Confluentes Mathematici, Vol. 3, No. 2 (2011) 253–262

DOI: 10.1142/S1793744211000357

TRANSFORMATION DU PROBLÈME DE RÉSOLUTION DE SYSTÈMES DE TOEPLITZ BINIVEAUX À UN PROBLÈME POLYNOMIAL

HOUSSAM KHALIL
Institut Camille Jordan, Université Lyon 1,
43 boulevard du 11 novembre 1918,
69622 Villeurbanne cedex, France
khalil@math.univ-lyon1.fr

BERNARD MOURRAIN
INRIA, GALAAD team, 2004 route des Lucioles, BP 93,
06902 Sophia Antipolis Cedex, France
mourrain@sophia.inria.fr

MICHELLE SCHATZMAN
Institut Camille Jordan, Université Lyon 1,
43 boulevard du 11 novembre 1918,
69622 Villeurbanne cedex, France
schatz@math.univ-lyon1.fr

Received 7 November 2010

A la mémoire de Michelle Schatzman

On présente une relation entre la solution d'un système de Toeplitz biniveaux, $Tu = g$, et les syzygies de polynômes à deux variables ou hyperplans mobiles. Cette approche nous donne la possibilité de définir les générateurs pour les matrices de Toeplitz biniveaux en utilisant les générateurs du module de syzygie correspondant. On démontre que ce module est généralisé par 8 éléments et que la solution de $Tu = g$ peut être interprétée comme le reste de la division d'un vecteur, dépendant de g, par ces générateurs.

Ce nouveau point de vu de résolution peut être interprété comme une décomposition de Gohberg–Semencul [3, 5] pour les matrices de Toeplitz biniveaux. La difficulté de généraliser la notion de structure de déplacement [2, 4, 3] du cas scalaire (de niveau un) au cas par blocs, et l'absence de notion de générateurs pour les matrices de Toeplitz biniveaux sont à la base de l'absence d'une telle décomposition jusqu'à présent.

L'utilisation de cette idée pour résoudre les systèmes de Toeplitz scalaires nous permet de donner un algorithme de résolution ultra rapide. L'absence de la notion de μ-base pour les modules de syzygies en plusieurs variables complique la situation pour les systèmes de Toeplitz biniveaux, et l'obtention d'un algorithme de résolution ultra rapide utilisant cette approche reste un problème ouvert.

Keywords: Matrices de Toeplitz; matrices de Toeplitz biniveaux; hyperplans mobiles; division polynomiale.

AMS Subject Classification: 65F05, 65F40, 65F50

1. Introduction

Les systèmes linéaires de Toeplitz par bloc de Toeplitz (Toeplitz biniveaux) apparaissent dans beaucoup d'applications. Des tels systèmes apparaissent, par exemple, dans la résolution des équations aux dérivées partielles de dimension deux, la construction des préconditionneurs, dans des problèmes algébriques, comme le résultant ou la construction des résidus. Ils apparaissent aussi en traitement d'images et du signal.

En général, ces applications conduisent à des matrices de grande taille. Un algorithme de résolution rapide est donc crucial. Malgré un progrès remarquable en étude des algorithmes de résolution rapides pour les systèmes de Toeplitz scalaires (de niveau un), les matrices de Toeplitz biniveaux restent un défi. A ce jour, il n'existe pas de résultats théoriques décrivant un algorithme rapide de résolution pour des systèmes de Toeplitz biniveaux généraux. Voir [11] pour plus d'informations sur les applications et les difficultés des matrices de Toeplitz biniveaux.

Les algorithmes utilisés pour le cas scalaire ne s'adaptent pas au cas d'une matrice de Toeplitz biniveaux. On peut prendre comme exemple la définition des générateurs et la fameuse formule de Gohberg–Semencul, qui n'existent pas pour les matrices de Toeplitz biniveaux. En exploitant les relations entre les matrices de Toeplitz et les polynômes (voir [7]) on a pu interpréter la résolution d'un système de Toeplitz scalaire d'un autre point de vu (voir [9]). Cette approche, qui s'étend naturellement aux cas biniveaux, ouvre des nouvelles pistes pour la résolution rapide des systèmes linéaires à matrices de Toeplitz biniveaux. Par exemple, en utilisant cette approche, on peut définir des générateurs pour une matrice de Toeplitz biniveaux T, et on peut interpréter le calcul d'une base d'un module de syzygies correspondant à T comme le calcul d'une formule de Gohberg–Semencul de T.

2. Matrices de Toeplitz Biniveaux et Hyperplans Mobiles

Soient $m, n \in \mathbb{N}$. On note $\mathfrak{U}_n$ l'ensemble des racines $n^{\text{éme}}$ de l'unité. Soient $E = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2; 0 \le i \le m-1, 0 \le j \le n-1\}$ et $R = \mathbb{K}[x,y]$. On note par $\mathbb{K}[x,y]_{\substack{m\\n}}$ l'ensemble des polynômes en deux variables de degré $\le m$ en x et $\le n$ en y. Pour $p_1, \ldots, p_k$ dans R, on dénote par $(p_1, \ldots, p_k)$ l'idéal engendré par $p_1, \ldots, p_k$. Pour une matrice M formée de m blocs de taille $n \times n$, on utilisera la notation suivante:

$$M = (M_{(i_1,i_2),(j_1,j_2)})_{\substack{0 \le i_1, j_1 \le m-1\\ 0 \le i_2, j_2 \le n-1}} = (M_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta \in E} \tag{2.1}$$

les indices (i_1, j_1) et (i_2, j_2) donnent les positions des blocs et dans les blocs respectivement.

Soit

$$T = (t_{\alpha-\beta})_{\alpha \in E, \beta \in E} \in \mathbb{K}^{mn \times mn} \tag{2.2}$$

une matrice de Toeplitz biniveaux de taille $mn \times mn$, qui est formée de $m \times m$ blocs de taille $n \times n$. Soit g un vecteur de longueur mn et qu'on indexe de la manière suivante:

$$g = (g_\alpha)_{\alpha \in \mathtt{E}} \in \mathbb{K}^{mn}. \tag{2.3}$$

Problème 2.1. *Trouver*

$$u = (u_\alpha)_{\alpha \in \mathtt{E}}, \tag{2.4}$$

tel que

$$Tu = g. \tag{2.5}$$

On commence par définir les polynômes en deux variables suivants:

Définition 2.1. Pour T, g et u définis dans (2.2), (2.3) et (2.4) respectivement, on définit les polynômes associés suivants:

- $T(x,y) = \sum_{(i,j) \in \mathtt{E}-\mathtt{E}} t_{i,j} x^i y^j$,
- $\tilde{T}(x,y) = \sum_{i,j=0}^{2n-1,2m-1} \tilde{t}_{i,j} x^i y^j$ avec $\tilde{t}_{i,j} := \begin{cases} t_{i,j} & \text{si } i < m, j < n, \\ t_{i-2m,j} & \text{si } i \geq m, j < n, \\ t_{i,j-2n} & \text{si } i < m, j \geq n, \\ t_{i-2m,j-2n} & \text{si } i \geq m, i \geq n, \end{cases}$
- $u(x,y) = \sum_{(i,j) \in \mathtt{E}} u_{i,j}\, x^i y^j$,
- $g(x,y) = \sum_{(i,j) \in \mathtt{E}} g_{i,j} x^i y^j$.

Remarquons qu'on peut décomposer $T(x,y)$ de la façon suivante:

$$T(x,y) = T_{++}(x,y) + T_{-+}(x,y) + T_{+-}(x,y) + T_{--}(x,y),$$

avec $T_{++}(x,y)$ contient les termes de degré positif en x et y, $T_{-+}(x,y)$ ceux de degré négatif en x et positif en y, $T_{+-}(x,y)$ ceux de degré positif en x et négatif en y et $T_{--}(x,y)$ contient les termes de degré négatif en x et y. On a alors la remarque suivante:

Remarque 2.1. On a

$$\tilde{T}(x,y) = T_{++}(x,y) + x^{2m} T_{-+}(x,y) + y^{2n} T_{+-}(x,y) + x^{2m} y^{2n} T_{--}(x,y).$$

Définition 2.2. Soit $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{K}[x,y]^k$ un vecteur, non nul, des polynômes en deux variables. On dénote par $\mathcal{L}(\mathbf{a})$ l'ensemble des vecteurs $(h_1, \ldots, h_k) \in \mathbb{K}[x,y]^k$ tel que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, h_i = 0. \tag{2.6}$$

$\mathcal{L}(\mathbf{a})$ est l'ensemble des syzygies de $\mathbf{a}$.

Pour $p \in \mathbb{K}[x,y]$, l'ensemble des vecteurs $(h_1,\dots,h_k) \in \mathbb{K}[x,y]^k$ qui vérifient $\sum_{i=1}^n a_i\, h_i = p$ est noté par $\mathcal{L}(\mathbf{a};p)$.

Il est facile de démontrer que $\mathcal{L}(\mathbf{a})$ est un $\mathbb{K}[x,y]$-module de $\mathbb{K}[x,y]^n$. On a le théorème suivant qui transforme le problème (2.5) à un problème polynomial.

Théorème 2.1. *Le vecteur u est solution de (2.5) si est seulement s'il existe $h_2,\dots,h_9 \in \mathbb{K}[x,y]_{\substack{m-1\\ n-1}}$ tels que $(u(x,y),h_2(x,y),\dots,h_9(x,y))$ soit dans $\mathcal{L}(\mathbf{T})$, avec*

$$\begin{aligned}\mathbf{T} = (&\tilde{T}(x,y), x^m, x^{2m}-1, y^n, x^m y^n, (x^{2m}-1)y^n, y^{2n}-1, x^m(y^{2n}-1),\\ &(x^{2m}-1)(y^{2n}-1); g).\end{aligned}$$

Preuve. Soit $L = \{x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}, 0 \le \alpha_1 \le m-1, 0 \le \alpha_2 \le n-1\}$ l'ensemble des monômes de degré $\le m-1$ en x et $\le n-1$ en y. Soit Π_E la projection de R sur l'espace vectoriel engendré par L.

Par [7] Proposition (3.5.3), on a

$$Tu = g \Leftrightarrow \Pi_E(T(x,y)\,u(x,y)) = g(x,y). \tag{2.7}$$

Or $T(x,y)u(x,y)$ est un polynôme de degré entre $-m+1$ et $2m-2$ en x et entre $-n+1$ et $2n-2$ en y. On peut donc le décomposer de la façon suivante:

$$\begin{aligned}T(x,y)u(x,y) = \Pi_E(T(x,y)u(x,y)) &+ x^m y^n A_1(x,y) + x^m y^{-n} A_2(x,y)\\ &+ x^{-m} y^n A_3(x,y) + x^{-m} y^{-n} A_4(x,y) + x^m A_5(x,y)\\ &+ x^{-m} A_6(x,y) + y^n A_7(x,y) + y^{-n} A_8(x,y),\end{aligned}$$

où, les $A_i(x,y)$ $i=1,\dots,8$ sont des polynômes de degré au plus $m-1$ en x et $n-1$ en y. Par suite (2.7) donne l'équation suivante:

$$\begin{aligned}T(x,y)u(x,y) = g(x,y) &+ x^m y^n A_1(x,y) + x^m y^{-n} A_2(x,y) + x^{-m} y^n A_3(x,y)\\ &+ x^{-m} y^{-n} A_4(x,y) + x^m A_5(x,y) + x^{-m} A_6(x,y)\\ &+ y^n A_7(x,y) + y^{-n} A_8(x,y).\end{aligned} \tag{2.8}$$

Soit $\omega \in \mathfrak{U}_{2m}$ et $\upsilon \in \mathfrak{U}_{2n}$. On a $\omega^m = \omega^{-m}$ et $\upsilon^n = \upsilon^{-n}$. De plus, d'après la Remarque 2.1,

$$\tilde{T}(\omega,\upsilon) = T_{++}(\omega,\upsilon) + T_{-+}(\omega,\upsilon) + T_{+-}(\omega,\upsilon) + T_{--}(\omega,\upsilon) = T(\omega,\upsilon).$$

Donc, en tenant compte de ces remarques et en évaluant l'équation (2.8) en (ω,υ) on trouve que

$$\tilde{T}(\omega,\upsilon)u(\omega,\upsilon) + w^m h_2(\omega,\upsilon) + \upsilon^n h_4(\omega,\upsilon) + w^m \upsilon^n h_5(\omega,\upsilon) - g(\omega,\upsilon) = 0,$$

avec $h_2 = -(A_5 + A_6)$, $h_4 = -(A_7 + A_8)$, et $h_5 = -(A_1(x,y) + A_2(x,y) + A_3(x,y) + A_4(x,y))$. Ça signifie que

$$\begin{aligned}p(x,y) = \tilde{T}(x,y)u(x,y) &+ x^m h_2(x,y) + y^n h_4(x,y)\\ &+ x^m y^n h_5(x,y) - g(x,y) \in (x^{2m}-1, y^{2n}-1).\end{aligned}$$

En réduisant par les polynômes $x^{2m}-1$ et $y^{2n}-1$, et comme $p(x,y)$ est de degré $\leq 3m-1$ en x et $\leq 3n-1$ en y, on peut déduire l'existence de $h_3(x,y), h_6(x,y), \dots, h_8(x,y) \in \mathbb{K}[x,y]_{\substack{m-1\\n-1}}$ tels que

$$\begin{aligned}\tilde{T}(x,y)u(x,y) &+ x^m\, h_2(x,y) + (x^{2m}-1)h_3(x,y) + y^n h_4(x,y) + x^m y^n h_5(x,y)\\ &+ (x^{2m}-1)y^n h_6(x,y) + (y^{2n}-1)h_7(x,y) + x^m(y^{2m}-1)h_7(x,y)\\ &+ (x^{2n}-1)(y^{2n}-1)h_8(x,y) = g(x,y). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Inversement, une solution de (2.9) peut être transformée en une solution de (2.8). L'idée de la transformation est la même que celle utilisée pour le cas scalaire (voir [12]). On utilise la matrice S donnée dans la preuve de la Proposition 2.1, suivante. ◻

L'unicité est assurée par la proposition et le corollaire suivants.

Proposition 2.1. *Il n'y a pas d'élément non nul dans l'ensemble* $\mathcal{L}(\mathbf{T}) \cap \mathbb{K}[x,y]^9_{\substack{m-1\\n-1}}$.

Preuve. On considère l'application suivante:

$$\mathbb{K}[x,y]^9_{\substack{m-1\\n-1}} \to \mathbb{K}[x,y]_{\substack{3m-1\\3n-1}}, \tag{2.10}$$

$$\mathbf{p}(x,y) = (p_1(x,y), \dots, p_9(x,y)) \mapsto \mathbf{T}\cdot\mathbf{p} \tag{2.11}$$

Sa matrice, de taille $9mn \times 9mn$, est de la forme suivante:

$$S = \left(\begin{array}{c|cc|ccc|ccc} & E_{21} & -E_{11}+E_{31} & & & & -E_{11} & -E_{21} & E_{11}-E_{31}\\ T_0 & \vdots & \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots\\ & E_{2m} & -E_{1m}+E_{3m} & & & & -E_{1m} & -E_{2m} & E_{1m}-E_{3m}\\ \hline & & & E_{11} & E_{21} & -E_{11}+E_{31} & & & \\ T_1 & & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ & & & E_{1m} & E_{2m} & -E_{1m}+E_{3m} & & & \\ \hline & & & & & & E_{11} & E_{21} & -E_{11}+E_{31}\\ T_2 & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots\\ & & & & & & E_{1m} & E_{2m} & -E_{1m}+E_{3m} \end{array}\right) \tag{2.12}$$

avec E_{ij} est la matrice de taille $3n \times mn$ $e_{ij} \otimes I_n$ où e_{ij} la matrice de taille $3 \times m$ avec des coefficients nuls sauf dans la position (i,j) le coefficient vaut 1. Et

$$\begin{pmatrix} T_0\\ T_1\\ T_2 \end{pmatrix}$$

est la matrice, de taille $9mn \times n$, suivante:

$$\left(\begin{array}{cccc} t_0 & 0 & \dots & 0 \\ t_1 & t_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ t_{m-1} & \dots & t_1 & t_0 \\ \hline 0 & t_{m-1} & \dots & t_1 \\ t_{-m+1} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{-m+1} \\ t_{-1} & \dots & t_{-m+1} & 0 \\ \hline 0 & t_{-1} & \dots & t_{-m+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & t_{-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{array}\right) \quad \text{et } t_i = \left(\begin{array}{cccc} t_{i,0} & 0 & \dots & 0 \\ t_{i,1} & t_{i,0} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ t_{i,n-1} & \dots & t_{i,1} & t_{i,0} \\ \hline 0 & t_{i,n-1} & \dots & t_{i,1} \\ t_{i,-n+1} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{i,-n+1} \\ t_{i,-1} & \dots & t_{i,-n+1} & 0 \\ \hline 0 & t_{i,-1} & \dots & t_{i,-n+1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & t_{i,-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{array}\right)$$

Pour des raisons semblables à celles données dans [9], en faisant des réductions dans les blocs puis par blocs, la matrice S est inversible. C'est-à-dire $\ker S = \{0\}$, ce qui prouve la proposition. $\square$

Corollaire 2.1. *L'ensemble $\mathcal{L}(\mathbf{T}; g) \cap \mathbb{K}[x,y]^9_{\substack{m-1\\n-1}}$ contient exactement un seul élément.*

Preuve. Comme T est inversible, il existe un unique u tel que $Tu = g$. D'après le Théorème 2.1, il existe $h_2, \dots, h_9 \in \mathbb{K}[x,y]_{\substack{m-1\\n-1}}$ tels que $U = (u, h_2, \dots, h_9) \in \mathcal{L}(\mathbf{T}; g)$.

L'unicité est évidente, parce que si $U' \in \mathcal{L}(\mathbf{T}; g) \cap \mathbb{K}[x,y]^9_{\substack{m-1\\n-1}}$ alors $U - U' \in \mathcal{L}(\mathbf{T}) \cap \mathbb{K}[x,y]^9_{\substack{m-1\\n-1}} = \{0\}$ d'après la proposition précédente. $\square$

Dans la section suivante on étudiera les propriétés du module de syzygies $\mathcal{L}(\mathbf{T})$.

3. Générateurs et Réduction

On commence par le théorème général suivant. La démonstration qu'on donne ici est une nouvelle preuve élémentaire de ce résultat bien connu sur les modules de syzygies.

Théorème 3.1. *Pour tout vecteur de polynômes $\mathbf{a} = (a_i)_{i=1,\dots,n} \in \mathbb{K}[x,y]^n$, le $\mathbb{K}[x,y]$-module $\mathcal{L}(a_1, \dots, a_n)$ est libre de rang $n-1$. Ainsi $\mathcal{L}(\mathbf{T})$ est libre de rang 8.*

Preuve. Considérons tout d'abord, le cas où les a_i sont des monômes:

$a_i = x^{\alpha_i} y^{\beta_i}$, qu'on va ordonner dans l'ordre lexicographique tel que $x < y$. Et on va supposer que $a_1 \geq \dots \geq a_n$. Dans ce cas, le module de syzygies de $\mathbf{a}$ est engendré par les S-polynômes:

$$S(a_i, a_j) = \mathrm{lcm}(a_i, a_j)\left(\frac{\sigma_i}{a_i} - \frac{\sigma_j}{a_j}\right),$$

où $(\sigma_i)_{i=1,\dots,n}$ est la base canonique de $\mathbb{K}[x,y]^n$, voir [1].

On peut vérifier simplement que:

$$S(a_i, a_k) = \frac{\mathrm{lcm}(a_i, a_k)}{\mathrm{lcm}(a_i, a_j)} S(a_i, a_j) - \frac{\mathrm{lcm}(a_i, a_k)}{\mathrm{lcm}(a_j, a_k)} S(a_j, a_k) \text{ if } i \geq j \geq k$$

et que $\mathrm{lcm}(a_i, a_j)$ divise $\mathrm{lcm}(a_i, a_k)$. Donc $\mathcal{L}(\mathbf{a})$ est engendré par les $S(a_i, a_j)$ qui sont minimales pour la division, c'est-à-dire par $S(a_i, a_{i+1})$ pour $i = 1, \dots, n-1$, parce que les monômes a_i sont ordonnés lexicographiquement. De plus, comme les syzygies $S(a_i, a_{i+1})$ utilisent les éléments σ_i, σ_{i+1} de la base canonique, ils sont donc indépendants dans $\mathbb{K}[x,y]^n$. Par suite $\mathcal{L}(\mathbf{a})$ est un module libre de rang $n-1$ et donc on a la résolution suivante:

$$0 \to \mathbb{K}[x,y]^{n-1} \to \mathbb{K}[x,y]^n \to (\mathbf{a}) \to 0.$$

Supposons maintenant que les a_i sont des polynômes quelconques dans $\mathbb{K}[x,y]$. On va calculer la base de Gröbner de a_i, pour un ordre monomial qui raffine le degré (voir [1]).

On dénote par $m_1, \dots, m_s$ les termes principaux de ces polynômes dans cette base de Gröbner, ordonnée par l'ordre lexicographique.

Cette construction précédente permet d'obtenir la résolution de $(m_1, \dots, m_s)$ suivante:

$$0 \to \mathbb{K}[x,y]^{s-1} \to \mathbb{K}[x,y]^s \to (m_i)_{i=1,\dots,s} \to 0.$$

En utilisant [6] (ou [1]), cette résolution peut être déformée à une résolution de $(\mathbf{a})$, de la forme:

$$0 \to \mathbb{K}[x,y]^p \to \mathbb{K}[x,y]^n \to (\mathbf{a}) \to 0,$$

pour un certain p. Ce qui montre que $\mathcal{L}(\mathbf{a})$ est aussi un module libre. Son rang p est obligatoirement égal $n-1$, parce que la somme alternée des dimensions des espaces vectoriels des éléments de degrés $\leq \nu$ dans chaque module de cette résolution, égale 0, pour $\nu \in \mathbb{N}$. $\square$

On va, maintenant, construire une base de $\mathcal{L}(\mathbf{T})$.

Définition 3.1. On note par $\{\sigma_1, \dots, \sigma_9\}$ la base canonique de $\mathbb{K}[x,y]$-module $\mathbb{K}[x,y]^9$.

Le polynôme $\tilde{T}(x,y)$ est de degré $\leq 2m-1$ en x et $\leq 2n-1$ en y et comme la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[x,y]^9_{\substack{m-1\\n-1}} &\to \mathbb{K}[x,y]_{\substack{3m-1\\3n-1}} \\ \mathbf{p}(x,y) = (p_1(x,y), \dots, p_9(x,y)) &\mapsto \mathbf{T} \cdot \mathbf{p} \end{aligned}$$

est surjective (voir la démonstration de la Proposition 2.1), alors il existe $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathbb{K}[x,y]^9_{\substack{m-1\\n-1}}$ tels que $\mathbf{T}\cdot\mathbf{u}_1 = \tilde{T}(x,y)x^m$ et $\mathbf{T}\cdot\mathbf{u}_2 = \tilde{T}(x,y)y^n$. C'est à dire,

$$\mathbf{b}_1 = x^m\sigma_1 - \mathbf{u}_1 \in \mathcal{L}(\mathbf{T}), \quad \mathbf{b}_2 = y^n\sigma_1 - \mathbf{u}_2 \in \mathcal{L}(\mathbf{T}).$$

Pour les mêmes raisons, il existe $\mathbf{u}_3 \in \mathbb{K}[x,y]^9_{\substack{m-1\\n-1}}$, tel que $\mathbf{T}\cdot\mathbf{u}_3 = 1 = x^m\,x^m - (x^{2m}-1) = y^n\,y^n - (y^{2n}-1)$. On a donc

$$\mathbf{b}_3 = x^m\sigma_2 - \sigma_3 - \mathbf{u}_3 \in \mathcal{L}(\mathbf{T}), \quad \mathbf{b}_4 = y^n\sigma_4 - \sigma_7 - \mathbf{u}_3 \in \mathcal{L}(\mathbf{T}).$$

De plus, on a les relations évidentes suivantes:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{b}_5 = y^n\sigma_2 - \sigma_5 \in \mathcal{L}(\mathbf{T}), & \mathbf{b}_6 = x^m\sigma_4 - \sigma_5 \in \mathcal{L}(\mathbf{T}), \\ \mathbf{b}_7 = x^m\sigma_5 - \sigma_6 + \sigma_4 \in \mathcal{L}(\mathbf{T}), & \mathbf{b}_8 = y^n\sigma_5 - \sigma_8 + \sigma_2 \in \mathcal{L}(\mathbf{T}). \end{array}$$

Proposition 3.1. *Les relations* $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_8$ *forment une base de* $\mathcal{L}(\mathbf{T})$.

Preuve. Soit $\mathbf{h} = (h_1,\ldots,h_9) \in \mathcal{L}(\mathbf{T})$. En réduisant par $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_8$, on peut admettre que les coefficients h_1,h_2,h_4,h_5 sont dans $\mathbb{K}[x,y]_{\substack{m-1\\n-1}}$. Donc, $\tilde{T}(x,y)h_1 + x^m h_2 + y^n h_4 + x^m y^n h_5 \in (x^{2n}-1, y^{2m}-1)$. Comme ce polynôme est de degré $\leq 3m-1$ en x et $\leq 3n-1$ en y, par réduction par $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_8$, on déduit que les coefficients $h_3,h_6,\ldots,h_9$ sont dans $\mathbb{K}[x,y]_{\substack{m-1\\n-1}}$. Par la Proposition 2.1, il n'existe pas de syzygies non nul dans $\mathbb{K}[x,y]^9_{\substack{m-1\\n-1}}$. Donc, après réduction par $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_8$, on a $\mathbf{h}=0$. Donc, n'importe quel élément de $\mathcal{L}(\mathbf{T})$ peut être réduit à 0 par les relations précédentes. En d'autres mots, $\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_8$ engendrent le $\mathbb{K}[x,y]$-module $\mathcal{L}(\mathbf{T})$. Par le Théorème 3.1, les relations $\mathbf{b}_i$ ne peuvent pas être dépendants sur $\mathbb{K}[x,y]$ et donc, elles forment une base de $\mathcal{L}(\mathbf{T})$. □

Proposition 3.2. *Le reste de la division de* $(0, x^m g, g, 0,\ldots,0)^{\mathrm{T}}$ *par* $\{\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_8\}$ *est l'unique vecteur de* $\mathcal{L}(\mathbf{T};g)\cap\mathbb{K}[x,y]^9_{\substack{m-1\\n-1}}$, *ce qui donne la solution* u.

Preuve. Posons $V = (0, x^m g, g, 0,\ldots,0)^{\mathrm{T}}$ et $\mathcal{L}(\mathbf{T};g)\cap\mathbb{K}[x,y]^9_{\substack{m-1\\n-1}} = \{U\}$. On remarque facilement que $V \in \mathcal{L}(\mathbf{T};g)$, donc $V - U \in \mathcal{L}(\mathbf{T})$. Comme $\{\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_8\}$ forme une base de $\mathcal{L}(\mathbf{T})$ alors il existe des uniques $p_1,\ldots,p_8$ tels que

$$V = \sum_{i=1}^{8} p_i\mathbf{b}_i + U.$$

□

Après cette étude théorique qui nous permet de voir la solution du problème $Tu = g$ comme la reste d'une division par une base de $\mathcal{L}(\mathbf{T})$, on s'intéresse maintenant à la recherche des algorithmes qui calculent rapidement une base de $\mathcal{L}(\mathbf{T})$ puis à faire rapidement la division.

On peut simplifier un peu le problème du calcul d'une base, parce qu'on veut calculer seulement les coefficients de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4, \sigma_5$ de $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$. Notons $B(x, y)$ la matrice de coefficients correspondante, elle est donc de la forme suivante:

$$\begin{pmatrix} x^m & y^n & 0 \\ 0 & 0 & x^m \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathbb{K}[x, y]^{4,3}_{\substack{m-1 \\ n-1}}. \tag{3.1}$$

Notons que les autres coefficients de relations $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ correspondent aux éléments dans l'idéal $(x^{2m} - 1, y^{2n} - 1)$. Donc, on peut les obtenir en réduisant les coefficients de $(\tilde{T}(x, y), x^m, y^n, x^m y^n) \cdot B(x, y)$ par les polynômes $x^{2m} - 1, y^{2n} - 1$.

Notons aussi que la relation $\mathbf{b}_4$ peut être déduite de $\mathbf{b}_3$. En effet, on a $\mathbf{b}_3 - x^m \sigma_2 + \sigma_3 + y^n \sigma_4 - \sigma_7 = \mathbf{b}_4$. Comme les autres relations, $\mathbf{b}_i$, $4 < i \leq 8$, sont données explicitement et sont indépendantes de $\tilde{T}(x, y)$, on peut donc déduire une base de $\mathcal{L}(\mathbf{T})$ à partir de la matrice $B(x, y)$.

Dans le cas scalaire on sait comment on peut faire ce calcul rapidement. Dans le cas de Toeplitz par blocs de Toeplitz, le problème est beaucoup plus difficile et on ne dispose pas des algorithmes rapides qui calculent B ni des algorithmes rapides qui font la division. Cette difficulté vient de la difficulté du calcul des syzygies rapidl en deux variables, et de la difficulté de réduction rapide en deux variables.

4. Conclusion

Malgré un progrès remarquable en étude des algorithmes de résolution rapides pour les matrices structurées scalaires ces dernières décennies, les matrices structurées biniveaux, en particulier les matrices de Toeplitz biniveaux, restent un défi. L'étude des matrices Toeplitz biniveaux a commencé en même temps que l'étude des matrices de Toeplitz scalaires au début des années 80. Malgré cela, il n'y a qu'un faible nombre d'études qui portent sur la résolution ces systèmes et, à ce jour, il n'existe pas de résultats théoriques décrivant un algorithme rapide de résolution pour des systèmes de Toeplitz biniveaux généraux.

La difficulté de ce problème s'explique par le fait que les algorithmes utilisés pour le cas scalaire ne s'adaptent pas au cas d'une matrice de Toeplitz biniveaux. On peut prendre comme exemple la fameuse formule de Gohberg–Semencul, qui n'existe pas pour les matrices de Toeplitz biniveaux.

Notons aussi que les méthodes itératives qui utilisent des préconditionneurs superlinéaire rencontrent plusieurs problèmes: premièrement en [8], les auteurs montrent que les préconditionneurs de type circulant ne sont pas superlinéaires, puis que de tels préconditionneurs ne peuvent pas appartenir à l'algèbre des matrices de Toeplitz symétriques par blocs de Toeplitz symétriques ni à l'algèbre des matrices circulantes par blocs circulants. Un résultat plus négatif est donné en [10]. Ces résultats indiquent que la construction de préconditionneurs efficaces n'est pas possible dans une classe encore plus vaste d'algèbres de matrices.

Cette étude ouvre la porte sur une nouvelle piste qui peut être utile dans la recherche d'un algorithme ultra rapide de résolution de systèmes à matrice de Toeplitz biniveaux.

Bibliographie

1. D. Eisenbud, *Commutative Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 150 (Springer-Verlag, 1995), with a view toward algebraic geometry.
2. B. Friedlander, M. Morf, T. Kailath et L. Ljung, New inversion formulas for matrices classified in terms of their distance from Toeplitz matrices, *Linear Algebra Appl.* **27** (1979) 31–60.
3. G. Heinig et K. Rost, *Algebraic Methods for Toeplitz-like Matrices and Operators*, Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 13 (Birkhäuser-Verlag, 1984).
4. T. Kailath, S. Y. Kung et M. Morf, Displacement ranks of matrices and linear equations, *J. Math. Anal. Appl.* **68** (1979) 395–407.
5. G. Labahn et T. Shalom, Inversion of Toeplitz matrices with only two standard equations, *Linear Algebra Appl.* **175** (1992) 143–158.
6. H. Michael Möller et F. Mora, New constructive methods in classical ideal theory, *J. Algebra* **100** (1986) 138–178.
7. B. Mourrain et V. Y. Pan, Multivariate polynomials, duality, and structured matrices, *J. Complexity* **16** (2000) 110–180, real computation and complexity (Schloss Dagstuhl, 1998).
8. S. Serra Capizzano et E. Tyrtyshnikov, Any circulant-like preconditioner for multilevel matrices is not superlinear, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* **21** (1999) 431–439.
9. H. Khalil, B. Mourrain and M. Schatzman, Toeplitz and Toeplitz-block-Toeplitz matrices and their correlation with syzygies of polynomials, in *Matrix Methods: Theory, Algorithms, Applications*, International seminar matrix methods and operator equations (MM&OE), eds. V. Olshevsky and E. Tyrtyshnikov (World Scientific, 2008), pp. 296–312.
10. D. Noutsos, S. S. Capizzano and P. Vassalos, Matrix algebra preconditioners for multilevel Toeplitz systems do not insure optimal convergence rate, *Theor. Comput. Sci.* **315** (2004) 557–579.
11. E. Tyrtyshnikov, Fast algorithms for block Toeplitz matrices, *Sov. J. Numer. Math. Model.* **1** (1985) 121–139.
12. M. Van Barel, G. Heinig and P. Kravanja, A stabilized superfast solver for nonsymmetric Toeplitz systems, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* **23** (2001) 494–510.