

## CORRECTEURS PROPORTIONNELS-INTÉGRAUX GÉNÉRALISÉS \*

MICHEL FLIESS<sup>1</sup>, RICHARD MARQUEZ<sup>2</sup>, EMMANUEL DELALEAU<sup>2</sup> ET  
HEBERTT SIRA-RAMÍREZ<sup>3</sup>

**Abstract.** For constant linear systems we are introducing *integral reconstructors* and *generalized proportional-integral controllers*, which permit to bypass the derivative term in the classic PID controllers and more generally the usual asymptotic observers. Our approach, which is mainly of algebraic flavour, is based on the module-theoretic framework for linear systems and on operational calculus in Mikusiński's setting. Several examples are discussed.

**Résumé.** Nous introduisons pour les systèmes linéaires constants les *reconstructeurs intégraux* et les *correcteurs proportionnels-intégraux généralisés*, qui permettent d'éviter le terme dérivé du PID classique et, plus généralement, les observateurs asymptotiques usuels. Notre approche, de nature essentiellement algébrique, fait appel à la théorie des modules et au calcul opérationnel de Mikusiński. Plusieurs exemples sont examinés.

**Mathematics Subject Classification.** 13A99, 44A40, 93B25, 93B52.

Reçu le 5 décembre 2000. Révisé en mai 2001.

### 1. INTRODUCTION

Commençons par le système linéaire du second ordre

$$(s^2 + a_1s + a_0)y = bu + \frac{\gamma e^{-\mu s}}{s} \quad (1)$$

---

*Keywords and phrases:* PID controllers, generalized proportional-integral controllers, integral reconstructors, modules, operational calculus, localization.

\* Travail appuyé par la Commission Européenne TMR, contrat ERBFMRXT-CT970137. R. Marquez, dont l'adresse permanente est le *Departamento de Sistemas de Control, Facultad de Ingeniería, Universidad de Los Andes*, Mérida 5101, Vénézuéla, a bénéficié du soutien du *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Tecnológicas (CONICIT)* du Vénézuéla. Grâce à l'aide du CNRS, E. Delaleau a effectué sa recherche au Laboratoire d'Électricité, Signaux et Robotique de l'École Normale Supérieure de Cachan.

<sup>1</sup> Centre de Mathématiques et leurs Applications, École Normale Supérieure de Cachan, 61 avenue du Président Wilson, 94235 Cachan, France ; e-mail: [fliess@cmla.ens-cachan.fr](mailto:fliess@cmla.ens-cachan.fr)

<sup>2</sup> Laboratoire des Signaux et Systèmes, CNRS-Supélec-Université Paris-Sud, Plateau du Moulon, 3 rue Joliot-Curie, 91192 Gif-sur-Yvette, France ; e-mail: [{marquez,delaleau}@lss.supelec.fr](mailto:{marquez,delaleau}@lss.supelec.fr)

<sup>3</sup> Departamento Ingeniería Eléctrica, CINVESTAV-IPN, Av. IPN 2508, Col. San Pedro Zacatenco, A.P. 14740, México DF, Mexique ; e-mail: [hsira@mail.cinvestav.mx](mailto:hsira@mail.cinvestav.mx)

$a_0, a_1, b, \gamma \in \mathbb{R}$ ,  $\mu \geq 0$ , où, selon les notations du calcul opérationnel,  $s = \frac{d}{dt}$ . Le *correcteur proportionnel-intégral-dérivé*, *PID* en abrégé, très populaire dans l'industrie, est défini par

$$u^e = \left( K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s \right) y^e \quad (2)$$

$K_P, K_I, K_D \in \mathbb{R}$ , où,  $y^*$  désignant la consigne et  $u^*$  la commande associée, on pose  $y^e = y - y^*$ ,  $u^e = u - u^*$ . Comme la détermination effective de  $sy^e$ , équivalente à celle de la dérivée de  $y$ , peut être délicate, on se restreint souvent (cf. [2, 16, 35]) à un *correcteur proportionnel-intégral*, *PI* en abrégé, où, en (2),  $K_D = 0$ , fut-ce au prix d'un comportement moins bon, notamment en transitoire. Pour y remédier, posons

$$\underline{sy} = b \frac{u}{s} - \left( \frac{a_0}{s} + a_1 \right) y. \quad (3)$$

C'est la valeur de  $sy$  obtenue à partir du système nominal, où, ignorant la perturbation additive  $\frac{\gamma e^{-\mu s}}{s}$ , on remplace (1) par

$$(s^2 + a_1 s + a_0) y = bu.$$

La substitution en (2), de  $sy^e$  par  $\underline{sy}^e = \underline{sy} - sy^*$  introduit une erreur de type *rampe*, c'est-à-dire proportionnelle à  $\frac{e^{-\mu s}}{s^2}$ , que l'on contrecarre en rajoutant un terme proportionnel à  $\frac{y^e}{s^2}$ . On obtient, alors, le nouveau correcteur

$$u^e = \left( K_P + \frac{K_I}{s} + \frac{K_{II}}{s^2} \right) y^e + K_D \underline{sy}^e \quad (4)$$

$K_{II} \in \mathbb{R}$ , dit *proportionnel-intégral généralisé*, *GPI* en abrégé, dont des simulations numériques en section 6.1 montreront l'efficacité.

De façon plus générale, récrivons le système linéaire constant

$$s\mathbf{x} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \quad (5)$$

$$\mathbf{y} = C\mathbf{x} \quad (6)$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ , sous la forme

$$\mathbf{x} = A \frac{\mathbf{x}}{s} + B \frac{\mathbf{u}}{s}.$$

Il vient, par récurrence, pour tout  $\mu \geq 1$ ,

$$\mathbf{x} = A^\mu s^{-\mu} \mathbf{x} + \sum_{i=1}^{\mu} A^{i-1} B s^{-i} \mathbf{u}. \quad (7)$$

Supposons (5, 6) observable. D'après la propriété de *reconstructibilité*, équivalente à l'observabilité (cf. [18]), toute composante de l'état  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  s'exprime comme combinaison linéaire finie des variables de commande  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$ , de sortie  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_p)$ , et de leurs dérivées. Donc, pour  $\mu$  assez grand, on obtient, grâce à (7),

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P(s^{-1}) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} + Q(s^{-1}) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \quad (8)$$

où  $P$  et  $Q$  sont des matrices  $n \times p$  et  $n \times m$ , dont les coefficients sont des polynômes réels en la variable  $s^{-1}$ .

Venons-en au sens de  $s^{-1}$ . Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction localement Lebesgue-intégrable, à support limité à gauche. À  $\frac{f}{s}$  correspond, en accord avec le calcul opérationnel basé sur la transformation de Laplace bilatérale (cf. [27]), l'intégrale  $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$ .

D'après (8), les composantes de l'état sont données par une combinaison linéaire (finie) d'intégrales itérées des composantes de la commande et de la sortie, pour peu qu'on fasse la convention suivante<sup>4</sup> :

*tout système linéaire constant est au repos pour  $t \leq t_0$ ,  $t_0 \in ]-\infty, +\infty[$ .*

On appelle (8) un *reconstructeur intégral*, ou un *observateur intégral*. Ce sera, ici, le substitut des observateurs asymptotiques usuels.

Supposons (5) commandable. Remplaçons dans le retour statique d'état

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = -\mathcal{K} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (9)$$

$\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{x}$  par son expression (8). On obtient ainsi un correcteur proportionnel-intégral généralisé, ou *GPI*, dont on assure la robustesse, à la manière des PID classiques, en rajoutant une combinaison linéaire finie d'intégrales itérées des composantes de la sortie et, si nécessaire, de l'entrée. En particulier, il y a robustesse si la borne inférieure d'intégration n'est pas  $-\infty$ , mais, en raison d'une méconnaissance du passé, une valeur finie  $t_1$ . Cette remarque vaut pour le calcul opérationnel basé sur la transformation de Laplace monolatère où  $t_1 = 0$  ; (5) est, alors, remplacé par

$$s\mathbf{x} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} + \mathbf{x}(0) \quad (10)$$

où  $\mathbf{x}(0)$  n'est pas, nécessairement, connu. Alors, (8) n'est plus un reconstructeur exact car  $\mathbf{x}(0)$  doit être considéré comme une perturbation inconnue.

La théorie élémentaire des modules de type fini sur l'anneau principal  $\mathbb{R}[s]$  des polynômes réels en une indéterminée constitue notre premier outil mathématique (cf. [5, 7]). Pour tenir compte de  $s^{-1}$ , il nous faut la notion algébrique classique de *localisation* (cf. [17]), déjà abondamment employée avec les systèmes à retards [15]. Le second outil, plus nouveau, est le calcul opérationnel, dans sa version due à Mikusiński [23, 24] (voir, aussi [4, 37]). Tout en permettant de contourner les difficultés analytiques qu'aurait entraîné la connexion entre transformation de Laplace et modules, il jouit des propriétés nécessaires de la transformation de Laplace bilatérale. Le calcul opérationnel nous conduit à la seconde convention :

*le  $\mathbb{R}[s]$ -module de type fini correspondant à un système est libre<sup>5</sup>.*

Soit, en effet, un élément de torsion  $\tau$ , satisfaisant  $\psi\tau = 0$ ,  $\psi \in \mathbb{R}[s]$ ,  $\psi \neq 0$ . L'unique solution d'une telle équation opérationnelle est 0, et  $\tau$  serait sans objet. Il en découle que toute variable du système, si elle ne dépend pas d'une commande, est, au moins, influencée par une perturbation. Aussi, contrairement à des publications antérieures (cf. [11]), présenterons-nous directement un système sous forme perturbée. L'étude de la stabilité devient, dans une telle perspective, celle de la robustesse vis-à-vis de perturbations particulières.

Les buts visés sont, à l'évidence, fort proches de ceux des méthodes dites polynômiales, ou diophantiennes, en commande linéaire (voir, par exemple [25, 26]). Une justification de ces dernières, parfois délicates à mettre en œuvre, réside dans les défauts inhérents au couple constitué par les bouclages d'état et les observateurs asymptotiques d'état<sup>6</sup>. Ce travail, où les observateurs sont éliminés au profit des reconstructeurs intégraux<sup>7</sup>,

<sup>4</sup>O. Heaviside, le principal fondateur du calcul opérationnel, a posé une convention identique (voir [27]).

<sup>5</sup>Pour des systèmes plus généraux, comme ceux à retards, où l'anneau de base n'est plus principal (cf. [15]), la liberté doit être remplacée par le caractère sans torsion.

<sup>6</sup>Voir, par exemple [1] pour une excellente discussion.

<sup>7</sup>La littérature est parsemée de calculs plus ou moins proches de nos reconstructeurs intégraux, surtout avant l'apparition des observateurs asymptotiques (cf. [36], p. 285).

doit être compris comme un enrichissement de l'approche d'état de façon à palier à ces manques<sup>8</sup>. Notre vision, moins rigide, repose sur les ingrédients suivants :

- des changements d'état dépendant de la perturbation, comme en [11], généralisant ceux dépendant de la commande [5] ;
- des bouclages d'état *intégraux, robustifiants*, déjà présents en pratique (*cf.* [16, 33]), mais qui ne semblent pas avoir pénétré la théorie.

Voici le plan de l'article. Nous commençons par les fondements mathématiques, c'est-à-dire les modules et le calcul opérationnel. L'exposé des systèmes linéaires y subit des modifications notables par rapport à ceux de [3, 5, 7, 9, 11]. Nous passons aux bouclages d'état intégraux et à leur propriété de robustesse par rapport à certaines perturbations. On définit ensuite les reconSTRUCTEURS et les correcteurs PI généralisés, qui conduisent au résultat essentiel, le théorème 5.2 sur la stabilisation robuste. Le dernier paragraphe est consacré aux exemples<sup>9</sup>, tels le correcteur PID classique, à la manière du début de cette introduction, un correcteur PI généralisé pour un système du second ordre à dynamique des zéros non triviale. Le troisième exemple, un modèle simplifié d'avion à décollage vertical, compare brièvement notre GPI généralisé avec le couple observateur asymptotique – bouclage d'état en présence d'une perturbation paramétrique pour laquelle aucun cadre théorique n'est ici présentée. Une telle expérimentation numérique, à l'avantage du GPI, n'est pas, quoique courante dans la littérature appliquée, sans danger car dénuée de toute démonstration mathématique.

Des versions préliminaires ont été publiées en [12, 29] (voir, aussi [8]). Des publications ultérieures détailleront la mise en œuvre pratique de nos régulateurs (*cf.* [20]) et leur connexion avec les méthodes polynomiales. Le passage à une localisation plus générale, c'est-à-dire par rapport au demi-groupe multiplicatif engendré par un ensemble fini de polynômes de  $\mathbb{R}[s]$ , permettra d'atténuer des perturbations plus riches et de résoudre ainsi d'autres problèmes de robustesse (*cf.* [28]). Terminons par des prolongements en cours :

- il est possible [13, 14] d'étendre notre démarche à une classe de systèmes linéaires à retards, dits *quasi-finis*, fréquente en pratique. On résout ainsi un problème majeur d'automatique industrielle (*cf.* [2, 35]) ;
- plusieurs exemples non linéaires ont déjà été traités avec succès [30–32]. On peut en attendre une alternative aux nombreuses recherches sur les observateurs asymptotiques non linéaires.

## 2. PROLÉGOMÈNES MATHÉMATIQUES

### 2.1. Calcul opérationnel de Mikusiński

Les fonctions continues  $[0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{C}$  forment un anneau commutatif  $\mathcal{C}$  par rapport à l'addition +

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t)$$

et au produit de convolution  $\star$

$$(f \star g)(t) = (g \star f)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)f(t - \tau)d\tau.$$

D'après un résultat fameux, dû à Titchmarsh (*cf.* [23, 24, 37]),  $\mathcal{C}$  ne possède pas de diviseurs de zéro. Appelons *corps de Mikusiński* le corps de fractions  $\mathcal{M}$  de  $\mathcal{C}$ . Tout élément de  $\mathcal{M}$  est appelé *opérateur*. Toute fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , appartenant à  $\mathcal{M}$ , est notée  $\{f\}$  en tant qu'opérateur.

**Exemple 2.1.** L'élément neutre 1 de  $\mathcal{M}$  par rapport au produit de convolution est l'analogie de la mesure de Dirac dans la théorie des distributions de Schwartz. Toute fonction  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , localement Lebesgue-intégrable et à support limité à gauche, appartient à  $\mathcal{M}$ .

<sup>8</sup>La littérature est riche de telles tentatives (voir, par exemple [19] pour une excellente synthèse).

<sup>9</sup>On trouvera en [21] une application à un moteur électrique réel.

**Exemple 2.2.** La fonction  $\{1\}$  de  $\mathcal{C}$ , prolongée à  $\mathbb{R}$ , devient la fonction de Heaviside<sup>10</sup>

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Son inverse dans  $\mathcal{M}$  est l'opérateur de dérivation  $s$ . Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une  $C^1$ -fonction, à support limité à gauche. Alors,  $s\{f\} = \{\dot{f}\}$ . Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction localement Lebesgue-intégrable, à support limité à gauche. Alors,  $\frac{\{g\}}{s} = \{\int_{-\infty}^t g(\sigma)d\sigma\}$  est, aussi, à support limité à gauche. Renvoyons à [23, 24, 37] pour le sous-corps  $\mathbb{C}(s)$  de  $\mathcal{M}$  des fonctions rationnelles en l'indéterminée  $s$ , à coefficients complexes, au sens identique à celui usuel en calcul opérationnel.

**Exemple 2.3.** L'exponentielle  $e^{-hs}$ ,  $h \geq 0$ , désigne l'opérateur de retard d'amplitude  $h$ . Son inverse  $e^{hs}$  est l'avance d'amplitude  $h$ .

Renvoyons à [24] pour la notion d'opérateurs *réguliers* et leurs *supports*. Notons  $\mathcal{M}_{\text{reg}}^{\text{sen}} \subset \mathcal{M}$  l'ensemble des opérateurs réguliers à supports limités à gauche ;  $\mathcal{M}_{\text{reg}}^{\text{sen}}$  est un anneau par rapport à l'addition et à la convolution.

## 2.2. Systèmes linéaires

### 2.2.1. Généralités

Un *système linéaire*  $\Lambda$  est un  $\mathbb{R}[s]$ -module de type fini, où l'on a distingué une perturbation, c'est-à-dire une partie finie  $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_q)$ ,  $\pi_1, \dots, \pi_q \in \Lambda$ . La suite exacte

$$0 \rightarrow \text{span}_{\mathbb{R}[s]}(\boldsymbol{\pi}) \rightarrow \Lambda \rightarrow \Lambda^{\text{nom}} \rightarrow 0 \quad (11)$$

définit le système *nominal*  $\Lambda^{\text{nom}} = \Lambda / \text{span}_{\mathbb{R}[s]}(\boldsymbol{\pi})$ . L'image canonique de tout  $\lambda \in \Lambda$  dans  $\Lambda^{\text{nom}}$  est notée  $\lambda^{\text{nom}}$ . Le système  $\Lambda$  est dit *non perturbé* si, et seulement si,  $\text{span}_{\mathbb{R}[s]}(\boldsymbol{\pi}) = \{0\}$ , c'est-à-dire si, et seulement si, il est isomorphe au système nominal  $\Lambda^{\text{nom}}$ . Une *dynamique linéaire* est un système  $\Lambda$  muni d'une commande, c'est-à-dire une partie finie  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$ ,  $u_1, \dots, u_m \in \Lambda$ , telle que le module quotient  $\Lambda^{\text{nom}} / \text{span}_{\mathbb{R}[s]}(\mathbf{u}^{\text{nom}})$  soit de torsion. La commande  $\mathbf{u}$  est dite *indépendante* si, et seulement si,  $\text{span}_{\mathbb{R}[s]}(\mathbf{u})$  est un module libre de rang  $m$  : cette propriété sera supposée vérifiée dorénavant. S'il n'y a pas de commande, c'est-à-dire si  $\mathbf{u} = \emptyset$ ,  $\Lambda^{\text{nom}}$  est de torsion. On suppose que commande et perturbation n'interagissent pas, c'est-à-dire que

$$\text{span}_{\mathbb{R}[s]}(\mathbf{u}) \cap \text{span}_{\mathbb{R}[s]}(\boldsymbol{\pi}) = \{0\}. \quad (12)$$

D'après (12), la restriction du morphisme  $\Lambda \rightarrow \Lambda^{\text{nom}}$  à  $\text{span}_{\mathbb{R}[s]}(\mathbf{u})$  définit un isomorphisme  $\text{span}_{\mathbb{R}[s]}(\mathbf{u}) \rightarrow \text{span}_{\mathbb{R}[s]}(\mathbf{u}^{\text{nom}})$ . Un *système entrée-sortie* est une dynamique  $\Lambda$ , munie d'une *sortie*, c'est-à-dire une partie finie  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_p)$ ,  $y_1, \dots, y_p \in \Lambda$ .

### 2.2.2. Matrices de transfert

Soit  $\mathbb{R}(s)$  le corps de fractions de  $\mathbb{R}[s]$ . Le foncteur de localisation [17]  $\mathbb{R}(s) \otimes_{\mathbb{R}[s]} \bullet$  entre  $\mathbb{R}[s]$ -modules de type fini et  $\mathbb{R}(s)$ -espaces vectoriels de dimension fini est appelé *foncteur de Laplace* [7]. Le  $\mathbb{R}(s)$ -espace vectoriel

$$\hat{\Lambda} = \mathbb{R}(s) \otimes_{\mathbb{R}[s]} \Lambda$$

est appelé *espace de transfert* du système  $\Lambda$ . Le morphisme de  $\mathbb{R}[s]$ -modules  $\ell : \Lambda \rightarrow \hat{\Lambda}$ ,  $\lambda \mapsto 1 \otimes \lambda = \hat{\lambda}$  est appelé *transformation de Laplace (formelle)* ;  $\hat{\lambda}$  est la *transformée de Laplace (formelle)* de  $\lambda$ . Le foncteur de Laplace n'est pas fidèle puisqu'il envoie en  $\{0\}$  tout module de torsion. Rappelons que le *rang* de  $\Lambda$ , noté  $\text{rg}(\Lambda)$ , est la dimension du  $\mathbb{R}(s)$ -espace vectoriel  $\hat{\Lambda}$  ; ce rang est donc nul si, et seulement si,  $\Lambda$  est de torsion.

<sup>10</sup>  $\{1\} \neq 1$ .

Prenons un système nominal  $\Lambda^{\text{nom}}$  de commande  $\mathbf{u}^{\text{nom}} = (u_1^{\text{nom}}, \dots, u_m^{\text{nom}})$  et de sortie  $\mathbf{y}^{\text{nom}} = (y_1^{\text{nom}}, \dots, y_p^{\text{nom}})$ . Comme  $\Lambda^{\text{nom}}/\text{span}_{\mathbb{R}[s]}(\mathbf{u}^{\text{nom}})$  est de torsion,  $\hat{\mathbf{u}}^{\text{nom}}$  est une base de  $\hat{\Lambda}^{\text{nom}}$ . Il vient

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_1^{\text{nom}} \\ \vdots \\ \hat{y}_p^{\text{nom}} \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} \hat{u}_1^{\text{nom}} \\ \vdots \\ \hat{u}_m^{\text{nom}} \end{pmatrix}$$

où  $H \in \mathbb{R}(s)^{p \times m}$  est appelée *matrice de transfert* du système nominal. Rappelons qu'elle est dite (*strictement propre*) si, et seulement si, les degrés des numérateurs de ses coefficients sont (*strictement*) inférieurs à ceux des dénominateurs.

### 2.2.3. Commandabilité et sortie plate

Le système  $\Lambda$  est dit *commandable*, ou *contrôlable*, si, et seulement si, le système nominal  $\Lambda^{\text{nom}}$  l'est, c'est-à-dire si, et seulement si, le module  $\Lambda^{\text{nom}}$  est libre [5]. Posons  $m = \text{rg}(\Lambda^{\text{nom}})$ . Tout  $m$ -uplet d'éléments de  $\Lambda$ , dont l'image canonique dans  $\Lambda^{\text{nom}}$  est une base, est appelé *sortie plate*, ou *basique*.

### 2.2.4. Observabilité

Le système  $\Lambda$  de commande  $\mathbf{u}$  et de sortie  $\mathbf{y}$  est dit *observable* si, et seulement si, le système nominal  $\Lambda^{\text{nom}}$  l'est, c'est-à-dire si, et seulement si,  $\Lambda^{\text{nom}} = \text{span}_{\mathbb{R}[s]}(\mathbf{u}^{\text{nom}}, \mathbf{y}^{\text{nom}})$  [5].

### 2.2.5. Représentation d'état

Soit un système  $\Lambda$ , de commande  $\mathbf{u}$  et de sortie  $\mathbf{y}$ . D'après [5],  $\Lambda^{\text{nom}}$  admet la représentation d'état kalmanienne suivante, dite nominale,

$$s \begin{pmatrix} x_1^{\text{nom}} \\ \vdots \\ x_n^{\text{nom}} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1^{\text{nom}} \\ \vdots \\ x_n^{\text{nom}} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} u_1^{\text{nom}} \\ \vdots \\ u_m^{\text{nom}} \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} y_1^{\text{nom}} \\ \vdots \\ y_p^{\text{nom}} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1^{\text{nom}} \\ \vdots \\ x_n^{\text{nom}} \end{pmatrix} + \sum_{\alpha=0}^{\nu} D_{\alpha} s^{\alpha} \begin{pmatrix} u_1^{\text{nom}} \\ \vdots \\ u_m^{\text{nom}} \end{pmatrix} \quad (14)$$

où  $n$  est la dimension de  $\Lambda^{\text{nom}}/\text{span}_{\mathbb{R}[s]}(\mathbf{u}^{\text{nom}})$  en tant que  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On sait que le système entrée-sortie est strictement propre si, et seulement si, les  $D_{\alpha}$  sont nuls.

On en déduit, avec [11], la représentation d'état suivante pour  $\Lambda$  :

$$s \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varpi_1 \\ \vdots \\ \varpi_n \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \sum_{\alpha=0}^{\nu} D_{\alpha} s^{\alpha} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_p \end{pmatrix} \quad (16)$$

où  $\varpi_1, \dots, \varpi_n, \omega_1, \dots, \omega_p \in \text{span}_{\mathbb{R}[s]}(\boldsymbol{\pi})$ .

### 2.2.6. Bonne commande et bonne sortie

La commande  $\mathbf{u}$  est dite *bonne* si, et seulement si, en (13), ou en (15),  $\text{rg}(B) = m$ . De même, la sortie  $\mathbf{y}$  est dite *bonne* si, et seulement si, en (14), ou en (16),  $\text{rg}(C) = p$ .

**Proposition 2.4.** *Soit un système entrée-sortie, à bonne sortie. Il existe, alors, une représentation d'état (15, 16) telle que les composantes  $\omega_1, \dots, \omega_p$  de la perturbation en (16) soient nulles.*

**Démonstration.** D'après  $\text{rg}(C) = p$ , on peut choisir un état  $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$  tel que la matrice de sortie correspondante  $\tilde{C} = (\tilde{c}_{ij})$  soit

$$\tilde{c}_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, 1 \leq i \leq p \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Alors, la réponse découle d'un changement d'état dépendant de la perturbation.

**Exemple 2.5.** Considérons le système monovarié, d'état de dimension 1,

$$\begin{aligned} sx &= ax + bu + \pi \\ y &= cx + \omega \end{aligned}$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$ . La sortie  $y$  est bonne si, et seulement si,  $c \neq 0$ . Alors, le changement d'état  $\bar{x} = cx + \omega$ , dépendant de la perturbation, donne

$$\begin{aligned} s\bar{x} &= a\bar{x} + bcu + c\pi + (a - s)\omega \\ y &= \bar{x} \end{aligned}$$

où la perturbation de mesure  $\omega$  est reportée sur la dynamique.

Un système entrée-sortie est dit *bon* si, et seulement si, commande et sortie sont bonnes. Cette propriété, à laquelle on peut facilement se ramener car nous nous restreindrons aux systèmes strictement propres, sera supposée vérifiée par la suite.

### 2.2.7. Forme de Brunovský

La forme canonique de Brunovský associée à (13) est

$$s^{\nu_i} z_i^{\text{nom}} = v_i^{\text{nom}}, \quad i = 1, \dots, m \quad (17)$$

où  $\mathbf{v}^{\text{nom}} = (v_1^{\text{nom}}, \dots, v_m^{\text{nom}})$  est la nouvelle commande et les  $\nu_i$  sont les indices de commandabilité. Il lui correspond pour (15) la forme canonique de Brunovský, dite *fortement perturbée*<sup>11</sup>,

$$s^{\nu_i} z_i = v_i + \vartheta_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (18)$$

$\vartheta \in \text{span}_{\mathbb{R}[s]}(\boldsymbol{\pi})$ , où  $z_i \in \text{span}_{\mathbb{R}[s]}(\mathbf{u}, \mathbf{x})$ .

**Proposition 2.6.** *On obtient (18) à partir de (15) par changement d'état et bouclage statique d'état.*

**Démonstration.** Soient

$$\begin{pmatrix} x_1^{\text{nom}} \\ \vdots \\ x_1^{\text{nom}} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} z_1^{\text{nom}} \\ \vdots \\ z_1^{\text{nom}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} u_1^{\text{nom}} \\ \vdots \\ u_m^{\text{nom}} \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x_1^{\text{nom}} \\ \vdots \\ x_n^{\text{nom}} \end{pmatrix} + G \begin{pmatrix} v_1^{\text{nom}} \\ \vdots \\ v_m^{\text{nom}} \end{pmatrix}$$

<sup>11</sup>À ne pas confondre avec la forme de Brunovský *perturbée* de [11].

$P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\det(P) \neq 0$ ,  $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $G \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\det(G) \neq 0$ , le changement d'état et le bouclage statique d'état permettant de passer de (13) à (17). Alors, le changement d'état et le bouclage d'état statique recherchés sont

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + G \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}.$$

### 2.3. Trajectoires

Le corps  $\mathcal{M}$  est doté d'une structure canonique de  $\mathbb{R}[s]$ -module. L'ensemble  $\text{Hom}(\Lambda, \mathcal{M})$  des morphismes de  $\mathbb{R}[s]$ -modules  $\Lambda \rightarrow \mathcal{M}$  est appelé ensemble des *trajectoires (de Mikusiński)* du système  $\Lambda$  (comparer avec [6]). Pour tout  $\lambda \in \Lambda$  et tout  $\tau \in \text{Hom}(\Lambda, \mathcal{M})$ , on appelle  $\tau(\lambda)$  la  $\tau$ -trajectoire, ou la  $\tau$ -valeur, de  $\lambda$ . Pour un élément  $\lambda$  donné, il existe, éventuellement, plusieurs  $\tau$  lui donnant la même  $\tau$ -trajectoire, ou  $\tau$ -valeur. Aussi parlerons-nous simplement de trajectoire, ou de valeur, quand nous ne préciserons pas  $\tau$ . Notons que  $\mathcal{M}_{\text{reg}}^{\text{sen}}$  est un sous-module de  $\mathcal{M}$  et faisons l'hypothèse suivante :

**Nous ne considérerons que des trajectoires de  $\text{Hom}(\Lambda, \mathcal{M}_{\text{reg}}^{\text{sen}})$ , c'est-à-dire à supports limités à gauche.**

C'est, en d'autres termes, écrire que tout système est au repos pour  $t \leq t_0$ ,  $t_0 \in ]-\infty, +\infty[$ .

Supposons le module  $\Lambda$  non libre. Soit  $\lambda \neq 0$  un élément de torsion : il existe  $\psi \in \mathbb{R}[s]$ ,  $\psi \neq 0$ , tel que  $\psi\lambda = 0$ . Pour toute trajectoire  $\tau \in \text{Hom}(\Lambda, \mathcal{M}_{\text{reg}}^{\text{sen}})$ , on a  $\psi\tau(\lambda) = 0$ , donc  $\tau(\lambda) = 0$  : la contribution d'un tel élément est toujours nulle. Nous ferons donc l'hypothèse suivante :

**Le  $\mathbb{R}[s]$ -module associé à un système est libre.**

C'est dire, en d'autres termes, que tout élément, non influencé par la commande, l'est, au moins, par la perturbation. Rappelons qu'un système nominal n'est pas nécessairement commandable ; par contre, un système non perturbé, qui est isomorphe au système nominal correspondant, l'est.

Soit un système  $\Lambda$  tel que le module associé au système nominal  $\Lambda^{\text{nom}}$  soit de torsion. Pour tout  $\lambda \in \Lambda$ ,  $\lambda \neq 0$ , on peut donc écrire  $p(s)\lambda = \varpi$ ,  $p(s) \in \mathbb{R}[s]$ ,  $p(s) \neq 0$ ,  $\varpi \in \text{span}_{\mathbb{R}[s]}(\boldsymbol{\pi})$ . Si l'on donne des valeurs aux composantes des perturbations, on détermine donc une unique trajectoire de  $\text{Hom}(\Lambda, \mathcal{M}_{\text{reg}}^{\text{sen}})$ . Par léger abus de langage, nous appellerons la trajectoire de  $\lambda$  sa *valeur*.

Le résultat suivant est à comparer avec [6].

**Théorème 2.7.** *Le système nominal  $\Lambda^{\text{nom}}$  est commandable si, et seulement si, pour tout  $\lambda^{\text{nom}} \in \Lambda^{\text{nom}}$ ,  $\lambda^{\text{nom}} \neq 0$ , et tout  $\mu \in \mathcal{M}_{\text{reg}}^{\text{sen}}$ , il existe une trajectoire  $\tau \in \text{Hom}(\Lambda^{\text{nom}}, \mathcal{M}_{\text{reg}}^{\text{sen}})$  telle que  $\tau(\lambda^{\text{nom}}) = \mu$ .*

**Démonstration.** Supposons  $\Lambda^{\text{nom}}$  non commandable et soit  $\lambda^{\text{nom}}$  un élément de torsion. Pour tout  $\tau \in \text{Hom}(\Lambda^{\text{nom}}, \mathcal{M}_{\text{reg}}^{\text{sen}})$ , on sait que  $\tau(\lambda^{\text{nom}}) = 0$ .

Supposons dorénavant  $\Lambda^{\text{nom}}$  commandable. Soient  $\lambda^{\text{nom}} \in \Lambda^{\text{nom}}$ ,  $\lambda^{\text{nom}} \neq 0$ , et  $\mu \in \text{Hom}(\Lambda^{\text{nom}}, \mathcal{M}_{\text{reg}}^{\text{sen}})$ . Définissons le morphisme  $\hat{\tau} : \hat{\Lambda}^{\text{nom}} \rightarrow \mathcal{M}_{\text{reg}}^{\text{sen}}$  de  $\mathbb{R}(s)$ -espaces vectoriels, pour tout  $\hat{l} \in \hat{\Lambda}^{\text{nom}}$ , par

$$\hat{\tau}(\hat{l}) = \begin{cases} c\mu & \text{si } \hat{l} = c\hat{\lambda}, c \in \mathbb{R}(s) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définissons  $\tau$  par  $\tau = \hat{\tau}\ell$ , où  $\ell$  est la transformation de Laplace formelle.

Le corollaire suivant est immédiat :

**Corollaire 2.8.** *Le système nominal  $\Lambda^{\text{nom}}$ , de rang  $m$ , est commandable si, et seulement si, pour tout  $q$ -uplet  $\{\lambda_1^{\text{nom}}, \dots, \lambda_q^{\text{nom}}\}$ ,  $q \leq m$ , d'éléments  $\mathbb{R}(s)$ -linéairement indépendants de  $\Lambda^{\text{nom}}$  et tout  $q$ -uplet  $\{\mu_1, \dots, \mu_q\}$  d'éléments de  $\mathcal{M}_{\text{reg}}^{\text{sen}}$ , il existe une trajectoire  $\tau \in \text{Hom}(\Lambda^{\text{nom}}, \mathcal{M}_{\text{reg}}^{\text{sen}})$  telle que  $\tau(\lambda_i^{\text{nom}}) = \mu_i$ .*



$$\begin{array}{ccccccc}
& & & 0 & & & \\
& & & \downarrow & & & \\
& & & \text{span}_{\mathbb{R}[s]}(\boldsymbol{\pi}) & & & \\
& & & \downarrow & & & \\
0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & \Lambda & \longrightarrow & T \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & N^{\text{nom}} & \longrightarrow & \Lambda^{\text{nom}} & \longrightarrow & T^{\text{nom}} \longrightarrow 0 \\
& & & & \downarrow & & \\
& & & & 0 & & 
\end{array}$$

FIGURE 1. Diagramme commutatif associé à la définition d'un correcteur.

### 3. CORRECTEURS

#### 3.1. Définition générale

Introduisons la suite exacte

$$0 \rightarrow N \rightarrow \Lambda \rightarrow T \rightarrow 0 \quad (19)$$

de  $\mathbb{R}[s]$ -modules. A partir de (11) et de (19), on obtient le diagramme commutatif de la figure 1. On appelle *correcteur* toute suite exacte (19) telle que le  $\mathbb{R}[s]$ -module  $T^{\text{nom}}$  de la figure 1 soit de torsion.

#### 3.2. Localisation

On sait que l'anneau principal  $\mathbb{R}[s, s^{-1}]$  des polynômes de Laurent réels en l'indéterminée  $s$ , de la forme  $\sum_{\nu \in \mathbb{Z}} a_{\nu} s^{\nu}$ ,  $a_{\nu} \in \mathbb{R}$ , est le localisé [17] de  $\mathbb{R}[s]$  par la partie multiplicative  $\{s^{\nu} \mid \nu \geq 1\}$ . Le foncteur de finie

localisation  $\mathbb{R}[s, s^{-1}] \otimes_{\mathbb{R}[s]} \bullet$  fait passer de la catégorie des  $\mathbb{R}[s]$ -modules de type fini à celle des  $\mathbb{R}[s, s^{-1}]$ -modules de type fini. Ce foncteur n'est pas fidèle puisqu'il envoie sur  $\{0\}$  tout module de torsion annihilé par un  $s^{\nu}$ ,  $\nu \geq 0$ . On note par  ${}_s\Lambda$  le localisé de  $\Lambda$  par  $\mathbb{R}[s, s^{-1}] \otimes_{\mathbb{R}[s]} \bullet$ . Si  $\Lambda$  ne possède pas de sous-module de torsion de cette forme, et, en particulier, s'il est libre, le morphisme  $\mathbb{R}[s]$ -linéaire  $\Lambda \rightarrow {}_s\Lambda$ ,  $\lambda \mapsto {}_s\lambda = 1 \otimes \lambda$ , est injectif : alors, nous considérerons, avec un léger abus de notation,  $\Lambda$  comme un sous-ensemble de  ${}_s\Lambda$ . Par contre, le foncteur  $\mathbb{R}[s, s^{-1}] \otimes_{\mathbb{R}[s]} \bullet$  est exact. En pratique, un correcteur ne sera pas défini par (19), mais par la suite exacte

$$0 \rightarrow {}_sN \rightarrow {}_s\Lambda \rightarrow {}_sT \rightarrow 0 \quad (20)$$

telle que, dans le diagramme commutatif de la figure 2, le  $\mathbb{R}[s, s^{-1}]$ -module  ${}_sT^{\text{nom}}$  soit de torsion.

Comme le noyau du morphisme canonique  $\mathbb{R}[s]$ -linéaire  $T^{\text{nom}} \rightarrow {}_sT^{\text{nom}}$  est le sous-module de torsion  $\{\lambda \mid \exists \nu \geq 0 \text{ tel que } s^{\nu}\lambda = 0\}$ , nous avons démontré la

**Proposition 3.1.** *Le correcteur défini par (20) est un correcteur au sens du paragraphe 3.1.*

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & 0 & & \\
& & & & \downarrow & & \\
& & & & \text{span}_{\mathbb{R}[s,s^{-1}]}(\boldsymbol{\pi}) & & \\
& & & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & {}_sN & \longrightarrow & {}_s\Lambda & \longrightarrow & {}_sT \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & {}_sN^{\text{nom}} & \longrightarrow & {}_s\Lambda^{\text{nom}} & \longrightarrow & {}_sT^{\text{nom}} \longrightarrow 0 \\
& & & & \downarrow & & \\
& & & & 0 & & 
\end{array}$$

FIGURE 2. Diagramme commutatif associé à la définition d'un correcteur.

#### 4. BOUCLAGE D'ÉTAT INTÉGRAL ROBUSTIFIANT

##### 4.1. Bouclage d'état intégral

Un *bouclage d'état intégral* de la dynamique (15) est défini par

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = -\mathcal{K}(s^{-1}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (21)$$

où  $\mathcal{K}(s^{-1}) \in \mathbb{R}[s^{-1}]^{m \times n}$ . Le bouclage (21) est dit *statique* si, et seulement si,  $\mathcal{K}(s^{-1}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Notons  $\mathcal{D}$  (resp.  ${}_s\mathcal{D}$ ) le  $\mathbb{R}[s]$ -module (resp.  $\mathbb{R}[s, s^{-1}]$ -module) correspondant à (15). Soit  ${}_sN$  le sous-module de  ${}_s\mathcal{D}$  correspondant à (21), c'est-à-dire le sous-module d'équations

$$u_i + \sum_{j=1}^n k_{ij} x_j = 0 \quad i = 1, \dots, m$$

où  $\mathcal{K} = (k_{ij})$ . Posons  $N = {}_sN \cap \mathcal{D}$ . Dire que (21) est un correcteur signifie que la suite exacte  $0 \rightarrow N \rightarrow \mathcal{D} \rightarrow T \rightarrow 0$  définit un correcteur au sens de 3.1.

**Proposition 4.1.** *Le bouclage d'état intégral (21) est un correcteur.*

**Démonstration.** Le module  ${}_sT^{\text{nom}}$  de la figure 2 est défini par

$$s(I_n - s^{-1}(A - BK\mathcal{K}(s^{-1}))) \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = 0.$$

La matrice  $(I_n - s^{-1}(A - BK\mathcal{K}(s^{-1})))$  est inversible en tant qu'élément de  $R(s)^{n \times n}$ , car les coefficients de  $A - BK\mathcal{K}(s^{-1})$  appartiennent à  $\mathbb{R}[s^{-1}]$ . Il en découle que  ${}_sT^{\text{nom}}$  est de torsion. La conclusion découle de la proposition 3.1.

**Remarque 4.2.** La matrice  $\mathcal{K}(s^{-1})$  n'est pas unique en général. Soit, par exemple,

$$\begin{aligned} sx_1 &= x_2 \\ sx_2 &= u. \end{aligned}$$

Les deux expressions suivantes  $u = \frac{x_1}{s} = \frac{x_2}{s^2}$  définissent le même bouclage intégral.

## 4.2. Bouclage robustifiant

Un opérateur  $o$  de  $\mathcal{M}_{\text{reg}}^{\text{sen}}$  est dit *rationnel-exponentiel* si, et seulement si, il est de forme  $o = s^{-v}E(s)$ ,  $v \in \mathbb{Z}$ , où

$$E(s) = \sum_{\text{finie}} \frac{a(s)}{b(s)} e^{\vartheta s}$$

$\vartheta \in \mathbb{R}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}[s]$ ,  $b \neq 0$ ,  $(a, b) = 1$ , considéré comme fonction holomorphe de la variable complexe  $s$ , ne possède ni pôle ni racine en 0. Si  $v \geq 1$ , on dit que  $o$  possède un pôle d'ordre  $v$  en 0 ; si  $v < 1$ , on dit que  $o$  n'a pas de pôle en 0. L'opérateur  $o$  est dit de *type QST* si, et seulement si, les parties réelles des racines des polynômes  $b$  sont  $< 0$ .

**Théorème 4.3.** *Soit une dynamique (15), supposée commandable. Les valeurs des composantes de la perturbation sont des opérateurs rationnels-exponentiels, de type QST, à pôles en 0 d'ordre  $\leq v_0$ . Il existe, alors, un bouclage intégral, dit robustifiant, tel que*

- les composantes de l'état aient pour valeurs des opérateurs rationnels-exponentiels, de type QST, sans pôle en 0 ;
- les composantes de la commande aient pour valeurs des opérateurs rationnels-exponentiels, de type QST, à pôles en 0 d'ordre  $\leq v_0$ .

## 4.3. Démonstration du théorème 4.3

On se ramène, d'après la proposition 2.6, au cas monovarié

$$\begin{aligned} sz_1 &= z_2 + \varepsilon_1 \\ &\vdots \\ sz_\nu &= v + \varepsilon_\nu \end{aligned} \tag{22}$$

où les  $\varepsilon_\kappa$  sont des perturbations à valeurs opérateurs rationnels-exponentiels, de type QST. Posons  $\eta_0 = s^{-v_0}z_1$ ,  $\eta_1 = s\eta_0, \dots, \eta_{v_0} = z_1, \eta_{v_0+1} = z_2, \eta_{v_0+\nu} = z_\nu$ . Soit le bouclage

$$v = -K \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \vdots \\ \eta_{v_0+\nu} \end{pmatrix}$$

où  $K \in \mathbb{R}^{1 \times v_0 + \nu}$  est choisi de façon à obtenir des pôles à parties réelles  $< 0$ . Il est immédiat de réécrire ce bouclage comme bouclage d'état intégral de (22). Alors,  $\eta_0$  a pour valeur un opérateur rationnel-exponentiel, de type QST, à pôle en 0 d'ordre  $\leq v_0$ . On en déduit que  $s^\alpha z$ ,  $\alpha \geq 0$ , a pour valeur un opérateur de même type, sans pôle en 0. L'assertion sur la valeur de  $u$  découle immédiatement de (15).

## 5. CORRECTEUR PID GÉNÉRALISÉS

Soit un système entrée-sortie (15, 16), supposé commandable et observable.

### 5.1. Reconstructeur intégral

Soit  ${}_s\lambda^{\text{nom}} \in {}_s\Lambda^{\text{nom}}$ . D'après la propriété d'observabilité, équivalente à la reconstructibilité,  ${}_s\Lambda^{\text{nom}} = \text{span}_{\mathbb{R}[s, s^{-1}]}(\mathbf{u}^{\text{nom}}, \mathbf{y}^{\text{nom}})$ . On peut donc écrire

$${}_s\lambda^{\text{nom}} = \Phi \begin{pmatrix} y_1^{\text{nom}} \\ \vdots \\ y_p^{\text{nom}} \end{pmatrix} + \Psi \begin{pmatrix} u_1^{\text{nom}} \\ \vdots \\ u_m^{\text{nom}} \end{pmatrix}$$

$\Phi \in \mathbb{R}[s, s^{-1}]^{1 \times p}$ ,  $\Psi \in \mathbb{R}[s, s^{-1}]^{1 \times m}$ . L'expression

$$\text{rec}_s \lambda = \Phi \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} + \Psi \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix} \quad (23)$$

obtenue en remplaçant  $\mathbf{u}^{\text{nom}}$  et  $\mathbf{y}^{\text{nom}}$  par  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{y}$ , est appelée *reconstructeur* de  ${}_s\lambda$ . Remarquons qu'un tel reconstructeur néglige les perturbations. Si les coefficients de  $\Phi$  et  $\Psi$  appartiennent à  $\mathbb{R}[s^{-1}]$ , l'expression (23) est appelée *reconstructeur intégral*; il est alors noté  $\text{rec-int}_s \lambda$ . La façon d'obtenir un reconstructeur intégral de l'état a été décrite dans l'introduction.

### 5.2. PID généralisés

On appelle *correcteur*, ou *régulateur*, *proportionnel-intégral-dérivé généralisé*, ou *PID généralisé*, un correcteur, où, en (20),  ${}_sN$  est défini par

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix} = \Xi \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} + \Omega \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}$$

$\Xi \in \mathbb{R}[s, s^{-1}]^{m \times p}$ ,  $\Omega \in \mathbb{R}[s, s^{-1}]^{m \times m}$ . On a un correcteur *proportionnel-intégral généralisé*, ou *GPI*, si, et seulement si,  $\Xi \in \mathbb{R}[s^{-1}]^{m \times p}$ ,  $\Omega \in s^{-1}\mathbb{R}[s^{-1}]^{m \times m}$ .

Un bouclage intégral (21), où l'on substitue à tout élément du membre de droite une expression fournie par un reconstructeur (23)

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = -\mathcal{K}(s^{-1}) \text{rec} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (24)$$

est un PID généralisé. On a un GPI si, en (24), on utilise un reconstructeur intégral.

**Proposition 5.1.** (24) est un correcteur.

**Démonstration.** Elle découle immédiatement de celle de la proposition 4.1 car, pour le système nominal, bouclages d'état intégraux et correcteurs PID intégraux coïncident.

### 5.3. Le théorème essentiel

**Théorème 5.2.** Soit un bon système entrée-sortie  $\Lambda$ , strictement propre, commandable et observable. Les valeurs des composantes de la perturbation sont supposés être des opérateurs rationnels-exponentiels, de type QST, à pôles en 0 d'ordre  $\leq \nu_0$ . Il existe, alors, un correcteur proportionnel-intégral généralisé tel que

- les composantes de la sortie sont des opérateurs rationnels-exponentiels, de type QST, sans pôle en 0 ;

- les composantes de la commande sont des opérateurs rationnels-exponentiels, de type QST, à pôles en 0 d'ordre  $\leq v_0$ .

#### 5.4. Démonstration du théorème essentiel

**Proposition 5.3.** *Il existe une représentation d'état de type (15, 16) où*

1. les  $\omega_i$  en (16) sont nuls ;
2. il existe un état en (16) dont  $p$  composantes sont celles de  $\mathbf{y}$ , les autres appartenant à  $\text{span}_{\mathbb{R}[s]}(\mathbf{u}, \mathbf{y})$ .

**Démonstration.** La première assertion et le début de la seconde découlent immédiatement de la proposition 2.4. Le remplacement des autres composantes par leur reconstruteur dans  $\text{span}_{\mathbb{R}[s]}(\mathbf{u}, \mathbf{y})$  n'est autre qu'un changement d'état dépendant des perturbations.

Alors, comme en section 4.3, on se ramène, d'après la section 2.2.7, au cas monovariante (22), où les composantes de l'état appartiennent à  $\text{span}_{\mathbb{R}[s]}(\mathbf{u}, \mathbf{y})$ . Soit  $\alpha_0 \geq 1$  le plus petit entier tel que  $s^{-\alpha_0} z_1$  soit une combinaison  $\mathbb{R}[s^{-1}]$ -linéaire des composantes de  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{y}$ . Le remplacement dans un bouclage d'état intégral de  $s^{-\mu} z_1$ ,  $0 \leq \mu < \alpha_0$ , par un reconstruteur intégral rajoute des perturbations QST que l'on peut atténuer d'après la proposition 4.3.

On se ramène, ainsi, au cas monovariante

$$s^\nu z = v + \varepsilon \tag{25}$$

où  $\varepsilon$  est une perturbation à valeur définie comme précédemment. Posons  $\eta_1 = s^{-v_0} z$ ,  $\eta_2 = s\eta_1, \dots, \eta_{v_0+\nu} = s^{\nu-1} z$  ; donc,  $s\eta_{v_0+\nu} = v + \varepsilon$ . Soit le bouclage statique d'état

$$v = -K \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_{v_0+\nu} \end{pmatrix}$$

où  $K \in \mathbb{R}^{1 \times v_0+\nu}$  est choisi de façon à obtenir des pôles à parties réelles  $< 0$ . Il est immédiat de réécrire ce bouclage comme bouclage d'état intégral de (25). Alors,  $\eta_1$  a pour valeur un opérateur rationnel-exponentiel, de type QST, à pôle en 0 d'ordre  $\leq v_0$ . On en déduit que  $s^\alpha z$ ,  $\alpha \geq 0$ , a pour valeur un opérateur de même type, sans pôle en 0. L'assertion sur la valeur de  $v$  découle, alors, immédiatement de (25).

## 6. QUELQUES EXEMPLES AVEC SIMULATIONS

Dans les trois exemples qui suivent, on amène un système d'un point de fonctionnement à un autre, grâce à une trajectoire donnée, selon les principes de commande prédictive de [11], déduits de la platitude [9, 10].

### 6.1. Du PID au PI généralisé

Reprenons l'exemple (1) de l'introduction. L'expression (3) fournit le reconstruteur intégral  $\text{rec-int}(y) = \underline{sy}$ . Alors (4) est un correcteur PI généralisé permettant d'atténuer la perturbation de valeur  $\gamma \frac{e^{-\mu s}}{s}$ , qui remplace le PID classique (2). Les coefficients  $K_P, K_D, K_I, K_{II}$  assurent la stabilité de la boucle fermée

$$\left( s^2 + (a_1 + K_D)s + (a_0 + K_P) + \frac{K_I}{s} + \frac{K_{II}}{s^2} \right) y^e = \left( 1 + \frac{K_D}{s} \right) \frac{\gamma e^{-\mu s}}{s}.$$

Les valeurs des paramètres dans la simulation numérique présentée en figure 3 sont  $a_1 = 1$ ,  $a_0 = 1$ ,  $K_D = 3$ ,  $K_P = 5$ ,  $K_I = 4$ ,  $K_{II} = 1$  (polynôme caractéristique  $(s+1)^4$ ).

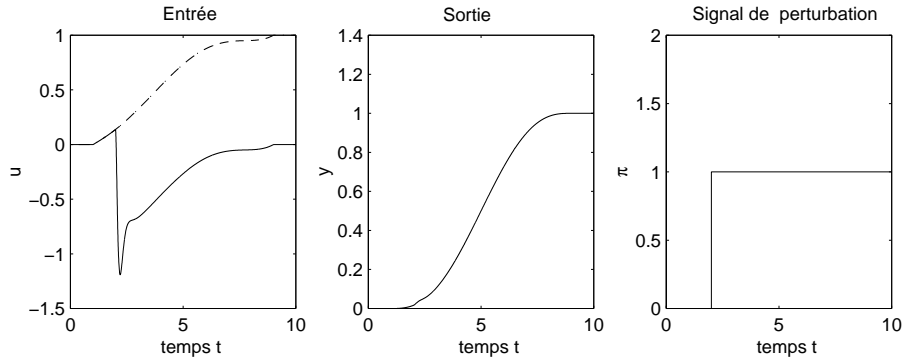


FIGURE 3. Simulation numérique de l'exemple 6.1. En tirets (---) les trajectoires désirées  $y^*$ ,  $u^*$ .

## 6.2. Système avec dynamique des zéros

Remplaçons, dans l'exemple précédent, la constante  $b$  par  $b_1s + b_0$ ,  $b_1 \neq 0$  :

$$(s^2 + a_1s + a_0)y = (b_1s + b_0)u + \gamma \frac{e^{-\mu s}}{s}.$$

La littérature sur les PID n'étudie guère ces systèmes. Le PI généralisé

$$u^e = - \left( K_P + \frac{K_I}{s} + \frac{K_{II}}{s^2} \right) y^e - \frac{F_I}{s} u^e$$

conduit à la boucle fermée

$$\left( 1 + \frac{F_I}{s} \right) (s^2 + a_1s + a_0) y^e + (b_1s + b_0) \left( K_P + \frac{K_I}{s} + \frac{K_{II}}{s^2} \right) y^e = \left( 1 + \frac{F_I}{s} \right) \gamma \frac{e^{-\mu s}}{s}$$

dont on assure la stabilité par un choix convenable des coefficients  $K_P, K_I, K_{II}, F_I \in \mathbb{R}$ . Dans les simulations de la figure 4 on a posé  $a_0 = 1, a_1 = 1, b_0 = 1, b_1 = 2, F_I = 0,4784, K_P = 0,8608, K_I = 0,7504, K_{II} = 0,4096$  (polynôme caractéristique choisi  $(s + 0,8)^4$ ). Pour la figure 5 on a  $b_1 = -2$ , d'où le déphasage non minimal,  $F_I = 17,7857, K_P = 6,3929, K_I = 5,8393, K_{II} = 5,0625$  (polynôme caractéristique choisi  $(s + 1,5)^4$ ).

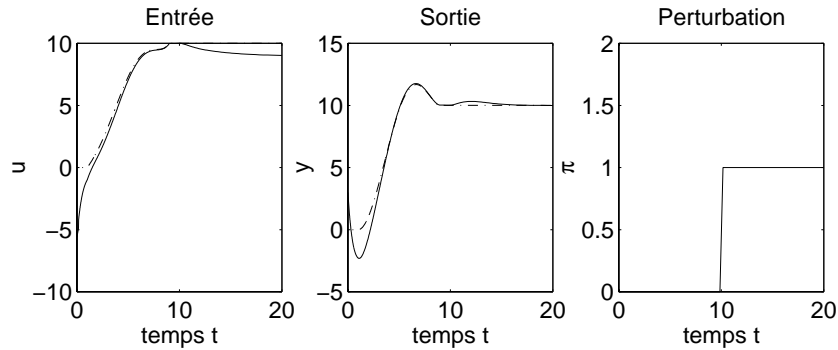


FIGURE 4. Réponse du système en boucle fermée avec un PI généralisé. En tirets (---) les trajectoires désirées  $y^*$ ,  $u^*$ .

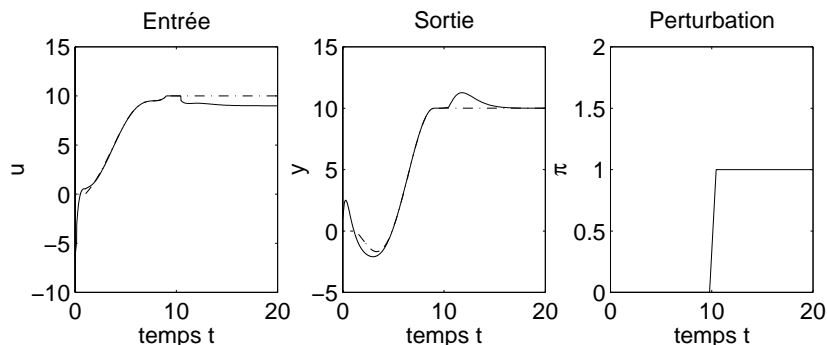


FIGURE 5. Réponse du système en boucle fermée avec un PI généralisé, système à phase non minimale. En tirets (-.-) les trajectoires désirées  $y^*$ ,  $u^*$ .

### 6.3. Avion à décollage vertical

#### 6.3.1. Généralités

Un modèle simplifié non linéaire de l'avion à décollage vertical, *PVTOL* en abrégé américain, est fourni par

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -u_1 \sin \theta + \epsilon u_2 \cos \theta \\ \ddot{z} &= u_1 \cos \theta + \epsilon u_2 \sin \theta - g \\ \ddot{\theta} &= u_2\end{aligned}\tag{26}$$

où  $g \in \mathbb{R}$  est la constante de gravitation et  $\epsilon \in \mathbb{R}$  un paramètre. On sait que le système (26) est plat [22].

La dynamique linéarisée, non perturbée, autour du point d'équilibre  $\theta = 0$ ,  $x = \bar{x} = \text{constante}$ ,  $z = \bar{z} = \text{constante}$ ,  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = 0$ ,

$$\begin{aligned}s^2 x_{\text{lin}} &= -\theta_{\text{lin}} + \epsilon u_{2\text{lin}} \\ s^2 z_{\text{lin}} &= u_{1\text{lin}} \\ s^2 \theta_{\text{lin}} &= u_{2\text{lin}}\end{aligned}\tag{27}$$

est commandable. Une sortie plate est

$$F = x_{\text{lin}} - \epsilon \theta_{\text{lin}}, \quad L = z_{\text{lin}}.$$

Les sorties mesurées sont  $y_{1\text{lin}} = x_{\text{lin}}$  and  $y_{2\text{lin}} = z_{\text{lin}}$ . Il vient :

$$u_{1\text{lin}} = s^2 L, \quad u_{2\text{lin}} = -s^4 F.$$

Le bouclage statique

$$\begin{aligned}u_{1\text{lin}} &= -\gamma_2 s L - \gamma_1 L = -\gamma_2 s z_{\text{lin}} - \gamma_1 z_{\text{lin}} \\ u_{2\text{lin}} &= k_5 s^3 F + k_4 s^2 F + k_3 s F + k_2 F = -(k_5 + k_3 \epsilon) s \theta_{\text{lin}} - (k_4 + \epsilon k_2) \theta_{\text{lin}} + k_3 s x_{\text{lin}} + k_2 x_{\text{lin}}\end{aligned}$$

stabilisant pour un choix convenable de  $\gamma_1, \gamma_2, k_2, k_3, k_4, k_5 \in \mathbb{R}$ , exige la connaissance de l'état.

### 6.3.2. Observateur asymptotique

Les gains  $r_1, \dots, r_6 \in \mathbb{R}$  assurent la convergence de l'observateur asymptotique

$$\begin{aligned}
s\widehat{x}_{1\text{lin}} &= \widehat{x}_{2\text{lin}} - r_1(y_{1\text{lin}} - \widehat{x}_{1\text{lin}}) + \widehat{x}_{1\text{lin}}(0) \\
s\widehat{x}_{2\text{lin}} &= -\widehat{\theta}_{1\text{lin}} + \epsilon u_{2\text{lin}} - r_2(y_{1\text{lin}} - \widehat{x}_{1\text{lin}}) + \widehat{x}_{2\text{lin}}(0) \\
s\widehat{z}_{1\text{lin}} &= \widehat{z}_{2\text{lin}} - r_3(y_{2\text{lin}} - \widehat{z}_{1\text{lin}}) + \widehat{z}_{1\text{lin}}(0) \\
s\widehat{z}_{2\text{lin}} &= u_{1\text{lin}} - r_4(y_{2\text{lin}} - \widehat{z}_{1\text{lin}}) + \widehat{z}_{2\text{lin}}(0) \\
s\widehat{\theta}_{1\text{lin}} &= \widehat{\theta}_{2\text{lin}} - r_5(y_{1\text{lin}} - \widehat{x}_{1\text{lin}}) + \widehat{\theta}_{1\text{lin}}(0) \\
s\widehat{\theta}_{2\text{lin}} &= u_{2\text{lin}} - r_6(y_{1\text{lin}} - \widehat{x}_{1\text{lin}}) + \widehat{\theta}_{2\text{lin}}(0).
\end{aligned} \tag{28}$$

La figure 6 donnent les performances obtenues.

### 6.3.3. PI généralisé

À partir des reconSTRUCTEURS intégraux

$$\begin{aligned}
\theta_{\text{lin}} &= \frac{u_{2\text{lin}}}{s^2}, & x_{\text{lin}} &= y_{1\text{lin}}, & z_{\text{lin}} &= y_{2\text{lin}} \\
s\theta_{\text{lin}} &= \frac{u_{2\text{lin}}}{s}, & sx_{\text{lin}} &= \frac{u_{2\text{lin}}}{s^3} + \epsilon \frac{u_{2\text{lin}}}{s}, & sz_{\text{lin}} &= \frac{u_{1\text{lin}}}{s} \\
F &= y_{1\text{lin}} - \epsilon \frac{u_{2\text{lin}}}{s^2}, & L &= y_{2\text{lin}} \\
sF &= -\frac{u_{2\text{lin}}}{s^3}, & sL &= \frac{u_{1\text{lin}}}{s^2} \\
s^2F &= -\frac{u_{2\text{lin}}}{s^2}, & s^3F^{(3)} &= -\frac{u_{2\text{lin}}}{s^2}
\end{aligned} \tag{29}$$

on obtient le correcteur PI généralisé

$$\begin{aligned}
u_{1\text{lin}} &= -\frac{\gamma_2 u_{1\text{lin}} - \gamma_0 y_{2\text{lin}}}{s} - \gamma_1 y_{2\text{lin}} \\
u_{2\text{lin}} &= -\frac{k_5 u_{2\text{lin}} - k_1 y_{1\text{lin}}}{s} - \frac{k_4 + k_2 \epsilon u_{2\text{lin}} - k_0 y_{1\text{lin}}}{s^2} - \frac{k_3 u_{2\text{lin}} - k_2 y_{1\text{lin}}}{s^3} + k_2 y_{1\text{lin}}.
\end{aligned}$$

### 6.3.4. Comparaison

Le GPI, qui ne nécessite qu'un seul ajustement, est plus facile à mettre en œuvre que le couple observateur asymptotique – bouclage d'état, qui en nécessite deux. Il présente, surtout, de remarquables propriétés de robustesse par rapport à la variation du paramètre  $\epsilon$ , qui agit sur  $u_{2\text{lin}}$ . On sait qu'une mauvaise élimination de la commande dans un observateur asymptotique conduit à une détérioration des performances de la boucle et à des instabilités. Des simulations numériques, résumées dans les figures 7, 8 et 9, montrent que le couple observateur – bouclage devient oscillant pour une variation de 40 % du paramètre  $\epsilon$ , de valeur nominale 0,5, alors que le GPI conserve de bonnes performances jusqu'à 450 %. Le GPI reste, aussi, stable si l'on prend, de façon peu réaliste,  $\epsilon = 0$  et même des valeurs négatives. Ajoutons que le GPI a été déterminé pour le système (27) qui est non perturbé : il ne contient point de termes destinés à atténuer les perturbations. Comme déjà dit en fin d'introduction, une telle confrontation, qui ne repose sur aucun théorème mathématique mais sur des réglages *naïfs* du GPI et du couple observateur – bouclage, ne pourrait être tenue pour définitive que si elle était enrichie entre autres par l'exploitation de la vaste littérature sur la robustesse, notamment pour les observateurs asymptotiques<sup>12</sup>.

<sup>12</sup>Il ne saurait être question ici de fournir une telle analyse, que nous limiterons à [19] et à deux références [33,34] sur les modes glissants.



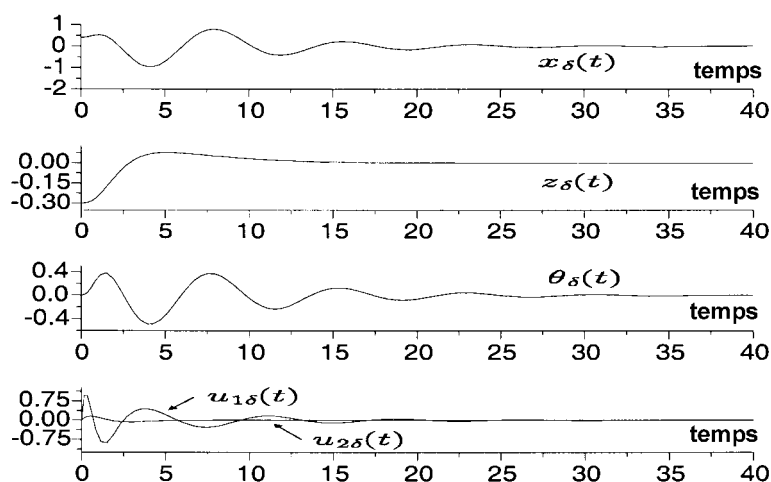


FIGURE 6. Performance d'une commande du PVTOL basée sur un observateur.

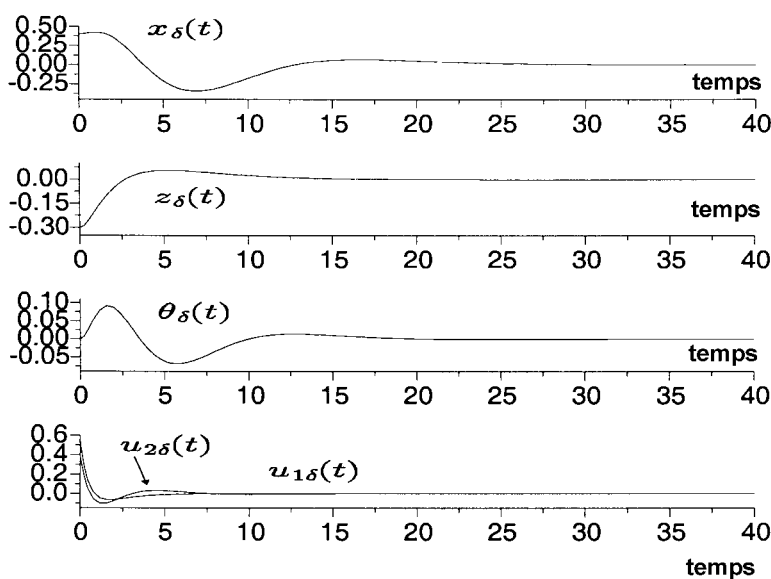


FIGURE 7. Performance de la commande du PVTOL basée sur un GPI.

## REFERENCES

- [1] B. d'Andréa–Novel et M. Cohen de Lara, *Commande linéaire de systèmes dynamiques*. Masson (1993).
- [2] K.J. Aström et T. Häggglund, *PID Controllers: Theory, Design, and Tuning*. Instrument Society of America (1995).
- [3] H. Bourlès et M. Fliess, Finite poles and zeros of linear systems: An intrinsic approach. *Internat. J. Control* **68** (1997) 897-922.
- [4] A. Erdélyi, *Operational Calculus and Generalized Functions*. Holt Rinehard Winston (1962).
- [5] M. Fliess, Some Basic Structural Properties of Generalized Linear Systems. *Systems Control Lett.* **15** (1990) 391-396.
- [6] M. Fliess, A Remark on Willems' Trajectory Characterization of Linear Controllability. *Systems Control Lett.* **19** (1992) 43-45.

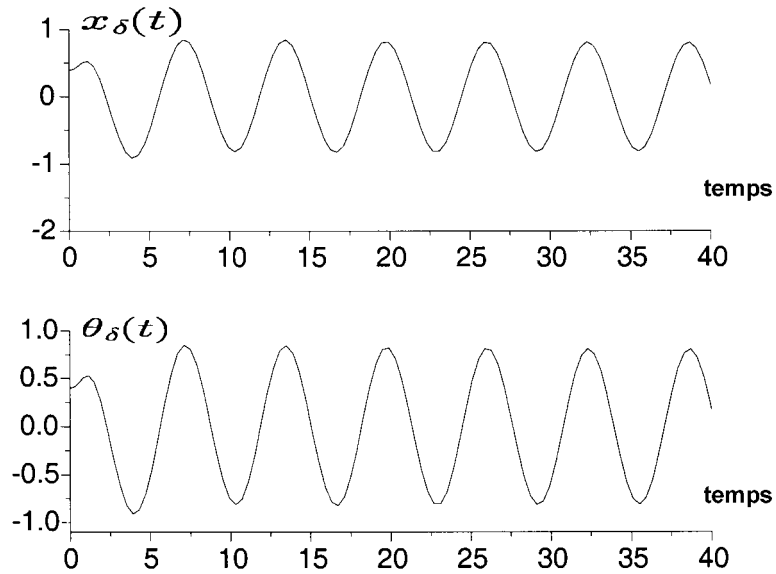


FIGURE 8. Performance de la commande par observateur lorsque le paramètre  $\epsilon$  est augmenté de 40 %.

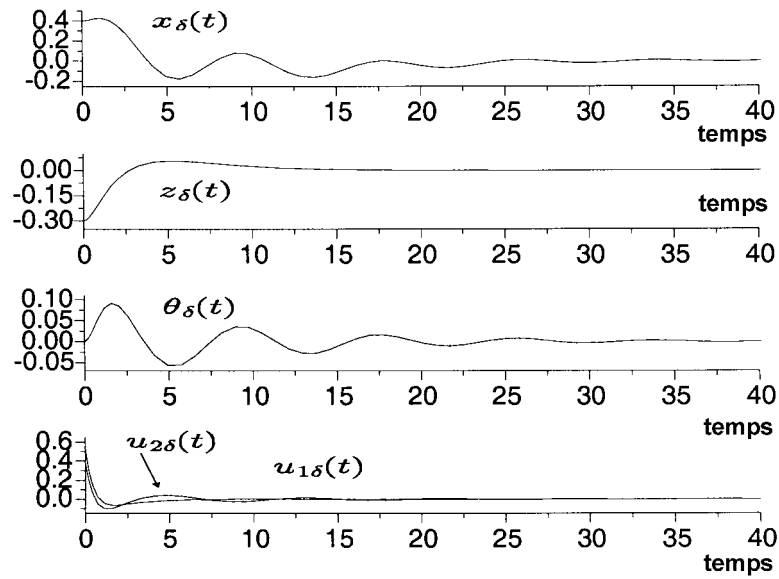


FIGURE 9. Performance de la commande par GPI lorsque le paramètre  $\epsilon$  est augmenté de 350 %.

- [7] M. Fliess, Une interprétation algébrique de la transformation de Laplace et des matrices de transfert. *Linear Alg. Appl.* **203-204** (1994) 429-442.
- [8] M. Fliess, Sur des penseurs nouveaux faisons des vers anciens, dans *Actes Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA'2000)*, édité par P. Borne, J.-P. Richard et Ph. Vanheeghe. Lille (2000) 26-36.
- [9] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin et P. Rouchon, Flatness and defect of non-linear systems: Introductory theory and examples. *Internat. J. Control* **61** (1995) 1327-1361.

- [10] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin et P. Rouchon, A Lie–Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Control.* **44** (1999) 922-937.
- [11] M. Fliess et R. Marquez, Continuous-time linear predictive control and flatness: A module-theoretic setting with examples. *Internat. J. Control* **73** (2000) 606-623.
- [12] M. Fliess, R. Marquez et E. Delaleau, State feedbacks without asymptotic observers and generalized PID regulators, dans *Nonlinear Control in the Year 2000*, édité par A. Isidori, F. Lamnabhi–Lagarrigue et W. Respondek. Springer, *Lecture Notes in Control Inform. Sci.* **258** (2000) 367-384.
- [13] M. Fliess, R. Marquez et H. Mounier, PID-like regulators for a class of linear delay systems, dans *Proc. 6<sup>th</sup> Europ. Control Conf.* Porto (2001).
- [14] M. Fliess, R. Marquez et H. Mounier, An extension of predictive control, PID regulators and Smith predictors to some linear delay systems. *Internat. J. Control* (à paraître).
- [15] M. Fliess et H. Mounier, Controllability and observability of linear delay systems: An algebraic approach. *ESAIM: COCV* **3** (1998) 301-314.
- [16] G.F. Franklin, J.D. Powell et A. Emami, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 3<sup>rd</sup> Ed. Addison Wesley (1994).
- [17] N. Jacobson, *Basic Algebra I & II*. Freeman (1974 & 1980).
- [18] T. Kailath, *Linear Systems*. Prentice-Hall (1980).
- [19] P. de Larminat, *Contrôle d'état standard*. Hermès (2000).
- [20] R. Marquez, À propos de quelques méthodes classiques de commande linéaire : commande prédictive, correcteurs proportionnels-intégraux généralisés, prédicteurs de Smith. *Thèse*, Université Paris-Sud, Orsay (2001).
- [21] R. Marquez, E. Delaleau et M. Fliess, Commande par PID généralisé d'un moteur électrique sans capteur mécanique, dans *Actes Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA'2000)*, édité par P. Borne, J.-P. Richard et Ph. Van-heeghe. Lille (2000) 453-458.
- [22] P. Martin, S. Devasia et B. Paden, A different look at output tracking: Control of a VTOL aircraft. *Automatica* **32** (1996) 101-107.
- [23] J. Mikusiński, *Operational Calculus*, 2<sup>nd</sup> Ed., Vol. 1. PWN & Oxford University Press (1983).
- [24] J. Mikusiński et T.K. Boehme, *Operational Calculus*, 2<sup>nd</sup> Ed., Vol. 2. PWN & Oxford University Press (1987).
- [25] L. Pernebo, An algebraic theory for the design of controllers for linear multivariable systems—Part I: Structure matrices and feedforward design. *IEEE Trans. Automat. Control* **26** (1981) 171-181.
- [26] L. Pernebo, An algebraic theory for the design of controllers for linear multivariable systems—Part II: Feedback realizations and feedback design. *IEEE Trans. Automat. Control* **26** (1981) 182-194.
- [27] B. van der Pol et H. Bremmer, *Operational Calculus Based on the Two-Sided Laplace Integral*, 2<sup>nd</sup> Ed. Cambridge University Press (1955).
- [28] N. Singer, W. Singhose et W. Seering, Comparison of filtering methods for reducing residual vibrations. *Eur. J. Control* **5** (1999) 208-218.
- [29] H. Sira–Ramírez, R. Marquez et M. Fliess, On the generalized PID control of linear dynamic systems, dans *Proc. 6<sup>th</sup> Europ. Control Conf.* Porto (2001).
- [30] H. Sira–Ramírez, R. Marquez et M. Fliess, Generalized PID sliding mode control of DC-to-DC power converters, dans *Proc. IFAC Conf. Syst. Struct. Control*. Prague (2001).
- [31] H. Sira–Ramírez, R. Marquez et V.M. Hernández, Sliding mode control without state measurements, dans *Proc. 6<sup>th</sup> Europ. Control Conf.* Porto (2001).
- [32] H. Sira–Ramírez et G. Silva–Navarro, Generalized PID control of the average boost converter circuit model, dans *Proc. Nonlinear Control Network Workshop*. Sheffield (2001).
- [33] J.J.E. Slotine et W. Li, *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall (1991).
- [34] S. Spurgeon et C. Edwards, *Sliding Mode Control: Theory and Practice*. Taylor and Francis (1998).
- [35] K.E. Tan, Q.-G. Wang, T.H. Lee et T.J. Häggglund, *Advances in PID Control*. Springer (1999).
- [36] W.A. Wolovich, *Automatic Control Systems: Basic Analysis and Design*. Holt Rinehart and Winston (1994).
- [37] K. Yosida, *Operational Calculus*. Springer (1984).