RAIRO Operations Research
RAIRO Oper. Res. **41** (2007) 125–139
DOI: 10.1051/ro:2007019

DOUBLE PONDÉRATION POUR CALCULER UNE MOYENNE : POURQUOI ET COMMENT ? *

Bernard Roy[1]

Abstract. Double weighting for calculating an average: Why and how? The weighted average operator is often used to assign a value $v(a)$ to entities a from performances $x_j(a)$, j=1,...,n. This operator makes intervene specific weights w_j as multipliers of the performance relative to the jth component. This induces possibilities of compensation of the worst performances by the better ones. Such compensation can be judged as unacceptable in some concrete contexts. So as to soften these possibilities of compensation, we can make intervene a second weighting using weights of rank q_r. The new weights modify the role which plays, in the definition of $v(a)$, the performance $x_j(a)$ according to rank r it has in a ranking from the best values to the worst ones. I will start by describing three examples coming from real contexts in which this double weighting is useful. Then, I will successively present a first operation I have introduced in 1990, namely "moyenne ordonnée doublement pondérée (MO2P)", and a second one proposed in 1997 by Torra, namely "weighted ordered weighted average (WOWA)". These two operators being significant only if the performances $x_j(a)$ are situated on a same interval scale E, I will end by suggesting a new type of operator likely to be suitable when E is a purely ordinal scale.

Résumé. L'opérateur de moyenne pondérée est très souvent utilisé pour définir une valeur $v(a)$ à des entités a à partir de performances $x_j(a)$, $j = 1, ..., n$. Cet opérateur fait intervenir des **poids spécifiques** w_j comme multiplicateurs de la performance relative à la j^{e} composante. Ceci induit des possibilités de compensation des mauvaises performances par les meilleures qui peuvent être jugées inacceptables dans certains contextes concrets. En vue d'atténuer ces possibilités de compensation, on peut faire intervenir une seconde pondération à l'aide de **poids de rang** q_r qui affectent le rôle que joue, dans la définition de $v(a)$, la performance $x_j(a)$ en fonction du rang r qu'elle occupe dans un rangement des meilleures valeurs aux moins bonnes. Je commencerai par décrire trois exemples issus de contextes réels dans lesquels

Reçu le 10 octobre 2005. Accepté le 25 janvier 2006.

* *Communication présentée à ROADEF'2005, 6e congrés de la Société Française de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision, Tours, France, 14–16 février 2005.*

[1] Professeur émérite à l'Université Paris-Dauphine ; roy@lamsade.dauphine.fr

cette double pondération est nécessaire. Ensuite, je présenterai successivement un premier opérateur que j'ai introduit en 1996 sous le nom de **moyenne ordonnée doublement pondérée (MO2P)** et un second, proposé en 1997 par Torra [9] "weighted ordered weighted average" (WOWA). Ces deux opérateurs n'étant signifiants que si les performances $x_j(a)$ se situent sur une même échelle d'intervalle E, je terminerai en proposant un autre type d'opérateur pouvant convenir lorsque E est une échelle purement ordinale.

Mots Clés. Moyenne pondérée, poids de rangs, intégrale de Choquet, Weighted ordered weighted average (WOWA), agrégation multicritère.

Classification Mathématique. 9008.

1. Introduction

Considérons des objets, des événements, des individus, des actions,... que je désignerai sous le terme général d'*entités*. À chaque entité a sont associées n performances $x_1(a)$,..., $x_j(a)$,..., $x_n(a)$. On suppose que les $x_j(a)$ sont des éléments d'une même *échelle d'intervalle* $E \subset R$.

Dans ces conditions, pour associer une valeur $v(a)$ à chaque entité, il est fréquent d'utiliser l'opérateur classique de moyenne pondérée :

$$v(a) = \sum_{j=1}^{n} w_j x_j(a) \tag{1}$$

En outre, il n'est pas restrictif de poser :

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \text{ pour avoir } v(a) \in E \tag{2}$$

E étant une échelle d'intervalle, l'opérateur de moyenne est signifiant (*cf.* [1]). J'ai cependant été confronté à plusieurs cas concrets dans lesquels les formules (1) et (2) ne pouvaient convenir pour attribuer une valeur $v(a)$ à chaque entité. Cette inadéquation provenait des possibilités de compensation des plus mauvaises valeurs par les meilleures rendues possibles par l'opérateur de moyenne pondérée. Pour bien faire comprendre les difficultés ainsi rencontrées, je présenterai (Sect. 2) trois des exemples dans lesquels j'ai dû faire face à ces difficultés. Le premier de ces exemples (*cf.* [2]) m'a conduit à proposer un opérateur que j'ai appelé **moyenne ordonnée doublement pondérée (MO2P)** (*cf.* [5]), opérateur qui permet de prendre en compte des poids spécifiques w_j en même temps que des poids de rang q_r comme l'a fait Yager [13] avec l'opérateur ordered weighted average (OWA).

Après MO2P (Sect. 3), je présenterai (Sect. 4) une autre généralisation de OWA : Weighted Ordered Weighted Average (WOWA) proposée par Torra en 1997 [9]. Sans pousser très loin la comparaison, je montrerai en quoi MO2P diffère de WOWA. Ces deux opérateurs n'étant signifiants que si E est une échelle d'intervalle, je proposerai (Sect. 5), avant de conclure, des opérateurs susceptibles d'être utilisés avec une double pondération lorsque E est une échelle purement ordinale.

2. Trois exemples

2.1. Exemple 1

a est une partition d'un territoire en n[1] zones ; $x_j(a)$ est une performance affectée à la j^{e} zone selon un critère défini. À chaque zone, on associe un poids spécifique w_j qui peut refléter sa surface, sa population,... Soit a et b deux zonages tels que la formule (1) conduise à $v(a) \approx v(b)$, bien que $x_j(a)$ peu variable avec j et $x_j(b)$ fortement variable avec j. On ne peut accepter que ces deux zonages soient considérés comme équivalents sous prétexte que des zones ayant une bonne performance viennent compenser celles qui en ont une plus mauvaise (*cf.* [3]).

2.2. Exemple 2

a se rapporte à une suite temporelle de n périodes ; $x_j(a)$ est le nombre d'occurrences d'un certain événement durant la j^{e} période (la période la plus ancienne correspond à $j = 1$). À partir de ces observations, on souhaite définir un intervalle $[v'(a), v''(a)]$ destiné à servir de norme pour situer le nombre des occurrences de l'événement considéré à la période $n+1$. Pour définir les opérateurs v' et v'', deux exigences doivent être prises en compte :

(a) $\min_j x_j(a) \leq v'(a) \leq v''(a) \leq \max_j x_j(a)$.

Ces trois inégalités doivent être strictes dès l'instant où les $x_j(a)$ ne sont pas tous égaux et la différence $v''(a) - v'(a)$ doit être d'autant plus grande que les $x_j(a)$ sont plus dispersés.

(b) Les observations anciennes doivent "peser moins lourd" que les plus récentes (w_j croissant avec j), aussi bien pour définir $v'(a)$ que $v''(a)$.

(*cf.* [8]).

2.3. Exemple 3

a est un individu dont on cherche à rendre compte de sa satisfaction $v(a)$ vis-à-vis d'un certain service ; pour cela, on admet que cette satisfaction, dite globale, est déterminée par des satisfactions dites partielles $x_j(a)$ relatives à n composantes. On suppose en outre que ces composantes peuvent avoir des poids spécifiques w_j. Enfin, on a de bonnes raisons de croire qu'un possible effet d'écran intervienne dans la façon dont les satisfactions partielles $x_j(a)$ conditionnent la satisfaction globale $v(a)$. Cet effet d'écran peut être défini comme suit :

Il y a effet d'écran *dégradant*[2] lorsque certaines des **plus mauvaises** appréciations de satisfactions partielles influencent la satisfaction globale non seulement en fonction des valeurs que l'individu leur donne indépendamment des autres mais

[1] Ici, n peut varier avec l'entité a considérée.

[2] Dans d'autres contextes, on peut être intéressé par un effet d'écran *améliorant* consistant à inverser le rôle joué par les plus mauvaises et les meilleures appréciations.

aussi du fait qu'elles sont les plus mauvaises : elles masquent pour une part l'effet positif que peuvent avoir les autres appréciations de satisfactions partielles, dégradant ainsi l'impact compensatoire que peuvent avoir les appréciations **les meilleures** dans le mode de détermination de la satisfaction globale (*cf.* [4]).

L'opérateur MO2P que je présente ci-après a été utilisé dans les deux premiers contextes ci-dessus et il est envisagé de l'utiliser dans le troisième.

3. Moyenne ordonnée doublement pondérée (MO2P)

3.1. Notations

x_j	note attribuée à la j^{e} composante du vecteur-performances $\underline{x} = (x_1, ..., x_n)$.
$x_{(r)}$	note occupant le rang r dans un rangement des notes par valeurs décroissantes : $x_{(r)} \geq x_{(r+1)}$.
$q_r \geq 0$	poids des rangs affectés à $x_{(r)}$.
$w_j > 0$, $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$	poids spécifique de la composante j ; $\underline{W} = (w_1, ..., w_n)$.

3.2. Définition 1

L'opérateur MO2P associe, à tout vecteur $\underline{x} \in E^n$, l'élément $v(\underline{x} \in E)$ défini par :

$$v(\underline{x}) = \frac{1}{Q(\tilde{w})} \sum_{r=1}^{n} q_r w_{(r)} x_{(r)}. \tag{3}$$

$w_{(r)}$: poids spécifique de la composante qui occupe le rang r.
$\tilde{w} = (w_{(1)}, ..., w_{(r)}, ..., w_{(n)})$.
$Q(\tilde{w}) = \sum_{r=1}^{n} q_r w_{(r)}$.
Si des égalités sont présentes dans le rangement des notes :

$$x_{(r-1)} > x_{(r)} = ... = x_{(r+k-1)} > x_{(r+k)}$$

alors chacune des k notes égales doit être affectée du même poids $q_{r,k}$, ce poids étant la moyenne arithmétique des k poids de rang concerné :

$$q_{r,k} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} q_{r+i-1}$$

Remarque. $Q(\tilde{w})$ est la moyenne pondérée des q_r par les $w_{(r)}$.

L'opérateur MO2P peut également être défini par :

$$v(\underline{x}) = \frac{1}{Q(\tilde{w})} \sum_{r=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{r} q_i w_{(i)} \right] \left(x_{(r)} - x_{(r+1)} \right) \tag{4}$$

avec $x_{(n+1)} = 0$ et même règle que ci-dessus dans le cas de séquences de k notes égales.

3.3. Propriétés

L'opérateur MO2P v possède les propriétés suivantes :

(1) L'opérateur v est une généralisation de l'opérateur y moyenne ordonnée pondérée (OWA)[3] :
Si $w_1 = ... = w_n = \frac{1}{n}$, alors $v(\underline{x}) = y(\underline{x})$.

(2) Si $q_1 = ... = q_n = q$, alors $v(\underline{x}) = m(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{n} w_j x_j$.

(3) $\max_j x_j \geq v(\underline{x}) \geq \min_j x_j$.
$v = \max$ si $q_1 \neq 0$, $q_2 = ... = q_n = 0$.
$v = \min$ si $q_1 = ... = q_{n-1} = 0, q_n \neq 0$.

(4) Si $q_1 \geq ... \geq q_n$, alors $v(\underline{x}) \geq m(\underline{x})$.
Si $q_1 \leq ... \leq q_n$, alors $v(\underline{x}) \leq m(\underline{x})$.

(5) Si $w_{(1)} \geq ... \geq w_{(n)}$, alors $v(\underline{x}) \geq y(\underline{x})$.
Si $w_{(1)} \leq ... \leq w_{(n)}$, alors $v(\underline{x}) \leq y(\underline{x})$.

(6) Si les n composantes de $\underline{x}$ ont les mêmes valeurs x, alors $v(\underline{x}) = x$.

(7) Si l'on fait subir à l'échelle d'intervalle E la transformation linéaire positive : $y = \alpha x + \beta (\alpha > 0)$, alors $v(\underline{y}) = \alpha v(\underline{x}) + \beta$.

La preuve des quatre premières propriétés et des deux dernières est extrêmement simple. Je me contenterai donc ici de démontrer la cinquième relativement au cas où $w_{(r)} \geq w_{(r+1)}$, $r = 1, ..., n-1$. Il n'est pas restrictif de supposer, pour cette démonstration, que $\sum_{r=1}^{n} q_r = 1$.

Lemme : $\dfrac{q_1 w_{(1)} + ... + q_r w_{(r)}}{Q(\tilde{w})} \geq q_1 + ... + q_r$, $r = 1, ..., n$.

L'inégalité ci-dessus est vraie si et seulement si :

$$\frac{q_1 w_{(1)} + ... + q_r w_{(r)}}{q_1 + ... + q_r} \geq Q(\tilde{w}).$$

Retranchons, à chacun des deux membres de cette nouvelle inégalité, la quantité $q_1 w_{(1)} + ... + q_r w_{(r)}$. Elle devient :

$$\left[q_1 w_{(1)} + ... + q_r w_{(r)}\right] \frac{q_{r+1} + ... + q_n}{q_1 + ... + q_r} \geq q_{r+1} w_{(r+1)} + ... + q_n w_{(n)}.$$

Cette dernière inégalité est vraie car, d'après l'hypothèse de monotonie des $w_{(r)}$, on a :

$$\frac{q_1 w_{(1)} + ... + q_r w_{(r)}}{q_1 + ... + q_r} (q_{r+1} + ... + q_n) \geq w_{(r+1)} (q_{r+1} + ... + q_n) \geq q_{r+1} w_{(r+1)} + ... + q_n w_{(n)},$$

[3] Le lecteur trouvera, à la fin de la Section 4.2, un rappel des deux définitions équivalentes classiques de l'opérateur y (OWA).

ce qui achève la preuve du lemme. De ce lemme, on déduit que les différences strictement positives $x_{(r)} - x_{(r+1)}$ sont, pour tout r, affectées d'un coefficient qui, dans MO2P, a une valeur au moins égale à celle qu'il a dans OWA.

4. Weighted Ordered Weighted Average (WOWA)

4.1. Notations

Je n'utiliserai pas, pour définir cet opérateur introduit par Torra [9], les notations qui étaient les siennes car, afin de faciliter la comparaison avec MO2P, je préfère conserver celles introduites au 3.1. Elles s'avèrent en effet parfaitement adaptées ; il est seulement nécessaire de normer les poids de rang en posant : $\sum_{r=1}^{n} q_r = 1$.

4.2. Définition 2

L'opérateur WOWA associe, à tout vecteur $\underline{x} \in E^n$, l'élément $z(\underline{x}) \in E$ défini par :

$$z(\underline{x}) = \sum_{r=1}^{n} \omega_r x_{(r)} \text{ avec } \omega_r = Q^* \left[\sum_{i=1}^{r} w_{(i)} \right] - Q^* \left[\sum_{i=1}^{r-1} w_{(i)} \right]. \tag{5}$$

$w_{(i)}$ poids spécifique de la composante qui occupe le rang i.

$Q^*(W)$ fonction monotone non décroissante qui interpole les points (0,0), $(\frac{1}{n}, \sum_{k=1}^{i} q_k)$, $i = 1, ..., n$, l'interpolation devant être une droite lorsque ces points peuvent être interpolés de cette façon.

Remarque. Quelle que soit la définition retenue pour $Q^*(W) : \sum_{i=1}^{n} \omega_r = 1$.

L'opérateur WOWA peut également être défini par :

$$z(\underline{x}) = \sum_{r=1}^{n} Q^* \left[\sum_{i=1}^{r} w_{(i)} \right] (x_{(r)} - x_{(r+1)}) \text{ avec } x_{(n+1)} = 0. \tag{6}$$

Dans le cas particulier où $w_i = \frac{1}{n}$, $i = 1, ..., n$, on a, quelle que soit la définition choisie pour $Q^*(W)$:

$$Q^* \left[\sum_{i=1}^{r} w_{(i)} \right] = q_1 + ... + q_r \text{ et } \omega_r = q_r,$$

ce qui montre que les deux définitions données ci-dessus de l'opérateur z (WOWA) se confondent avec celles de l'opérateur y (OWA).

Ici encore, il est possible de prouver (*cf.* [9]) que les cinq propriétés vérifiées par MO2P (*cf.* 3.3) le sont aussi par WOWA.

4.3. Comparaison de WOWA avec MO2P

Le rapprochement des formules (4) et (6) met clairement en évidence le fait que les différences $x_{(r)} - x_{(r+1)}$ sont généralement pondérées différemment dans MO2P et dans WOWA. Pour que ces deux pondérations soient égales avec les deux jeux de poids choisis et quel que soit l'ordre des composantes, il suffit que les n égalités suivantes soient vérifiées :

$$\frac{1}{Q(\tilde{w})} \sum_{i=1}^{r} q_i w_{(i)} = Q^* \sum_{i=1}^{r} w_{(i)}, r = 1, ..., n \tag{7}$$

Il est facile de vérifier que, sauf dans certains cas particuliers, il n'existe pas de fonctions $Q^*(W)$ qui garantissent ces égalités. Elles mettent en évidence une première différence entre MO2P et WOWA. Le membre de droite des égalités (7) est invariant lorsque l'on modifie les poids relatifs $w_{(i)}$ des critères concernés dès l'instant où leur somme reste invariante. Il en va tout autrement avec le membre de gauche. Lorsque la valeur de cette somme se situe dans l'intervalle $[\frac{k}{n+1}, \frac{k}{n}]$, le choix de la fonction Q^* offre la possibilité de faire varier la valeur de ce membre de droite dans l'intervalle $[\sum_{r=1}^{k} q_r, \sum_{r=1}^{k+1} q_r]$.

L'opérateur OWA a été introduit par Yager [13, 14] en relation avec la théorie des sous-ensembles flous. Tout comme OWA, WOWA peut être vu comme une intégrale de Choquet[4] (*cf.* [10]). C'est en relation avec ce cadre théorique que Torra [11, 12] traite de diverses questions ayant trait à la forme de la fonction $Q^*(W)$.

Dans des contextes concrets du type de ceux évoqués en section 2, je ne perçois pas en quoi ces liens sont susceptibles d'éclairer le choix de la forme de cette fonction $Q^*(W)$ qu'il convient d'adopter. Ce choix n'est pas sans influencer significativement la valeur de $z(\underline{x})$ lorsque les poids spécifiques w_j sont nettement différenciés. Cette influence me paraît être assez opaque ; même dans des cas simples, elle n'est pas intuitivement perceptible comme le montre l'exemple 1 (*cf.* annexe) avec seulement trois critères. Pour rendre compte du rôle respectif que l'on veut faire jouer aux performances minimales, maximales et centrales, il n'est pas possible, comme le montre cet exemple, de raisonner les valeurs à attribuer aux poids de rangs indépendamment de la forme qui sera donnée à la fonction $Q^*(W)$.

Dans bien des cas (*cf.* exemples Sect. 2), les poids de rangs sont introduits pour prendre en compte le fait que les performances x_j doivent contribuer aux résultats de l'agrégation, non seulement en fonction de leurs valeurs et du poids spécifique w_j mais aussi en fonction de la façon dont elles se comparent les unes aux autres. Lorsqu'il en est ainsi, il est important de pouvoir raisonner, de façon aussi simple que possible, la valeur qu'il convient d'attribuer aux poids de rangs q_r pour rendre compte, le plus fidèlement possible, du rôle respectif que l'on veut faire jouer aux

[4]En revanche, MO2P n'est apparemment pas une intégrale de Choquet car, dans la formule (4), le coefficient de $(x_{(r)} - x_{(r+1)})$ ne dépend pas que des seules composantes dont le rang de $\underline{x}$ est au plus égal à r : la façon dont se rangent les autres composantes intervient en effet dans $Q(\tilde{w})$.

valeurs les plus faibles, les plus fortes ou les plus centrales. Même si cela peut ne pas être très simple, ce genre de raisonnement me paraît être plus facile à conduire avec l'opérateur d'agrégation MO2P[5] qu'avec WOWA (voir notamment Ex. 2 dans l'annexe). Ce raisonnement peut en particulier être conduit en prenant appui sur le fait que $v(\underline{x})$ est tout simplement une somme pondérée des performances $x_{(r)}$ par les poids $\frac{q_r w_{(r)}}{Q(\tilde{w})}$. Les poids qui jouent le même rôle dans WOWA (*cf.* formule (5)) sont, pour moi, d'une interprétation beaucoup plus opaque.

Plus généralement, le rôle respectif que jouent les poids de rangs q_r et les poids spécifiques w_j pour déterminer la valeur que prend $z(\underline{x})$ me paraît être difficilement intelligible. La façon dont cette valeur est affectée lorsque l'une des composantes x_j varie légèrement s'interprète concrètement de façon compliquée. Considérons en effet $\underline{y}$ déduit de $\underline{x}$ en posant :

$$y_i = x_i, \forall i \neq j \text{ et } y_j = x_j + \delta$$

δ étant choisi de telle sorte que x_j et y_j occupent le même rang r que je note $r(j)$. D'après la formule (5) :

$$z(\underline{y}) - z(\underline{x}) = \left[Q^* \sum_{i=1}^{r(j)} w_{(i)} - Q^* \sum_{i=1}^{r(j)-1} w_{(i)} \right] \times \delta.$$

Dans ces conditions, il n'est pas aisé de comprendre ce qu'est l'impact, sur cette variation de z, d'une modification de l'un quelconque des poids q_r ou w_j au dépend des autres. Avec MO2P, tous ces liens me paraissent être plus clairement perceptibles et concrètement explicables. En effet, dans les mêmes conditions, on a (*cf.* formule (3)) :

$$v(y) - v(x) = \frac{q_{r(j)} w_j}{Q(\tilde{w})} \delta.$$

L'exemple 3 de l'annexe met en évidence d'autres points de comparaison entre MO2P et WOWA. Ceux-ci méritent d'être étudiés de plus près afin de mieux appréhender les avantages et inconvénients de ces deux opérateurs d'agrégation.

---

[5]Faisons observer que, dans MO2P, le rôle que joue, dans l'agrégation, la composante j fait intervenir le produit de son poids spécifique w_j par le poids q_r associé au rang r qu'elle occupe. Ce rang, tout comme son poids, ne dépendent pas de j : le poids q_r est introduit en vue de renforcer ou d'affaiblir le rôle du poids spécifique de la composante qui occupe le rang r. Ce sont les produits $q_r w_j$ qui gèrent ce type de modification. Pour les prendre en compte de façon plus générale, on peut songer à l'opérateur suivant :

$$\hat{v}(\underline{x}) = \frac{1}{Q(\tilde{w})} \sum_{r=1}^{n} q_{rj} x(r), \; Q(\tilde{w}) = \sum_{r=1}^{n} q_{rj}$$

où q_{rj} est un coefficient introduit pour gérer le rôle que joue, dans l'agrégation, la composante j lorsqu'elle occupe le rang r. Cet opérateur nécessite d'introduire, pour être défini, la place des n poids de rang et n poids spécifiques, n^2 coefficients combinant l'effet de rang et l'effet spécifique de la nature de la composante qui occupe ce rang.

5. Autres possibilités

Les deux opérateurs MO2P et WOWA ne sont signifiants (*cf.* [1]) que si E est une échelle d'intervalle. Parallèlement à MO2P, j'ai envisagé, en 1996 (mais sans véritablement l'étudier ni l'expérimenter), une famille d'opérateurs aptes à prendre en compte conjointement des poids de rangs q_r et des poids spécifiques w_j tout en étant signifiants sur une échelle E purement ordinale. Cette famille d'opérateurs, que je propose de désigner sous le nom de *quantiles d'une séquence doublement pondérée* (QS2P), peut être utilisée pour définir des indicateurs ou des critères destinés à mettre en évidence une valeur plutôt centrale ou plutôt extrême. Elle peut aussi être utilisée pour bâtir des indicateurs de dispersion si E est une échelle d'intervalle au sens faible (*cf.* [1]).

Avec les mêmes notations et après multiplication des poids spécifiques et des poids de rang par un entier quelconque suffisamment grand pour que tous ces poids aient une valeur entière, on peut construire la séquence $S(\underline{x})$ formée successivement par :

$$\begin{gathered} x_{(1)} \text{ répété } q_1 w_{(1)} \text{ fois} \\ \dots \\ x_{(r)} \text{ répété } q_r w_{(r)} \text{ fois} \\ \dots \\ x_{(n)} \text{ répété } q_n w_{(n)} \text{ fois} \end{gathered}$$

Pour répondre au problème posé lorsque E est une échelle purement ordinale, on peut adopter :

(1) la valeur qui correspond à un quantile fixé (par exemple la médiane, le premier quartile, le quarantième percentile,...) dans la séquence $S(\underline{x})$, cela dans le cas où il s'agit de déterminer une unique valeur comme dans les exemples 1 et 3 de la section 2 ;

(2) les valeurs qui correspondent à deux quantiles fixés (par exemple premier et troisième quartiles) dans la séquence $S(\underline{x})$, cela dans le cas où il s'agit de déterminer un intervalle comme dans l'exemple 2 de la section 2.

Remarque. La valeur correspondant à un quantile quelconque de la séquence $S(\underline{x})$ est indépendante des entiers choisis pour que les poids spécifiques et de rang prennent des valeurs entières.

6. Conclusion

Il est fort possible que d'autres opérateurs aient été proposés dans la littérature afin de répondre au même objectif, aussi bien dans le cas d'échelles d'intervalle que dans le cas d'échelle purement ordinales. Je voudrais souligner ici que l'objectif visé n'est pas de prendre en compte d'éventuelles interactions positives et/ou négatives entre critères comme on peut notamment le faire avec l'intervalle de Choquet ou l'intégrale de Sugeno ; il s'agit de prendre en compte, dans l'opérateur d'agrégation, d'une part l'existence d'un poids spécifique de chacune des composantes j et, d'autre part, le fait que les notes x_j qui sont les plus faibles, les plus élevées ou, au

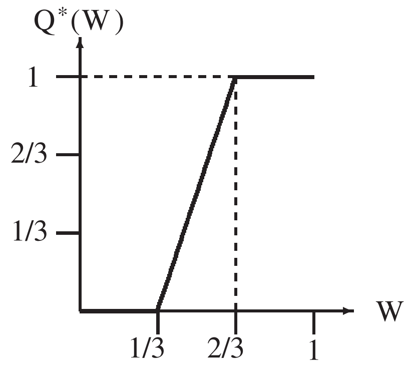

Figure 1

contraire, les plus centrales peuvent, du fait qu'elles reflètent les meilleures, les pires ou les plus intermédiaires des performances, jouer un rôle particulier pour fixer le résultat de l'agrégation. C'est dans cette optique que je voudrais maintenant :

(1) étudier plus en profondeur les propriétés des opérateurs dont il a été question ainsi que de ceux qui peuvent avoir été proposés ailleurs ;
(2) examiner comment attribuer des valeurs aux poids de rang afin que ceux-ci jouent réellement le rôle qu'on veut leur voir jouer, cela dans l'hypothèse où la valeur des poids spécifiques découle de considérations propres à la nature de chacune des composantes et doivent par conséquent pouvoir être fixées indépendamment des précédentes ;
(3) chercher des procédures permettant de déterminer aussi bien les valeurs des poids spécifiques que celles des poids de rang en vue de rendre compte au mieux de résultats d'agrégation observés ou déclarés (que ces derniers soient numériques ou seulement ordinaux).

Ces questions vont notamment être abordées dans le cadre d'un mémoire de DEA.

Annexe : Exemples

Exemple 1

On considère ici trois critères avec les jeux de poids suivants :

$$w_1 = 0.1,\ w_2 = 0.3,\ w_3 = 0.6,$$
$$q_1 = 0,\ q_2 = 1,\ q_3 = 0.$$

Parmi toutes les formes possibles de la fonction $Q^*(W)$, on en a choisi trois (*cf.* Figs. 1, 2 et 3).
Dans le cas de la figure 1, on a :

$$z(\underline{x}) = x_{(2)} \text{ seulement si } x_{(2)} = x_3.$$

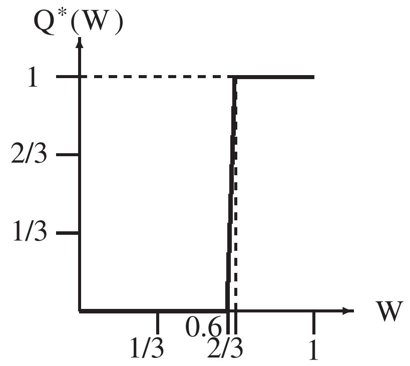

FIGURE 2

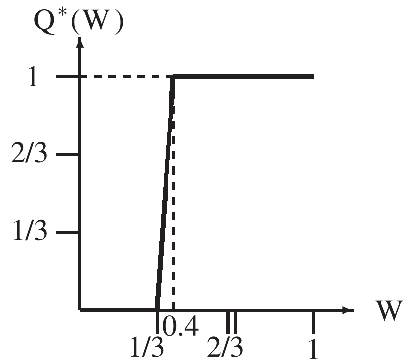

FIGURE 3

Sinon, $z(\underline{x}) = 0.8x_{(3)} + 0.2x_{(2)}$.
Dans le cas de la figure 2, on a :

$$z(\underline{x}) = x_{(2)}.$$

Dans le cas de la figure 3, on a :

$$z(\underline{x}) = x_{(2)} \text{ si } x_3 \neq x_{(1)}.$$

Sinon, $z(\underline{x}) = x_{(1)} = x_3$.

Remarque. Avec MO2P, on a $v(\underline{x}) = x_{(2)}$.

EXEMPLE 2

Toujours avec trois critères, on cherche à bâtir un indicateur dans lequel la valeur centrale joue un rôle deux fois plus important que les deux autres valeurs qui l'encadrent, lesquelles doivent jouer le même rôle. Ceci incite à poser :

$$q_1 = 1/4,\ q_2 = 1/2,\ q_3 = 1/4.$$

Dans ces conditions, le terme $Q(\tilde{w})$ de MO2P s'écrit, dans le cas où les trois valeurs de $\underline{x}$ sont distinctes :

$$Q(\tilde{w}) = \frac{1}{4}w_{(1)} + \frac{2}{4}w_{(2)} + \frac{1}{4}w_{(3)} = \frac{1}{4}(1 + w_{(2)}).$$

On a dans ces conditions :

$$v(\underline{x}) = \frac{w_{(1)}}{1 + w_{(2)}}x_{(1)} + \frac{w_{(2)}}{1 + w_{(2)}}2x_{(2)} + \frac{w_{(3)}}{1 + w_{(2)}}x_{(3)}.$$

Dans le cas où $x_{(r)} = x_{(r+1)} = x_=$, on a :

$$Q(\tilde{w}) = \frac{1}{4}(1 + \frac{w_{(r)} + w_{(r+1)}}{2}) = \frac{1}{4}(1 + w_=)$$

avec $w_= = \frac{w_{(r)}+w_{(r+1)}}{2}$. En notant $x_{\neq}$ la performance différente des deux autres (laquelle correspond nécessairement soit au minimum, soit au maximum), on a :

$$v(\underline{x}) = \frac{w_{(\neq)}}{1 + w_{(=)}}x_{\neq} + \frac{w_{(=)}}{1 + w_{(=)}}3x_{(=)}.$$

Enfin, dans le cas où les trois performances sont égales à x, on a :

$$v(\underline{x}) = x.$$

Avec l'indicateur v ainsi défini, on peut vérifier si, oui ou non, la pondération de rang adoptée répond à l'objectif fixé et interpréter de façon plus précise la façon dont la valeur $v(\underline{x})$ est conditionnée par les poids spécifiques des performances centrales et extrêmes. Cette vérification et cette interprétation paraissent être beaucoup plus difficiles avec un indicateur WOWA faisant intervenir les mêmes poids de rang. Celui-ci s'écrit en effet :

$$z(\underline{x}) = Q^*(w_{(1)}x_{(1)}) + [Q^*(w_{(1)} + w_{(2)}) - Q^*(w_{(1)})]x_{(2)} + [1 - Q^*(w_{(1)} + w_{(2)})]x_{(3)},$$

la fonction $Q^*(W)$ devant être monotone et non décroissante et vérifier :

$$Q^*(0) = 0,\ Q^*(1/3) = 1/4,\ Q^*(2/3) = 3/4,\ Q^*(1) = 1.$$

Même en adoptant une forme linéaire par morceaux (comme dans l'exemple 1), les poids respectifs dont se trouve affectée la performance centrale et les performances extrêmes ne semblent pas pouvoir être clairement mis en évidence comme cela vient d'être fait avec MO2P.

EXEMPLE 3

Considérons à nouveau le problème qui consiste à bâtir un indicateur dans le cas de trois critères auxquels les poids spécifiques suivants ont été attribués :

$$w_1 = 0.4,\ w_2 = w_3 = 0.3.$$

Supposons que, en vue de faire jouer, aux deux des trois performances les plus élevées, un rôle prépondérant vis-à-vis de la troisième, on envisage les poids de rang suivants :

$$q_1 = q_2 = 0.4,\ q_3 = 0.2.$$

Supposons enfin que, pour utiliser l'opérateur WOWA, on envisage d'adopter une forme linéaire par morceaux pour définir la fonction $Q^*(W)$, ce qui conduit à poser :

$$Q^*(W) = 1.2W \text{ si } W \leq 2/3 \text{ et } Q^*(W) = 0.6W + 0.4 \text{ si } W \geq 2/3.$$

Il nous paraît intéressant de comparer les valeurs qui seront attribuées par l'indicateur selon que celui-ci est défini par l'opérateur WOWA ou par l'opérateur MO2P. Le lecteur vérifiera aisément que l'on parvient aux résultats suivants :

1[er] cas $x_1 = x_{(3)}$.

$z(\underline{x}) = 0.36x_{(1)} + 0.36x_{(2)} + 0.28x_1$.

$v(\underline{x}) = 0.375x_{(1)} + 0.375x_{(2)} + 0.25x_1$ avec $x_{(2)} > x_1$ et

$v(\underline{x}) = \frac{4}{11}x_{(1)} + \frac{7}{11}x_1$ avec $x_1 = x_{(2)} = x_{(3)}$.

2[e] cas $x_1 = x_{(2)}$.

$z(\underline{x}) = 0.36x_{(1)} + 0.46x_1 + 0.18x_{(3)}$.

$v(\underline{x}) = \frac{6}{17}x_{(1)} + \frac{8}{17}x_1 + \frac{3}{17}x_{(3)}$ avec $x_1 > x_{(3)}$.

3[e] cas $x_1 = x_{(1)}$.

$z(\underline{x}) = 0.48x_1 + 0.34x_{(2)} + 0.18x_{(3)}$.

$v(\underline{x}) = \frac{8}{17}x_1 + \frac{6}{17}x_{(2)} + \frac{3}{17}x_{(3)}$.

Ces résultats suggèrent les remarques suivantes :

(1) Dans les conditions ci-dessus, la valeur attribuée à un vecteur $\underline{x}$ quel qu'il soit est à peu près la même, que l'indicateur soit bâti à partir de l'opérateur WOWA ou de l'opérateur MO2P. Il est facile de vérifier qu'il pourrait en être tout autrement si on adoptait une forme très différente pour la fonction $Q^*(W)$.

(2) Avec MO2P, l'expression de l'indicateur est différente selon que :

(a) x_1 est la plus faible des trois valeurs au sens strict.

(b) x_1 est la plus faible des trois valeurs mais elle est égale à x_2 ou x_3.

(c) x_1 est la seconde plus forte des trois valeurs et elle est strictement supérieure à la plus faible.

Dans le cas (b), utiliser la formule valable dans le cas (a) (autrement dit regarder x_1 comme la plus faible des trois valeurs) conduirait à attribuer, à la valeur commune $x_1 = x_{(2)} = x_{(3)}$, un poids de 5/8 alors que, utiliser la formule valable dans le cas (c) (autrement dit traiter x_1 comme la seconde plus forte valeur), conduirait à attribuer à cette valeur commune un poids légèrement supérieur à

11/17. La formule valable dans le cas (b) lui affecte un poids intermédiaire 7/11. Ce résultat peut être jugé tout à fait en accord avec l'objectif consistant à vouloir faire jouer, aux deux performances les plus élevées, un rôle prépondérant sachant que la composante 1 a le poids spécifique le plus fort (ce poids spécifique étant le même pour les deux autres).

L'ambiguïté que recouvre le cas (b), à savoir x_1 doit-elle être regardée comme la plus faible des trois composantes ou comme la seconde plus forte, ne nécessite pas un traitement particulier avec WOWA. Cela tient au fait que les formules valables dans les cas (a) et (c) conduisent, lorsque $x_1 = x_{(2)} = x_{(3)}$, à attribuer à cette valeur commune le même poids 0.64 (valeur comprise entre 7/11 et 11/17). Soulignons que, avec cet opérateur, les ambiguïtés dues aux inégalités n'impliquent jamais de traitement particulier, quelle que soit la forme de la fonction $Q^*(W)$.

(3) Avec WOWA, la composante 1 ne joue pas exactement le même rôle selon que x_1 est la plus élevée des trois performances (3^e cas) ou seulement la seconde plus élevée (2^e cas). La valeur de x_1 est en effet pondérée de façon légèrement différente (0.48 et 0.46). Cette différentiation qui (en posant $q_1 = q_2 = 0.4$) n'avait pas été voulue, ne se produit pas avec MO2P. Avec une fonction $Q^*(W)$ différente de celle adoptée, cette différentiation pourrait être beaucoup plus accusée.

De façon plus générale, considérons deux vecteurs performances $\underline{x}$ et $\underline{y}$ qui rangent toutes les composantes dans le même ordre, à l'exception de deux d'entre elles, la $j$ème et la $k$ème, dont les rangs sont permutés :

$$x_j = x_{(r)} \text{ et } x_k = x_{(f)} \text{ alors que } y_j = y_{(f)} \text{ et } y_k = y_{(r)}$$

(aucun de ces rangs n'étant ambigu du fait d'égalités entre performances). Supposons que ce changement de place concerne des rangs de même poids : $q_r = q_f = q$. Dans MO2P, le coefficient de x_j conserve la même valeur ($\frac{qw_j}{Q(\tilde{w})}$) dans $v(\underline{x})$ et dans $v(\underline{y})$ ($Q(\tilde{w})$ étant invariant dans cette permutation). Le coefficient de x_k conserve bien évidemment lui aussi la même valeur. Il n'y a en revanche aucune raison pour qu'il en soit ainsi avec WOWA.

Références

[1] J.M. Martel et B. Roy, *Analyse de la signifiance de diverses procédures d'agrégation multicritère*, INFOR Vol. 44, No. 3 (2006) 191–205 (voir aussi Annales du LAMSADE (2002) 225–260).

[2] V. Mousseau, B. Roy et I. Sommerlatt, *Rapport pour le Syndicat des Transports Parisiens : Architecture d'un outil d'aide à la décision pour le choix de zonages tarifaires*, juillet 1996.

[3] V. Mousseau, B. Roy et I. Sommerlatt, Elaboration d'un outil d'aide à la décision en vue de l'évolution de la tarification des transports publics en Ile de France. *J. Decision Syst.* **9** (2000) 289–315.

[4] T. Phan, *Etude de modèles de satisfaction non totalement compensatoires*, Mémoire de DEA "Méthodes Scientifiques de Gestion", Université Paris-Dauphine (2004).

[5] J.P. Richou, *Méthode de la moyenne ordonnée pondérée, mesure des préférences*, Université Paris-Dauphine, Mémoire de DEA "Méthodes Scientifiques de Gestion" (1997).

[6] B. Roy, *Les logiques compensatoires et les autres*, Université Paris-Dauphine, Note de Recherche LAMSADE No. 16 (1996).

[7] B. Roy, *Double pondération pour calculer une moyenne : Pourquoi et comment ?*, Université Paris-Dauphine, Note de Recherche No. 37 (2005).
[8] T.J. Tanzi, B. Roy, M. Flages et D. Voncken, *Indicateurs de dangerosité appliqués aux transports collectifs*, in *Actes du 12e Colloque National de Sûreté de Fonctionnement*, Montpellier, France, 28–30 mars (2000) 703–708.
[9] V. Torra, The weighted OWA operator, *Int. J. Intell. Syst.* **12** (1997) 153–166.
[10] V. Torra, *On some relationships between the WOWA operator and the Choquet integral*, in Proceedings of the Seventh Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems, Paris, France (1998) 818–824.
[11] V. Torra, The WOWA operator and the interpolation function : Chen and Otto's interpolation method revisited. *Fuzzy Sets and Systems* **113** (2000) 389–396.
[12] V. Torra, *On some aggregation operators for numerical information*, in Information Fusion in Data Mining, Studies in Fuzziness and Soft Computing, Volume 123 edited by V. Torra. Springer-Verlag, Heidelberg (2003).
[13] R.R. Yager, On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making, *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.* **18** (1988) 183–190.
[14] R.R. Yager, Families of OWA operators, *Fuzzy Sets Syst.* **59** (1993) 125–148.

To access this journal online:
www.edpsciences.org