathcal{D} \Leftrightarrow x \in Fil^{i-j} \mathcal{D}$ (ces faits se déduisent immédiatement de [Br2], B.4.4). Donnons une description explicite de la filtration sur \mathcal{D} .

Soient $v = u - p$ et $r \in \mathbf{N}^*$, puisque ce sont les “degrés” en v inférieurs à r qui sont significatifs pour la description de $Fil^r \mathcal{D}$, on pose :

$$\mathcal{D}_r = \left\{ \sum_{i=0}^{r-1} \frac{v^i}{p^i} y_i, y_i \in D \right\} \cap Fil^r \mathcal{D}$$

de sorte que $Fil^r \mathcal{D} = \mathcal{D}_r + Fil^r S_{K_0}.D$.

PROPOSITION 6.1.2.1. – Soient $y_0, \dots, y_r \in D$, $y = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{v^i}{p^i} y_i \in \mathcal{D}$ et soit i_0 le plus petit entier tel que $y_{i_0} \neq 0$. Alors $y \in \mathcal{D}_r$ si et seulement si $i_0 \geq r - s$ et il existe $C_0 \in K_0^*$ et $(C_1, \dots, C_{r-i_0-1}) \in K_0^{r-i_0-1}$ tels que

$$\begin{aligned} y_{i_0} &= C_0(e_1 + \mathcal{L}e_2) \\ y_i &= C_{i-i_0}(e_1 + \mathcal{L}e_2) + \sum_{j=0}^{i-i_0-1} \frac{(-1)^{i-i_0-j-1}}{i-i_0-j} C_j e_2, \quad i_0 + 1 \leq i \leq r - 1 \end{aligned}$$

Preuve. – Le résultat est immédiat en utilisant la remarque finale de l'appendice de [Br2]. Donnons en une preuve directe. Il suffit de montrer le lemme avec $1 \leq r \leq s \leq p - 2$. On pose $e'_1 = e_1 + \mathcal{L}e_2$ et on prend l'hypothèse de récurrence :

$$HR(r) = \left(\sum_{i=0}^{r-1} \frac{v^i}{p^i} y_i \in \mathcal{D}_r \text{ ssi } \sum_{i=0}^{r-2} \frac{v^i}{p^i} y_i \in \mathcal{D}_{r-1} \text{ et } a_{r-1}^2 = \sum_{i=0}^{r-2} (-1)^{r-2-i} \frac{a_i^1}{r-1-i} \right)$$

où $y_i = a_i^1 e_1^1 + a_i^2 e_2$. Pour $r = 1$, $HR(1) = (y_0 \in \mathcal{D}_1 \text{ ssi } a_0^2 = 0)$ est bien vérifiée. Supposons $HR(i)$ pour $i \leq r$, $r+1 \leq s$ et soit $y = \sum_{i=0}^r \frac{v^i}{p^i} y_i \in \mathcal{D}$ avec $y_i = a_i^1 e_1^1 + a_i^2 e_2$. Posons $y' = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{v^i}{p^i} y_i$, on a facilement $y \in \mathcal{D}_{r+1}$ si et seulement si $y' \in \mathcal{D}_r$ et $N(y) \in \text{Fil}^r \mathcal{D}$ i.e. si et seulement si $y' \in \mathcal{D}_r$ et $N(y') - \frac{v^{r-1}}{p^{r-1}} r y_r \in \mathcal{D}_r$. Un calcul donne $N(y') - \frac{v^{r-1}}{p^{r-1}} r y_r = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{v^i}{p^i} z_i$ avec $z_i = b_i^1 e_1^1 + b_i^2 e_2$ où :

$$b_i^1 = -i a_i^1 - (i+1) a_{i+1}^1, \quad b_i^2 = a_i^1 - i a_i^2 - (i+1) a_{i+1}^2, \quad 0 \leq i \leq r-1$$

Par $HR(r)$, $N(y') - \frac{v^{r-1}}{p^{r-1}} r y_r \in \mathcal{D}_r$ si et seulement si $\sum_{i=0}^{r-2} \frac{v^i}{p^i} z_i \in \mathcal{D}_{r-1}$ et $b_{r-1}^2 = \sum_{i=0}^{r-2} (-1)^{r-2-i} \frac{b_i^1}{r-1-i}$. La première condition découle de $y' \in \mathcal{D}_r$ qui, par récurrence, est équivalent à $(a_0^2 = 0, a_i^2 = \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i-1-j} \frac{a_j^1}{i-j}, 1 \leq i \leq r-1)$. Donc finalement, $y \in \mathcal{D}_{r+1}$ est équivalent à :

$$a_{r-1}^1 - (r-1) a_{r-1}^2 - r a_r^2 = \sum_{i=0}^{r-2} \frac{(-1)^{r-2-i}}{r-1-i} (-i a_i^1 - (i+1) a_{i+1}^1)$$

et

$$a_0^2 = 0, \quad a_i^2 = \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i-1-j} \frac{a_j^1}{i-j}, \quad 1 \leq i \leq r-1.$$

La première équation s'écrit :

$$r a_r^2 = -(r-1) a_{r-1}^2 + r a_{r-1}^1 + \sum_{i=1}^{r-2} (-1)^{r-2-i} \frac{i a_i^1}{(r-1-i)(r-i)}.$$

En utilisant :

$$a_{r-1}^2 = \sum_{i=0}^{r-2} \frac{(-1)^{r-2-i} a_i^1}{r-1-i} = (-1)^{r-2} \frac{a_0^1}{r-1} + \sum_{i=1}^{r-2} \frac{(-1)^{r-2-i} a_i^1}{r-1-i}$$

elle devient :

$$r a_r^2 = r a_{r-1}^1 + (-1)^{r-1} a_0^1 + \sum_{i=1}^{r-2} \frac{(-1)^{r-2-i}}{r-1-i} a_i^1 \left(\frac{i - (r-1)(r-i)}{r-i} \right)$$

soit $a_r^2 = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(-1)^{r-1-i} a_i^1}{r-i}$. On a l'énoncé en posant $C_j = a_j^1$. \square

6.2. Réseaux fortement divisibles

6.2.1.

On rappelle que $s = 2t + 1$, $t \in \mathbf{N}^*$, $p \geq s + 2$. Soit $l = -\nu_p(\mathcal{L}) \in \mathbf{Z} \cup \{-\infty\}$ et, si $\mathcal{L} \neq 0$, λ l'unique élément de W^* tel que $\mathcal{L} = \frac{\lambda}{p^t}$. Soit M le réseau suivant de D :

- $M = W.(e_1 + \phi(\lambda) \frac{e_2}{p^{t+1}}) + W. \frac{e_2}{p}$ si $l \leq t$
- $M = W.(e_1 + \phi(\lambda) \frac{e_2}{p^{t+1}}) + W.p^t \frac{e_2}{p^{t+1}}$ si $l \geq t$

(donc $M = W.e_1 + W. \frac{e_2}{p}$ si $l = \{-\infty\}$). On pose $\mathcal{M} = S \otimes_W M \subset S_{K_0} \otimes_{K_0} D = \mathcal{D}$, on vérifie que \mathcal{M} est stable par ϕ et N et on le munit de la filtration induite par D .

PROPOSITION 6.2.1.1. – Avec les notations précédentes, on a $\phi(\text{Fil}^{p-2}\mathcal{M}) \subset p^{p-2}\mathcal{M}$.

Preuve. – Soit $x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{v^i}{i!} x_i \in \text{Fil}^{p-2}\mathcal{M}$, $x_i \in M$, on écrit $x = x_{\leq p-2} + x_{\geq p-2}$ avec $x_{\leq p-2} = \sum_{i=0}^{p-3} \frac{v^i}{i!} x_i$. Il est clair que $\phi(x_{\geq p-2}) \in p^{p-2}\mathcal{M}$. Soit i_0 le plus petit entier tel que $x_{i_0} \neq 0$, on a $x_{\leq p-2} = \frac{v^{i_0}}{i_0!} y$ ou $y = \sum_{i=0}^{p-3-i_0} \frac{v^i}{i!} y_i \in \text{Fil}^{p-2-i_0}\mathcal{M}$ ($y_i \in M$) et il suffit de montrer $\phi(y) \in p^{p-2-i_0}\mathcal{M}$. Soient donc $m \leq s-1$ et $y \in \text{Fil}^{m+1}\mathcal{M}$ tel que $F_p(y) \neq 0$. Par (6.1.2.1), on peut écrire $y = \sum_{i=0}^m \frac{v^i}{p^i} (C_i(e_1 + \mathcal{L}e_2) + D_i e_2)$ où $C_0 \in K_0^*$, $(C_1, \dots, C_m) \in K_0^m$ et :

$$(0) \quad \begin{cases} D_0 = 0 \\ D_i = \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(-1)^{i-k+1}}{i-k} C_k \quad (1 \leq i \leq m) \end{cases}$$

On a aussi :

$$y = \begin{cases} \sum_{i=0}^m \frac{v^i}{p^i} \left(C_i \left(e_1 + \phi(\lambda) \frac{e_2}{p^{l+1}} \right) + \left(pD_i + (\lambda p - \phi(\lambda)) \frac{C_i}{p^i} \right) \left(\frac{e_2}{p} \right) \right) \in \mathcal{M} & \text{si } l \leq t \\ \sum_{i=0}^m \frac{v^i}{p^i} \left(C_i \left(e_1 + \phi(\lambda) \frac{e_2}{p^{l+1}} \right) + \left(p^{l+1-t} D_i + (\lambda p - \phi(\lambda)) \frac{C_i}{p^i} \right) \left(p^t \frac{e_2}{p^{l+1}} \right) \right) \in \mathcal{M} & \text{si } l \geq t \end{cases}$$

ce qui entraîne pour $0 \leq i \leq m$:

$$(1) \quad \begin{cases} C_i \in p^i W \text{ et } pD_i + (\lambda p - \phi(\lambda)) \frac{C_i}{p^i} \in p^i W & \text{si } l \leq t \\ C_i \in p^i W \text{ et } p^{l+1-t} D_i + (\lambda p - \phi(\lambda)) \frac{C_i}{p^i} \in p^i W & \text{si } l \geq t \end{cases}$$

Un calcul facile donne par ailleurs :

$$\phi(y) = \begin{cases} \mu p^{t+1} \sum_{i=0}^m c^i \left(\phi(C_i) \left(e_1 + \phi(\lambda) \frac{e_2}{p^{l+1}} \right) + \phi(D_i) \frac{e_2}{p} \right) & \text{si } l \leq t \\ \mu p^{t+1} \sum_{i=0}^m c^i \left(\phi(C_i) \left(e_1 + \phi(\lambda) \frac{e_2}{p^{l+1}} \right) + p^{l-t} \phi(D_i) \left(p^t \frac{e_2}{p^{l+1}} \right) \right) & \text{si } l \geq t \end{cases}$$

Si $m \leq t$, il est clair que $\phi(y) \in p^{m+1}\mathcal{M}$. Supposons $t+1 \leq m \leq 2t$.

Si $l \geq t$: pour tout i , on a (1) $\Rightarrow C_i \in p^i W \xrightarrow{(0)} D_i \in W \xrightarrow{(1)} (\lambda p - \phi(\lambda)) \frac{C_i}{p^i} \in W \Rightarrow C_i \in p^t W \xrightarrow{(0)} D_i \in p^t W$. Comme $m \leq s-1 = 2t$, on a $\phi(y) \in p^{m+1}\mathcal{M}$.

Si $l \leq 0$: pour tout $i \geq 1$, (1) $\Rightarrow D_i \in p^{i-1} W$ et $C_i \in p^i W$, en particulier $C_i \in p^{m-t} W$ si $m-t \leq i \leq m$ et $D_i \in p^{m-t} W$ si $m-t+1 \leq i \leq 2m-2t \leq m$. On en déduit un système :

$$\begin{cases} \frac{-1}{2} C_{m-t-1} + \frac{1}{3} C_{m-t-2} + \dots + \frac{(-1)^{m-t}}{m-t+1} C_0 \in p^{m-t} W \\ \frac{1}{3} C_{m-t-1} - \frac{1}{4} C_{m-t+2} + \dots + \dots \in p^{m-t} W \\ \vdots \\ \frac{(-1)^{m-t}}{m-t+1} C_{m-t-1} + \dots + \dots + \dots \in p^{m-t} W \end{cases}$$

La matrice correspondante a un déterminant dit de Cauchy (de la forme $\det(\frac{1}{a_i+b_j})_{(i,j)}$, les signes alternés ne changeant éventuellement que le signe du déterminant) dont le calcul est bien connu et élémentaire ($\frac{\prod_{i < j} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{(i,j)} (a_i + b_j)}$). Puisque les facteurs sont plus petits que $p - 1$, ce déterminant est inversible d'où $C_i \in p^{m-t}W$ pour $i \in \{0, \dots, m\}$, donc D_i aussi et $\phi(y) \in p^{m+1}\mathcal{M}$.

Si $0 \leq l \leq t - 1$: un examen des équations correspondantes en (1) donne :

- si $0 \leq m \leq 2t$, $C_0 \in p^l W$, $C_1 \in p^{l+1}W, \dots, C_l \in p^{l+1}W$, $C_{l+1} \in p^{l+1}W$, $C_{l+2} \in p^{l+2}W, \dots, C_m \in p^m W$
- si $2l + 2r \leq m \leq 2t$ ($0 \leq r \leq t - l$), $C_0 \in p^{l+r}W, \dots, C_r \in p^{l+r}W$, $C_{r+1} \in p^{l+r+1}W, \dots, C_{l+r+1} \in p^{l+r+1}W$, $C_{l+r+2} \in p^{l+r+2}W, \dots, C_m \in p^m W$

Le premier point vient de (1) $\Rightarrow C_i \in p^i W \xrightarrow{(0)} D_i \in W \xrightarrow{(1)} C_i \in p^{l+1}W + p^{l+i}W \Rightarrow C_0 \in p^l W$, $C_i \in p^{l+1}W \cap p^i W$ ($i \geq 1$). Le deuxième se prouve par récurrence sur r : le cas $r = 0$ vient du premier. Par récurrence (au cran $r - 1$) et en utilisant les r dernières équations de (1), on a $C_i \in p^{l+r}W$ ($r \leq i \leq m$) et $D_i \in p^{l+r}W$ ($2l + r + 1 \leq i \leq 2l + 2r \leq m$). Par le même argument que dans le cas $l \leq 0$, on en déduit $C_0, \dots, C_{r-1} \in p^{l+r}W$, donc $\forall i \in \{0, \dots, m\}$, $C_i \in p^{l+r}W \xrightarrow{(0)} D_i \in p^{l+r}W \xrightarrow{(1)} C_i \in p^{l+r+1}W + p^{l+i}W \Rightarrow C_i \in p^{l+r+1}W \cap p^i W$, $r + 1 \leq i \leq m$ (attention, les valuations précédentes sont loin d'être optimales en général). On en déduit :

- si $0 \leq m \leq 2l + 1$ ($l \leq t - 1$), on a $m \leq t + l$ d'où $m - t \leq l \leq \nu_p(C_i)$, $\forall i$
- si $m = 2l + 2r$ ($1 \leq r \leq t - l$), on a $m - t \leq 2l + 2r - (l + r) = l + r \leq \nu_p(C_i)$, $\forall i$
- si $m = 2l + 2r + 1$, de $m \leq 2t$ on a $r \leq t - l - 1$ et $m - t = l + r + (l + r + 1 - t) \leq l + r \leq \nu_p(C_i)$, $\forall i$

On a donc toujours $\phi(y) \in p^{m+1}\mathcal{M}$ si $y \in \text{Fil}^{m+1}\mathcal{M}$ d'où le résultat. \square

Par la faible admissibilité de D , (6.2.1.1) et (A.3), on en déduit :

COROLLAIRE 6.2.1.2. - Avec les notations précédentes, $\frac{\phi}{p^{p-2}}(\text{Fil}^{p-2}\mathcal{M})$ engendre \mathcal{M} comme S -module i.e. \mathcal{M} est fortement divisible.

Par (4.2.1), ceci démontre le théorème (6.1.1.1).

6.2.2.

Pour démontrer (6.1.1.2), on va expliciter deux éléments X et Y de $\text{Fil}^{p-2}\mathcal{M}$ tels que $\frac{\phi}{p^{p-2}}(X)$ et $\frac{\phi}{p^{p-2}}(Y)$ engendrent le S -module \mathcal{M} . Si $(C_0, \dots, C_{2t}) \in K_0^{2t+1}$, on pose $D_0 = 0$ et $D_i = \sum_{k=0}^{i-1} \frac{(-1)^{i-k+1}}{i-k} C_k$ ($1 \leq i \leq 2t$).

Si $l \geq t$: on pose $X = v^{p-2}(e_1 + \phi(\lambda)\frac{e_2}{p^{l+1}})$ et $Y = v^{p-3-2t}p^t Y'$ où Y' est l'élément de $\text{Fil}^{2t+1}\mathcal{M}$ construit en (6.1.2.1) avec $i_0 = 0$ et $C_0 = 1$, $C_1 = \dots = C_{l+1} = 0$, $C_i = -(p\lambda - \phi(\lambda))^{-1}p^{l+1}\frac{(-1)^{i+1}}{i}$, $i \in \{l+2, \dots, 2t\}$ ($C_0 = 1$, $C_i = 0$, $i \in \{1, \dots, 2t\}$ si $l \geq 2t - 1$). On vérifie facilement que $p^t Y' \in \mathcal{M} \cap \text{Fil}^{2t+1}\mathcal{D}$ puisque :

$$\begin{aligned} \frac{\phi}{p^{p-2}}(X) &= \mu c^{p-2} \left(p^{t+1} \left(e_1 + \phi(\lambda) \frac{e_2}{p^{l+1}} \right) + (\phi^2(\lambda) - p\phi(\lambda)) \left(p^t \frac{e_2}{p^{l+1}} \right) \right) \\ \frac{\phi}{p^{p-2}}(Y) &= \mu c^{p-3-2t} \left(\sum_{i=0}^{2t} c^i \left(\phi(C_i) \left(e_1 + \phi(\lambda) \frac{e_2}{p^{l+1}} \right) + p^{l-t} \phi(D_i) \left(p^t \frac{e_2}{p^{l+1}} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

Finalement, on a $w, w' \in S^*$, $w'' \in S$ et $Z \in \mathcal{M}$ tels que $\frac{\phi}{p^{p-2}}(X) = w(p^t \frac{e_2}{p^{l+1}}) + pZ$ et $\frac{\phi}{p^{p-2}}(Y) = w'(e_1 + \phi(\lambda) \frac{e_2}{p^{l+1}}) + w''(p^t \frac{e_2}{p^{l+1}})$ d'où le fait que $\frac{\phi}{p^{p-2}}(X)$ et $\frac{\phi}{p^{p-2}}(Y)$ engendrent le S -module \mathcal{M} dans ce cas.

Dans la suite de (6.2.2), on suppose $l \leq t - 1$.

Si $1 \leq l \leq t - 1$: soit $r = t - l$, $1 \leq r \leq t - 1$, on pose $X = v^{p-2-2t} p^{t-1} X'$ et $Y = v^{p-3-2t} p^t Y'$ avec :

$$X' = \sum_{i=0}^{2t-1} \frac{v^i}{p^i} \left(C_i^X \left(e_1 + \lambda \frac{e_2}{p^l} \right) + D_i^X \frac{e_2}{p} \right) \text{ et } Y' = \sum_{i=0}^{2t} \frac{v^i}{p^i} \left(C_i^Y \left(e_1 + \lambda \frac{e_2}{p^l} \right) + D_i^Y \frac{e_2}{p} \right)$$

où $(C_i^X)_{0 \leq i \leq 2t-1}$ et $(C_i^Y)_{0 \leq i \leq 2t}$ sont les uniques éléments de W (voir ci-après) qui satisfont respectivement les équations :

$$\begin{cases} C_0^X = 1, C_r^X = \dots = C_{r+l}^X = 0 \\ C_{l+r+1}^X = -(p\lambda - \phi(\lambda))^{-1} p^{l+1} D_{l+r+1}^X, \dots, C_{2l+r}^X = -(p\lambda - \phi(\lambda))^{-1} p^{l+1} D_{2l+r}^X \\ C_{2l+r+1}^X = \dots = C_{2l+2r-1}^X = 0, D_{2l+r+1}^X = \dots = D_{2l+2r-1}^X = 0 \end{cases}$$

(les $2(r-1)$ dernières équations disparaissent pour $r = 1$)

$$\begin{cases} C_0^Y = 1, C_{r+1}^Y = \dots = C_{r+l+1}^Y = 0 \\ C_{l+r+2}^Y = -(p\lambda - \phi(\lambda))^{-1} p^{l+1} D_{l+r+2}^Y, \dots, C_{2l+r}^Y = -(p\lambda - \phi(\lambda))^{-1} p^{l+1} D_{2l+r}^Y \\ C_{2l+r+1}^Y = \dots = C_{2l+2r}^Y = 0, D_{2l+r+1}^Y = \dots = D_{2l+2r}^Y = 0 \end{cases}$$

($X, Y \in \text{Fil}^{p-2} \mathcal{M}$ par (6.1.2.1) et un calcul facile). Un examen de ces équations montre que pour $r \geq 2$, $(C_i^X)_{1 \leq i \leq r-1}$ est solution d'un système dans W qui modulo p est le système :

$$S_{l,r}^X : \begin{cases} \frac{(-1)^{2l+r+1}}{2l+r} C_1^X + \frac{(-1)^{2l+r}}{2l+r-1} C_2^X + \dots + \frac{(-1)^{2l+3}}{2l+2} C_{r-1}^X = \frac{(-1)^{2l+r+1}}{2l+r+1} \\ \frac{(-1)^{2l+r+2}}{2l+r+1} C_1^X + \frac{(-1)^{2l+r+1}}{2l+r} C_2^X + \dots + \frac{(-1)^{2l+4}}{2l+3} C_{r-1}^X = \frac{(-1)^{2l+r+2}}{2l+r+2} \\ \vdots \\ \frac{(-1)^{2l+2r-1}}{2l+2r-2} C_1^X + \frac{(-1)^{2l+2r-2}}{2l+2r-3} C_2^X + \dots + \frac{(-1)^{2l+r+1}}{2l+r} C_{r-1}^X = \frac{(-1)^{2l+2r-1}}{2l+2r-1} \end{cases}$$

et que $(C_i^Y)_{1 \leq i \leq r}$ est solution d'un système dans W qui modulo p est le système :

$$S_{l,r}^Y : \begin{cases} \frac{(-1)^{2l+r+1}}{2l+r} C_1^Y + \frac{(-1)^{2l+r}}{2l+r-1} C_2^Y + \dots + \frac{(-1)^{2l+2}}{2l+1} C_r^Y = \frac{(-1)^{2l+r+1}}{2l+r+1} \\ \frac{(-1)^{2l+r+2}}{2l+r+1} C_1^Y + \frac{(-1)^{2l+r+1}}{2l+r} C_2^Y + \dots + \frac{(-1)^{2l+3}}{2l+2} C_r^Y = \frac{(-1)^{2l+r+2}}{2l+r+2} \\ \vdots \\ \frac{(-1)^{2l+2r}}{2l+2r-1} C_1^Y + \frac{(-1)^{2l+2r-1}}{2l+2r-2} C_2^Y + \dots + \frac{(-1)^{2l+r+1}}{2l+r} C_r^Y = \frac{(-1)^{2l+2r}}{2l+2r} \end{cases}$$

Comme en (6.2.1.1), $S_{l,r}^X$ et $S_{l,r}^Y$ correspondent à des matrices de Cauchy de déterminant non nul dans \mathbf{F}_p et les (C_i^X) et (C_i^Y) sont donc déterminés de façon unique dans W . De plus, on a $C_{r-1}^X \in W^*$ et $C_r^Y \in W^*$.

Si $l \leq 0$: on pose de même $X = v^{p-2-2t}p^{t-1}X'$ et $Y = v^{p-3-2t}p^tY'$ avec :

$$X' = \sum_{i=0}^{2t-1} \frac{v^i}{p^i} \left(C_i^X \left(e_1 + \lambda \frac{e_2}{p^l} \right) + D_i^X \frac{e_2}{p} \right) \text{ et } Y' = \sum_{i=0}^{2t} \frac{v^i}{p^i} \left(C_i^Y \left(e_1 + \lambda \frac{e_2}{p^l} \right) + D_i^Y \frac{e_2}{p} \right)$$

où $(C_i^X)_{0 \leq i \leq 2t-1}$ et $(C_i^Y)_{0 \leq i \leq 2t}$ sont les uniques éléments de W qui satisfont respectivement les équations :

$$\begin{aligned} C_0^X = 1, C_t^X = C_{t+1}^X = \dots = C_{2t-1}^X = 0, (\text{pour } t \geq 2) D_{t+1}^X = \dots = D_{2t-1}^X = 0 \\ C_0^Y = 1, C_{t+1}^Y = C_{t+2}^Y \dots = C_{2t}^Y = 0, D_{t+1}^Y = \dots = D_{2t}^Y = 0 \end{aligned}$$

C'est équivalent à demander que $(C_i^X)_{1 \leq i \leq t-1}$ (resp. $(C_i^Y)_{1 \leq i \leq t}$) soit solution du système $S_{0,t}^X$ (resp. $S_{0,t}^Y$) dans W . On a aussi $C_{t-1}^X \in W^*$ et $C_t^Y \in W^*$.

Le lemme suivant sera utile :

LEMME 6.2.2.1. – On a $D_{2t-r}^X \in W^*$ si $1 \leq l \leq t-1$ et $D_l^X \in W^*$ si $l \leq 0$.

Preuve. – On considère chaque équation modulo p . Pour $1 \leq l \leq t-1$ et $r \geq 2$ (rappelons que $l+r=t$), on a $C_i^X = \frac{\Delta_i}{\det(S_{l,r}^X)}$, $1 \leq i \leq r-1$ où Δ_i est le déterminant de $S_{l,r}^X$ une fois remplacée la i -ième colonne par la colonne de droite. Mais on voit facilement que (modulo p) :

$$D_{2t-r}^X = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(-1)^{2t-r-i+1}}{2t-r-i} C_i^X = \frac{1}{\det(S_{l,r}^X)} \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(-1)^{2t-r-i+1}}{2t-r-i} \Delta_i$$

(où $\Delta_0 = \det(S_{l,r}^X)$), soit $\det(S_{l,r}^X)D_{2t-r}^X = \det(S_{l,r}^Y)$ (au signe près) en développant $\det(S_{l,r}^Y)$ par rapport à la première ligne. Les déterminants étant inversibles, on a le résultat. Pour $l \leq 0$ la preuve est similaire. \square

Un calcul facile donne :

$$\begin{pmatrix} \frac{\phi}{p^{p-2}}(X) \\ \frac{\phi}{p^{p-2}}(Y) \end{pmatrix} = \mu c^{p-3-2t} \mathcal{G} \begin{pmatrix} e_1 + \phi(\lambda) \frac{e_2}{p^{l+1}} \\ \frac{e_2}{p} \end{pmatrix}$$

où

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} c(\phi(C_0^X) + c\phi(C_1^X) + \dots + c^{2t-1}\phi(C_{2t-1}^X)) & c(\phi(D_0^X) + c\phi(D_1^X) + \dots + c^{2t-1}\phi(D_{2t-1}^X)) \\ \phi(C_0^Y) + c\phi(C_1^Y) + \dots + c^{2t}\phi(C_{2t}^Y) & \phi(D_0^Y) + c\phi(D_1^Y) + \dots + c^{2t}\phi(D_{2t}^Y) \end{pmatrix}$$

Le fait que $\frac{\phi}{p^{p-2}}(X)$ et $\frac{\phi}{p^{p-2}}(Y)$ engendrent le S -module \mathcal{M} découle alors de :

PROPOSITION 6.2.2.2. – Avec les notations précédentes, $\mathcal{G} \in GL_2(S)$.

Preuve. – La matrice \mathcal{G} est à coefficients dans $W[[\gamma_p(u)]]$ qui s'injecte dans S , il suffit donc d'avoir l'inversibilité modulo $\gamma_p(u)$ et modulo p . On voit facilement que \mathcal{G} est alors la matrice en (6.2.2.3) en multipliant la première ligne par -1 . Par (6.2.2.1) et puisque $C_r^Y \in W^*$ si $1 \leq l \leq t-1$, $C_t^Y \in W^*$ si $l \leq 0$, le lemme (6.2.2.3) permet de conclure. \square

LEMME 6.2.2.3. – On a les égalités suivantes modulo p et au signe près :

$$\begin{vmatrix} C_0^X - C_1^X + \dots + (-1)^{r-1} C_{r-1}^X & D_0^X - D_1^X + \dots + (-1)^{2t-r} D_{2t-r}^X \\ C_0^Y - C_1^Y + \dots + (-1)^r C_r^Y & D_0^Y - D_1^Y + \dots + (-1)^{2t-r} D_{2t-r}^Y \end{vmatrix} = C_r^Y D_{2t-r}^X$$

si $1 \leq l \leq t - 1$ et

$$\begin{vmatrix} C_0^X - C_1^X + \dots + (-1)^{t-1} C_{t-1}^X & D_0^X - D_1^X + \dots + (-1)^t D_t^X \\ C_0^Y - C_1^Y + \dots + (-1)^t C_t^Y & D_0^Y - D_1^Y + \dots + (-1)^t D_t^Y \end{vmatrix} = C_t^Y D_t^X$$

si $l \leq 0$.

Preuve. – On donne la preuve pour $1 \leq l \leq t-1$, l'autre cas étant similaire. Je n'ai trouvé d'autre démonstration qu'un calcul d'algèbre linéaire horrible, mais facile. On rappelle que $t = l + r$, $D_0^Y = D_0^X = 0$, $D_1^Y = D_1^X = 1$ et, modulo p , $C_i^X = 0$, $i \geq r$ et $C_i^Y = 0$, $i \geq r + 1$. Tous les calculs ci-dessous sont modulo p . Afin d'éviter un foisonnement de cas particuliers, une expression qui n'a pas de sens pour une valeur permise d'un paramètre sera convenue nulle (exemple : $\sum_{j=1}^{r-1}(\dots) = 0$ si $r = 1$).

Soit Δ le déterminant à calculer, puisque :

$$\sum_{i=1}^{2t-r} (-1)^i D_i^Y = \sum_{j=1}^{2l} \frac{1}{j} \sum_{i=0}^r (-1)^{i+1} C_i^Y + \sum_{j=2l+1}^{2t-r} \frac{1}{j} \sum_{i=0}^{2t-r-j} (-1)^{i+1} C_i^{2t}$$

(resp. avec X), on a au signe près ($C_r^X = 0$) :

$$\Delta = \sum_{j=1}^r \frac{1}{2l+j} \begin{vmatrix} \sum_{i=r-j+1}^{r-1} (-1)^i C_i^X & \sum_{i=0}^{r-j} (-1)^i C_i^X \\ \sum_{i=r-j+1}^r (-1)^i C_i^Y & \sum_{i=0}^{r-j} (-1)^i C_i^Y \end{vmatrix}$$

Posons $\delta_i = C_i^Y - C_i^X$, $0 \leq i \leq r - 1$, on a :

$$\Delta = \sum_{j=2}^r \frac{1}{2l+j} \left[\sum_{i=r-j+1}^{r-1} (-1)^{i-1} \delta_i + \sum_{\substack{1 \leq n \leq r-j \\ r-j+1 \leq m \leq r-1}} (-1)^{m+n} (C_m^X \delta_n - C_n^X \delta_m) \right] - \Delta'$$

où $\Delta' = (-1)^r C_r^Y \sum_{j=1}^r \frac{1}{2l+j} \sum_{i=0}^{r-j} (-1)^i C_i^X$. Une réindexation soignée donne :

$$\begin{aligned} (1) \quad \Delta &= \sum_{j=1}^{r-1} \left[\sum_{i=j}^{r-1} \frac{(-1)^{i-1} \delta_i}{2l+r+j-i} + C_1^X \sum_{i=j}^{r-1} \frac{(-1)^i \delta_i}{2l+r+j-i-1} \right. \\ &\quad \left. + \dots + C_{j-1}^X \sum_{i=j}^{r-1} \frac{(-1)^{i+j} \delta_i}{2l+r-i+1} \right] \\ &\quad + \sum_{j=2}^{r-1} \frac{1}{2l+j} \sum_{\substack{1 \leq n \leq r-j \\ r-j+1 \leq m \leq r-1}} (-1)^{m+n} C_m^X \delta_n - \Delta' \end{aligned}$$

En faisant la différence des deux systèmes $S_{l,r}^Y$ et $S_{l,r}^X$, on déduit

$$\sum_{i=1}^{r-1} \frac{(-1)^{i-1} \delta_i}{2l+r+j-i} = \frac{(-1)^r}{2l+j} C_t^Y, \quad 1 \leq j \leq r-1$$

En coupant la somme et en multipliant par C_k^X , on génère les équations pour $0 \leq k \leq r-2$ et $k+1 \leq j \leq r-1$:

$$C_k^X \sum_{i=j}^{r-1} \frac{(-1)^{i+k-1} \delta_i}{2l+r+j-i-k} = \frac{(-1)^{r+k} C_k^X C_r^Y}{2l+j-k} + C_k^X \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(-1)^{i+k} \delta_i}{2l+r+j-i-k}$$

En les injectant dans la première somme de (1) et en réindexant la deuxième, on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_{j=2}^{r-1} \sum_{i=1}^{j-1} \delta_i \left(\frac{(-1)^i}{2l+r+j-i} + \frac{(-1)^{i+1}}{2l+r+j-(i+1)} C_1^X + \dots + \frac{(-1)^{i+j-1}}{2l+r+1-i} C_{j-1}^X \right) \\ &+ \sum_{j=2}^{r-1} \sum_{i=1}^{r-j} \delta_i \left(\frac{(-1)^{r-j+i+1}}{2l+j} C_{r-j+1}^X + \frac{(-1)^{r-j+2+i}}{2l+j} C_{r-j+2}^X + \dots + \frac{(-1)^{r-1+i}}{2l+j} C_{r-1}^X \right) \\ &+ (-1)^r C_r^Y \sum_{j=1}^{r-1} \left(\frac{1}{2l+j} + \frac{-1}{2l+j-1} C_1^X + \dots + \frac{(-1)^{j-1}}{2l+1} C_{j-1}^X \right) - \Delta' \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_{i=1}^{r-2} \delta_i P_i \\ &+ \sum_{i=1}^{r-2} \delta_i Q_i + (-1)^r C_r^Y \sum_{j=1}^{r-1} \left(\frac{1}{2l+j} + \frac{-1}{2l+j-1} C_1^X + \dots + \frac{(-1)^{j-1}}{2l+1} C_{j-1}^X \right) - \Delta' \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} P_i &= \sum_{j=i+1}^{r-1} \left(\frac{(-1)^i}{2l+r+j-i} + \frac{(-1)^{i+1}}{2l+r+j-(i+1)} C_1^X + \dots + \frac{(-1)^{i+j-1}}{2l+r+1-i} C_{j-1}^X \right) \\ Q_i &= \sum_{j=2}^{r-i} \sum_{k=r-j+1}^{r-1} \frac{(-1)^{k+i}}{2l+j} C_k^X \\ &= \sum_{j=i+1}^{r-1} \left(\frac{(-1)^{i+j}}{2l+r-i} C_j^X + \frac{(-1)^{i+j+1}}{2l+r-i-1} C_{j+1}^X + \dots + \frac{(-1)^{r+i-1}}{2l+j-i+1} C_{r-1}^X \right) \end{aligned}$$

Par définition de $S_{l,r}^X$, on a $P_i + Q_i = 0$, $1 \leq i \leq r-2$. Après réindexation du restant, on trouve :

$$\begin{aligned}
\Delta &= (-1)^r C_r^Y \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i}^{r-1} \frac{(-1)^{j-i}}{2l+i} C_{j-i}^X - \Delta' \\
&= (-1)^r C_r^Y \sum_{j=1}^{r-1} \frac{1}{2l+j} \sum_{i=0}^{r-1-j} (-1)^i C_i^X - (-1)^r C_r^Y \sum_{j=1}^r \frac{1}{2l+j} \sum_{i=0}^{r-j} (-1)^i C_i^X \\
&= (-1)^r C_r^Y \left[\sum_{j=1}^{r-1} \frac{(-1)^{r-j+1}}{2l+j} C_{r-j}^X - \frac{1}{2l+r} C_0^X \right] \\
&= (-1)^r C_r^Y \sum_{j=1}^r \frac{(-1)^{r-j+1}}{2l+j} C_{r-j}^X = (-1)^r C_r^Y D_{2l-r}^X \quad \square
\end{aligned}$$

6.3. Les exposants de l'inertie modérée

Nous prouvons ici (6.1.1.2). On rappelle que \mathcal{M} est le réseau fortement divisible de (6.2.1). Si M est un objet de $\underline{MF}_{tor}^{f,p-2}$ (2.4.1), on appelle poids de la filtration les entiers i tels que $Fil^i M \neq Fil^{i+1} M$. Si $pM = 0$, on rappelle que l'inertie modérée agit sur la semi-simplifiée de la représentation galoisienne associée par des puissances des caractères fondamentaux. Ces poids sont alors les chiffres en base p des exposants des puissances ([FL], 5.3).

PROPOSITION 6.3.1. – Avec les notations précédentes, $\mathcal{M}/p\mathcal{M}$ provient de la catégorie $\underline{MF}_k^{f,p-2}$. Les poids de la filtration sur l'objet correspondant sont les suivants :

$$\begin{aligned}
(0, 2t+1) & \quad \text{si } l \geq t, \\
(t-l, t+1+l) & \quad \text{si } 0 \leq l \leq t, \\
(t, t+1) & \quad \text{si } l \leq 0.
\end{aligned}$$

Preuve. – Modulo p , il est clair que $N|_{M/pM} = 0$ et que, si $\widetilde{\mathcal{M}/p\mathcal{M}}$ désigne l'objet de $\widetilde{\underline{M}}_k^{p-2}$ correspondant à $\mathcal{M}/p\mathcal{M}$ (2.2.2.1), on a $\tilde{\phi}_{p-2} \left(Fil^{p-2}(\widetilde{\mathcal{M}/p\mathcal{M}}) \right) = M/pM$ (utiliser les formules donnant $\phi_{p-2}(X)$ et $\phi_{p-2}(Y)$). En raisonnant comme en (3.3.4), on en déduit que M/pM est muni d'une structure d'objet de $\underline{MF}_k^{f,p-2}$ et que $\widetilde{\mathcal{M}/p\mathcal{M}}$ est isomorphe dans $\widetilde{\underline{M}}_k^{p-2}$ à $k[u]/u^p \otimes_k M/pM$. Notons \bar{X} et \bar{Y} les images de X et Y dans $Fil^{p-2}(\widetilde{\mathcal{M}/p\mathcal{M}})$, un calcul facile donne :

$$\begin{aligned}
\text{si } l \geq t, \quad \bar{X} &= u^{p-2} \cdot (e_1 + \phi(\lambda) \frac{e_2}{p^{l+1}}) \text{ et } \bar{Y} = -\phi(\lambda) u^{p-2-(2t+1)} \cdot p^t \frac{e_2}{p^{l+1}} \text{ si } l > 2t-1, \\
\bar{Y} &= (-\phi(\lambda) + (-1)^l (l+1)^{-1} u^{l+1}) \cdot u^{p-2-(2t+1)} \cdot p^t \frac{e_2}{p^{l+1}} \text{ si } t \leq l \leq 2t-1, \text{ donc} \\
p^t \frac{e_2}{p^{l+1}} &\in Fil^{2t+1}(M/pM) \text{ (et } e_1 + \phi(\lambda) \frac{e_2}{p^{l+1}} \in Fil^0(M/pM)) \\
\text{si } 1 \leq l &\leq t-1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{X} &= \phi(\lambda)^{-1} D_{2l+r}^X u^{p-2-(t-l)} \cdot \left(e_1 + \phi(\lambda) \frac{e_2}{p^{l+1}} \right) \\
&\quad + (-\phi(\lambda) C_{r-1}^X u^{p-2-(t+l+1)} + D_{r+l}^X u^{p-2-t}) \cdot \frac{e_2}{p} \\
\bar{Y} &= (-\phi(\lambda) C_r^Y u^{p-2-(t+l+1)} + D_{r+l+1}^Y u^{p-2-t}) \cdot \frac{e_2}{p}
\end{aligned}$$

et comme $C_r^Y \in W^*$ et $D_{2l+r}^X \in W^*$, on déduit $\frac{e_2}{p} \in \text{Fil}^{l+1}(M/pM)$ et $e_1 + \phi(\lambda)\frac{e_2}{p^{l+1}} \in \text{Fil}^{l-1}(M/pM)$

si $l \leq 0$,

$$\begin{aligned} \bar{X} &= C_{t-1}^X u^{p-2-(t+1)} \left(\left(e_1 + \phi(\lambda)\frac{e_2}{p^{l+1}} \right) - \phi(\lambda)p^{-l} \cdot \frac{e_2}{p} \right) + D_t^X u^{p-2-t} \cdot \frac{e_2}{p} \\ \bar{Y} &= C_t^Y u^{p-2-(t+1)} \left(\left(e_1 + \phi(\lambda)\frac{e_2}{p^{l+1}} \right) - \phi(\lambda)p^{-l} \cdot \frac{e_2}{p} \right) \end{aligned}$$

et comme $C_t^Y \in W^*$ et $D_t^X \in W^*$, on déduit $e_1 + \phi(\lambda)\frac{e_2}{p^{l+1}} - \phi(\lambda)p^{-l} \cdot \frac{e_2}{p} \in \text{Fil}^{l+1}(M/pM)$ et $\frac{e_2}{p} \in \text{Fil}^l(M/pM)$. \square

Par ([FL], 5.3), ceci achève la preuve de (6.1.1.2).

Remarque 1. – On montre facilement que, dans le cas d’une représentation semi-stable à poids de Hodge-Tate entre 0 et $p - 2$ et provenant d’un K_0 -module filtré naïf (5.2), les chiffres des exposants de l’inertie modérée sur la semi-simplifiée modulo p sont encore les poids de la filtration sur le module filtré (comme dans le cas cristallin).

Remarque 2. – L’image essentielle de la catégorie $\underline{\mathcal{M}}^{p-2}$ dans $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G)$ est une catégorie abélienne de représentations galoisiennes de longueur finie, stable par somme directe, sous-objet et quotient dans $\text{Rep}_{\mathbb{Z}_p}(G)$ (les deux derniers faits se déduisent du résultat analogue pour la catégorie image essentielle de $\underline{MF}_{\text{tor}}^{f,p-2}$, et du fait que ces deux catégories ont les mêmes objets simples (2.4.2.2)). Cette catégorie peut donc se prêter à l’étude des déformations de représentations p -adiques semi-stables (voir [Ma1]), au moins dans le cas de dimension 2, avec la restriction habituelle sur les poids de Hodge-Tate.

A. Modules fortement divisibles et modules faiblement admissibles

Les résultats de cet appendice m’ont été indiqués par le referee.

Soit \mathcal{M} un module fortement divisible (4.1.1.1) et D le (ϕ, N) -module filtré de $MF_{K_0}(\phi, N)$ qu’on lui associe en (4.1.1). On montre ici que D est faiblement admissible. Dans le cas d’un réseau fortement divisible "classique" ([FL], 7.7), le résultat est dû à Laffaille ([La], 3.4). Commençons par un lemme :

LEMME A.1. – Soient $m \in \mathbb{N}^*$, \mathcal{M} un $W[u]/(u - p)^m$ -module libre de type fini, $\mathcal{D} = K_0 \otimes_W \mathcal{M}$ et $M = \mathcal{M}/u\mathcal{M}$. Soient $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ un sous- $K_0[u]/(u - p)^m$ -module, $M' = \mathcal{D}' \cap \mathcal{M}$ et M' l’image de \mathcal{M}' dans M . Alors $\text{lg}_W(M/M') = \dim_{K_0}(\mathcal{D}/\mathcal{D}')$.

Preuve. – On définit une filtration positive décroissante sur \mathcal{D} par :

$$\begin{aligned} \text{Fil}^i \mathcal{D} &= \mathcal{D}' + (u - p)^i \mathcal{D} \text{ si } 0 \leq i \leq m \\ \text{Fil}^i \mathcal{D} &= (u - p)^{i-m} \mathcal{D}' \text{ si } m \leq i \leq 2m \\ \text{Fil}^i \mathcal{D} &= 0 \text{ si } 2m \leq i \end{aligned}$$

et on pose $\text{Fil}^i \mathcal{M} = \text{Fil}^i \mathcal{D} \cap \mathcal{M}$ et $\text{Fil}^i M = \text{Im}(\text{Fil}^i \mathcal{M} \rightarrow M)$. En particulier, $\text{Fil}^m \mathcal{M} = \mathcal{M}'$ et $\text{Fil}^m M = M'$. Les $\text{gr}_{\text{Fil}}^i \mathcal{M}$ sont des W -modules libres de rang fini. Comme $(u - p)\text{Fil}^i \mathcal{M} \subset \text{Fil}^{i+1} \mathcal{M}$, on a $p\text{Fil}^i M \subset \text{Fil}^{i+1} M$ et les

$gr_{Fil}^i M$ sont des k -espaces vectoriels de dimension finie. Pour tout $i \in \mathbf{N}$, on a $\dim_k(gr_{Fil}^i M) = \text{rg}_W(gr_{Fil}^i \mathcal{M})$. En effet, la surjection canonique $gr_{Fil}^i \mathcal{M} \rightarrow gr_{Fil}^i M$ entraîne déjà $\dim_k(gr_{Fil}^i M) \leq \text{rg}_W(gr_{Fil}^i \mathcal{M})$, et d'autre part :

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 0} \dim_k(gr_{Fil}^i M) &= \text{lg}_W M = \text{rg}_W \mathcal{M} = \dim_{K_0} \mathcal{D} = \sum_{i \geq 0} \dim_{K_0}(gr_{Fil}^i \mathcal{D}) = \\ &= \sum_{i \geq 0} \text{rg}_W(gr_{Fil}^i \mathcal{M}) \text{ d'où l'égalité. Mais alors } \dim_{K_0}(\mathcal{D}/\mathcal{D}') = \sum_{i=0}^{m-1} \dim_{K_0}(gr_{Fil}^i \mathcal{D}) = \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \text{rg}_W(gr_{Fil}^i \mathcal{M}) = \sum_{i=0}^{m-1} \dim_k(gr_{Fil}^i M) = \text{lg}_W(M/M') \text{ puisque } Fil^m M = M'. \quad \square \end{aligned}$$

COROLLAIRE A.2. – Soient \mathcal{M} un S -module libre de type fini, $\mathcal{D} = S_{K_0} \otimes_S \mathcal{M}$ et $M = W \otimes_{S, f_0} \mathcal{M}$ où $f_0 : S \rightarrow W$, $\gamma_i(u) \mapsto 0$ ($i \geq 1$). Soient $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ un sous- S_{K_0} -module tel que $Fil^p S_{K_0} \cdot \mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$, $M' = \mathcal{D}' \cap M$ et M' l'image de M' dans M . Alors M/M' est un W -module de longueur finie et on a $\text{lg}_W(M/M') = \dim_{K_0}(\mathcal{D}/\mathcal{D}')$.

Preuve. – Soient $\bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D}/Fil^p S_{K_0} \cdot \mathcal{D}$, $\bar{\mathcal{M}} = \mathcal{M}/Fil^p S \cdot \mathcal{M}$, $\bar{M} = M/p^p \cdot M$ et $\bar{\mathcal{D}}'$, \bar{M}' , \bar{M}' les images respectives de \mathcal{D}' , M' , M' . De $Fil^p S_{K_0} \cdot \mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$, on tire $\mathcal{D}/\mathcal{D}' \xrightarrow{\sim} \bar{\mathcal{D}}/\bar{\mathcal{D}}'$. On a aussi $(u-p)^p \cdot \mathcal{M} \subset Fil^p S \cdot \mathcal{M} \subset M'$ d'où $p^p M \subset M'$ et $\mathcal{M}/M' \xrightarrow{\sim} \bar{\mathcal{M}}/\bar{M}'$, $M/M' \xrightarrow{\sim} \bar{M}/\bar{M}'$. D'autre part, \bar{M}' est l'image de \bar{M}' dans \bar{M} et $\bar{M}' = \bar{\mathcal{D}}' \cap \bar{M}$ car $Fil^p S_{K_0} \cdot \mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$. Le résultat découle alors de (A.1) appliqué à \bar{M} , $\bar{\mathcal{D}}$ et $\bar{\mathcal{D}}'$ avec $m = p$. \square

PROPOSITION A.3. – Soit D un objet de dimension finie de $MF_{K_0}(\phi, N)$ (4.1.1) tel que $Fil^0 D = D$ et $Fil^{p-1} D = 0$, \mathcal{D} l'objet associé de $\mathcal{MF}_{S_{K_0}}(\Phi, \mathcal{N})$ ([Br2], 6) et $\mathcal{M} \subset \mathcal{D}$ un sous- S -module tel qu'il existe une base (e_1, \dots, e_n) de \mathcal{D} sur S_{K_0} et des entiers $c \geq d$ vérifiant $p^c \cdot \bigoplus_{1 \leq i \leq n} S \cdot e_i \subset \mathcal{M} \subset p^d \cdot \bigoplus_{1 \leq i \leq n} S \cdot e_i$. On pose $Fil^{p-2} \mathcal{M} = Fil^{p-2} \mathcal{D} \cap \mathcal{M}$ et on suppose $\phi(Fil^{p-2} \mathcal{M}) \subset p^{p-2} \mathcal{M}$, alors :

(i) $t_H(D) \leq t_N(D)$ (c.f. 4.3)

(ii) supposons de plus \mathcal{M} libre de type fini sur S , alors $t_H(D) = t_N(D)$ si et seulement si $\phi(Fil^{p-2} \mathcal{M})$ engendre $p^{p-2} \mathcal{M}$ sur S .

Preuve. – (i) Si $x \in \mathcal{M}$, on a $\phi((u-p)^{p-2} x) = c^{p-2} p^{p-2} \phi(x) \in p^{p-2} \mathcal{M}$ d'où $\phi(x) \in M$ puisque $c \in S^*$ i.e. $\phi(\mathcal{M}) \subset M$. Soit M l'image de \mathcal{M} dans $D \simeq K_0 \otimes_{S_{K_0}, f_0} \mathcal{D}$ ($f_0 : S_{K_0} \rightarrow K_0, \gamma_i(u) \mapsto 0, i \geq 1$) : M est un réseau de D tel que $\phi(M) \subset M$ d'où $t_N(D) = \text{lg}_W(M/\phi(M))$ ([La], 1.5). Soit $Fil^{p-2} M$ l'image de $Fil^{p-2} \mathcal{M}$ dans M , on a $\phi(Fil^{p-2} M) \subset p^{p-2} M$ d'où, en posant $n = \dim_{K_0} D$:

$$\begin{aligned} \text{lg}_W(M/Fil^{p-2} M) &= \text{lg}_W(\phi(M)/\phi(Fil^{p-2} M)) \\ &= \text{lg}_W(M/\phi(Fil^{p-2} M)) - \text{lg}_W(M/\phi(M)) \\ &\geq \text{lg}_W(M/p^{p-2} M) - \text{lg}_W(M/\phi(M)) \\ &= (p-2)n - t_N(D) \end{aligned}$$

Pour $0 \leq i \leq p-2$, soit $Fil^i \mathcal{M} = Fil^i \mathcal{D} \cap \mathcal{M}$, comme $Fil^i S_{K_0} \cdot \mathcal{D} \subset Fil^i \mathcal{D}$, $gr_{Fil}^i \mathcal{D}$ est un K_0 -espace vectoriel de dimension finie et comme $S_{K_0} \otimes_S Fil^i \mathcal{M} = Fil^i \mathcal{D}$, $gr_{Fil}^i \mathcal{M}$ est un W -réseau de $gr_{Fil}^i \mathcal{D}$. Soit $Fil^i M$ l'image de $Fil^i \mathcal{M}$ dans M , comme $(u-p) Fil^i \mathcal{M} \subset Fil^{i+1} \mathcal{M}$, $gr_{Fil}^i M$ est un k -espace vectoriel et la surjection W -linéaire $gr_{Fil}^i \mathcal{M} \rightarrow gr_{Fil}^i M$ entraîne $\dim_k(gr_{Fil}^i M) \leq \text{rg}_W(gr_{Fil}^i \mathcal{M}) = \dim_{K_0}(gr_{Fil}^i \mathcal{D})$ d'où $\text{lg}_W(M/Fil^{p-2} M) \leq \dim_{K_0}(\mathcal{D}/Fil^{p-2} \mathcal{D})$. Mais si $(\hat{e}_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de \mathcal{D} adaptée à la filtration (voir l'appendice de [Br2]) et si r_i est le plus grand entier dans $\{0, \dots, p-2\}$ tel que $\hat{e}_i \in Fil^{r_i} \mathcal{D}$, un calcul simple donne $\dim_{K_0}(\mathcal{D}/Fil^{p-2} \mathcal{D}) = \sum_{i=1}^n (p-2-r_i) =$

$(p-2)n - \sum_{i=1}^n r_i = (p-2)n - t_H(D)$ d'où $\text{lg}_W(M/\text{Fil}^{p-2}M) \leq (p-2)n - t_H(D)$ qui donne (i) par la précédente inégalité.

(ii) Le corollaire (A.2) appliqué avec $\mathcal{D}' = \text{Fil}^{p-2}\mathcal{D}$ donne dans ce cas $\text{lg}_W(M/\text{Fil}^{p-2}M) = \dim_{K_0}(\mathcal{D}/\text{Fil}^{p-2}\mathcal{D}) = (p-2)n - t_H(D)$ et il est clair que la première inégalité est une égalité si et seulement si $\phi(\text{Fil}^{p-2}M) = p^{p-2}M$ ou encore si et seulement si $\phi(\text{Fil}^{p-2}\mathcal{M})$ engendre $p^{p-2}\mathcal{M}$ sur S . \square

THÉORÈME A.4. – Soit \mathcal{M} un module fortement divisible, \mathcal{D} l'objet de $\mathcal{MF}_{S_{K_0}}(\Phi, \mathcal{N})$ associé à \mathcal{M} (4.1.1) et D l'objet de $MF_{K_0}(\phi, N)$ associé à \mathcal{D} ([Br2], 6). Alors D est faiblement admissible.

Preuve. – Par (A.3, (ii)), on a $t_H(D) = t_N(D)$. Soit $D' \subset D$ un sous- K_0 -espace vectoriel de D stable par ϕ et N . On pose $\text{Fil}^r D' = \text{Fil}^r D \cap D'$ ($r \in \mathbf{Z}$) : $(D', \text{Fil}^r D', \phi, N)$ est un objet de $MF_{K_0}(\phi, N)$ de dimension finie et il suffit de montrer $t_H(D') \leq t_N(D')$. Soit \mathcal{D}' l'objet de $\mathcal{MF}_{S_{K_0}}(\Phi, \mathcal{N})$ correspondant à D' ([Br2], 6) : c'est un facteur direct de \mathcal{D} stable par ϕ et N tel que $\text{Fil}^r \mathcal{D}' = \text{Fil}^r \mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$. Soit $\mathcal{M}' = \mathcal{D}' \cap \mathcal{M}$ et $\text{Fil}^{p-2} \mathcal{M}' = \text{Fil}^{p-2} \mathcal{D}' \cap \mathcal{M}'$, on a donc $\phi(\text{Fil}^{p-2} \mathcal{M}') \subset p^{p-2} \mathcal{M}'$: par (A.3, (i)) appliqué à D' et \mathcal{M}' , on a $t_H(D') \leq t_N(D')$ d'où le résultat. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [Be] P. BERTHELOT, *Slopes of Frobenius in crystalline cohomology*, in Algebraic Geometry (Arcata 1974), Proc. of Symposia in Pure Maths. 29 (Americ. Math. Soc., 1975, p. 315-328).
- [Br1] C. BREUIL, *Topologie log-syntomique, cohomologie log-cristalline et cohomologie de Čech* (Bull. Soc. math. France, vol. 124, 1996, p. 587-647).
- [Br2] C. BREUIL, *Représentations p-adiques semi-stables et transversalité de Griffiths* (Math. Annalen, vol. 307, 1997, p. 191-224).
- [Br3] C. BREUIL, *Cohomologie étale de p-torsion et cohomologie cristalline en réduction semi-stable*, preprint, Université Paris-Sud, 1997.
- [Fa1] G. FALTINGS, *Crystalline cohomology and p-adic Galois representations*, Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory, John Hopkins Univ. Press, 1989, p. 25-79.
- [Fa2] G. FALTINGS, *Crystalline cohomology of semi-stable curves, and p-adic Galois representations* (Journal of Algebraic Geometry, vol. 1, 1992, p. 61-82).
- [Fo1] J.-M. FONTAINE, *Le corps des périodes p-adiques* (Astérisque, vol. 223, Soc. Math. de France, 1994, p. 59-111).
- [Fo2] J.-M. FONTAINE, *Représentations p-adiques semi-stables* (Astérisque, vol. 223, Soc. Math. de France, 1994, p. 113-184).
- [Fo3] J.-M. FONTAINE, *Cohomologie de de Rham, cohomologie cristalline et représentations p-adiques* (Lecture Notes in Maths, vol. 1016, 1983, p. 86-108, p. 113-184).
- [Fo4] J.-M. FONTAINE, *Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local; construction d'un anneau de Barsotti-Tate* (Ann. of Maths, vol. 115, 1982, p. 379-409).
- [Fo5] J.-M. FONTAINE, *Groupes p-divisibles sur les corps locaux* (Astérisque, vol. 47-48, Soc. Math. de France, 1977).
- [FL] J.-M. FONTAINE et G. LAFFAILLE, *Construction de représentations p-adiques* (Ann. Scient. E.N.S., vol. 15, 1982, p. 547-608).
- [FM] J.-M. FONTAINE et B. MAZUR, *Geometric Galois representations*, in Conference on Elliptic curves and modular forms (Hong-Kong 1993), 1995, p. 41-78.
- [II] L. ILLUSIE, *Cohomologie de de Rham et cohomologie étale p-adique [d'après G. Faltings, J.M. Fontaine et al.]* (Séminaire Bourbaki, vol. 726, juin 1990).

- [Ka] K. KATO, *Semi-stable reduction and p -adic étale cohomology* (*Astérisque*, vol. 223, Soc. Math. de France, 1994, p. 269-293).
- [La] G. LAFFAILLE, *Groupes p -divisibles et modules filtrés : le cas peu ramifié* (*Bull. Soc. math. France*, vol. 108, 1980, p. 187-206).
- [Ma1] B. MAZUR, *Deforming Galois representations*, in *Galois Groups over \mathbf{Q}* , Springer 1989, p. 385-438.
- [Ma2] B. MAZUR, *On monodromy invariants occurring in global arithmetic, and Fontaine's theory* (*Contemporary Mathematics*, vol. 165, 1994, p. 1-20).
- [MTT] B. MAZUR, J. TATE et J. TEITELBAUM, *On p -adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer* (*Inv. Math.*, vol. 84, 1986, p. 1-48).
- [Pe] B. PERRIN-RIOU, *Représentations p -adiques ordinaires* (*Astérisque*, vol. 223, Soc. Math. de France, 1994, p. 185-220).
- [Sa] T. SAITO, *Modular forms and p -adic Hodge theory* (*Inv. Math.*, vol. 129, 1997, p. 607-620).
- [Se] J.-P. SERRE, *Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques* (*Inv. Math.*, vol. 15, 1972, p. 259-331).
- [Ts] T. TSUJI, *P -adic-étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case*, preprint, Kyoto, 1996.
- [Wa] N. WACH, *Représentations cristallines de torsion* (*Comp. Math.*, vol. 108, 1997, p. 185-240).

(Manuscrit reçu le 13 février 1996;
accepté le 12 décembre 1997.)

C. BREUIL

Mathématiques, Bât. 425,
U.R.A. 752 du C.N.R.S.,
Université Paris-Sud,
91405 Orsay cedex, France.
E-mail: breuil@math.u-psud.fr