ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

HENRI PAILLOUX

Nouvelles applications du calcul fonctionnel à la mécanique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 70, n° 1 (1953), p. 1-49
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1953_3_70_1_1_0>

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

NOUVELLES APPLICATIONS

DU CALCUL FONCTIONNEL A LA MÉCANIQUE

PAR M. HENRI PAILLOUX.

Dans un précédent Mémoire [1] nous avons montré qu'il était possible de modifier la méthode employée par Lagrange pour l'étude des systèmes matériels à n paramètres, de façon à mettre en équations les problèmes de Statique ou de Dynamique de systèmes matériels dans lesquels il est nécessaire d'introduire des fonctions-paramètres pour représenter toute forme possible. Dans un dernier chapitre nous proposions un procédé d'approximation pour l'étude de l'équilibre des poutres droites : à partir des équations rigoureuses de l'Élasticité, et grâce à une approximation que l'on peut améliorer, nous avons établi des équations assez voisines de celles de la Résistance des matériaux classique.

Nous nous proposons ici d'appliquer une méthode analogue aux plaques, membranes ou coques, et de donner les équations correspondantes de Statique, de Dynamique, ou celles des vibrations périodiques.

L'étude est faite d'abord en axes rectangulaires, ce qui donne des équations relativement simples. Comme application nous étudions la Statique des plaques planes chargées dans l'approximation du second ordre. Rapportant ensuite l'espace à un système de coordonnées curvilignes quelconques, les méthodes du Calcul tensoriel permettent d'évaluer le potentiel de forme d'un corps vibrant à trois dimensions. On considère d'abord le cas d'une coque de révolution dans

(1) *Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 69, 1952, p. 213-257.

l'approximation du premier ordre. Cette approximation probablement faible se justifie par des calculs relativement abordables qui permettent d'étudier le problème de la vibration des cloches. La mise en équations de ce même problème dans le cas d'une approximation du second ordre est donnée, ainsi que l'énoncé des problèmes de Mathématiques à résoudre pour le système différentiel obtenu. Nous terminons l'étude du mouvement des coques par les équations générales en variables quelconques, puis nous particularisons en supposant d'abord que l'on a affaire à un système triple orthogonal de coordonnées, puis, que la surface moyenne de la coque est rapportée à ses lignes de courbures.

L'application de la méthode générale des fonctions-paramètres est faite à l'Hydrodynamique pour retrouver les équations des fluides parfaits en variables quelconques de Lagrange, et étudier en particulier l'écoulement adiabatique, permanent ou non, d'un fluide parfait dans une conduite de section faible et presque constante.

En Résistance des matériaux on rencontre des problèmes assez difficiles à propos d'assemblages de poutres constituant des systèmes fortement hyperstatiques. L'idée fréquemment utilisée consiste à remplacer cet assemblage de poutres par une membrane, ce qui permet d'introduire la continuité et la dérivabilité (quoique, au point de vue calcul numérique, certains ingénieurs préfèrent utiliser des équations aux différences finies, mais nous n'abordons pas ici le point de vue pratique, nous nous bornons aux mises en équations). Nous considérons une membrure de pont à contour rectangulaire rigide dans laquelle il existe des tirants verticaux articulés ou encastrés dans les deux poutres horizontales, et nous recherchons le déplacement en un point quelconque. Même problème pour une grille verticale formée d'un cadre relativement rigide et de deux systèmes de barres, horizontales et verticales, encastrées à chaque nœud. Après l'étude des petites déformations d'un plan, nous étudions le cas de la grille horizontale (par exemple, l'ensemble des poutres en béton d'un plancher), les deux systèmes de barres étant orthogonaux ou non. Il est très intéressant de constater que ces problèmes de Résistance de matériaux peuvent se traiter, suivant l'idée de Lagrange, en séparant la recherche des déformations géométriques de celle des tensions ou réactions. Il s'introduit une grosse simplification de calcul. La connaissance des déformations permet de connaître la répartition des efforts.

Nous terminons par la recherche de la forme optima des colonnes de révolution pour résister au flambement.

1. Statique et Dynamique des membranes rigides en axes rectangulaires. — Soit Σ une portion de membrane rigide, ou coque, limitée par un contour Γ. Cette membrane possède en chaque point une épaisseur ε variant peu et lentement autour de chaque point. Par définition, la surface moyenne est équidistante des deux faces de la coque supposées très voisines. Rapportons la

surface moyenne à trois axes rectangulaires $Oxyz$, et soit $z = z(x, y)$ l'équation de la surface. Nous désignons par p, q, r, s, t les dérivées partielles premières et secondes de la fonction z. Les coordonnées X, Y, Z d'un point P de la coque peuvent s'exprimer en fonction de trois paramètres qui sont les coordonnées rectangulaires x, y de la projection de P sur le plan xOy, et ζ cote relative de P par rapport à la surface moyenne. Autrement dit, les coordonnées de P ont la valeur suivante :

$$X = x, \qquad Y = y, \qquad Z = z(x, y) + \zeta. \tag{1}$$

ζ varie entre $\pm h(x, y)$ qui dépend de l'épaisseur de la surface au point P et de l'angle α que fait la normale à la surface moyenne avec l'axe des z. Nous avons

$$\varepsilon = 2h\cos\alpha, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

de sorte que

$$2h = \varepsilon\sqrt{1 + p^2 + q^2}. \tag{2}$$

$h(x, y)$ est donc une quantité connue, que nous utiliserons constamment.

Soient u, v, w les composantes rectangulaires du déplacement du point P sous l'action de charges que nous préciserons ultérieurement. Nous admettons, comme nous l'avons fait dans le cas des poutres, que les fonctions u, v, w sont régulières en ζ, et qu'on peut, avec une approximation suffisante, les développer par la formule de Taylor, en se bornant aux termes du premier degré en ζ :

$$u = u_1 + \zeta u_2, \qquad v = v_1 + \zeta v_2, \qquad w = w_1 + \zeta w_2.$$

u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 sont des fonctions de x et y, mais elles ne dépendent pas de ζ. Cette hypothèse sur u, v, w revient à supposer que leurs dérivées premières en ζ varient peu au voisinage de la surface moyenne. En fait, un développement limité de Taylor, dans le cas où l'accroissement des variables n'est pas infiniment petit, est satisfaisant si les dernières dérivées conservées sont presque constantes dans l'intervalle considéré. Ce fait peut ne pas se produire pour certaines dérivées d'ordre moindre, ou pour les dérivées d'ordre supérieur à celui où l'on arrête le développement.

Pour pouvoir effectuer certaines dérivations, résolvons les formules (1) par rapport à x, y, ζ, et calculons leurs différentielles :

$$dx = dX, \qquad dy = dY, \qquad d\zeta = dZ - p\,dX - q\,dY.$$

Le potentiel de forme d'un corps élastique étant donné par la formule

$$2\varpi = \iiint [\lambda e^2 + 2\mu(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) + 4\mu(g_1^2 + g_2^2 + g_3^2)]\,dX\,dY\,dZ, \tag{3}$$

nous constatons que c'est une fonctionnelle des u_i, v_i. Pour la déterminer, nous avons besoin du jacobien suivant :

$$\frac{D(x, y, \zeta)}{D(X, Y, Z)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -p & -q & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

dont l'inverse, qui vaut l'unité, intervient dans l'intégrale précédente. Évaluons d'autre part les coefficients de la déformation. Ils ont la valeur suivante :

$$(4) \qquad \begin{cases} e_i = A_i + \zeta B_i, & e = A + \zeta B, \\ 2g_i = C_i + \zeta D_i, & A = A_1 + A_2 + A_3, \quad B = B_1 + B_2 + B_3, \end{cases}$$

où nous avons posé, pour abréger les calculs,

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} A_1 = \dfrac{\partial u_1}{\partial x} - pu_2, & A_2 = \dfrac{\partial v_1}{\partial y} - qv_2, & A_3 = w_2; \\ B_1 = \dfrac{\partial u_2}{\partial x}, & B_2 = \dfrac{\partial v_2}{\partial y}, & B_3 = 0; \\ C_1 = \dfrac{\partial w_1}{\partial y} + v_2 - qw_2, & C_2 = \dfrac{\partial w_1}{\partial x} + u_2 - pw_2, & C_3 = \dfrac{\partial v_1}{\partial x} + \dfrac{\partial u_1}{\partial y} - pv_2 - qu_2; \\ D_1 = \dfrac{\partial w_2}{\partial y}, & D_2 = \dfrac{\partial w_2}{\partial x}, & D_3 = \dfrac{\partial v_2}{\partial x} + \dfrac{\partial u_2}{\partial y}. \end{array} \right.$$

Le potentiel de forme prend alors la valeur suivante :

$$\begin{aligned} 2\varpi &= \iiint [\lambda(A + \zeta B)^2 + 2\mu\Sigma(A_i + \zeta B_i)^2 + \mu\Sigma(C_i + \zeta D_i)^2]\, dx\, dy\, d\zeta \\ &= \iiint [(\lambda A^2 + 2\mu\Sigma A_i^2 + \mu\Sigma C_i^2) + 2\zeta(\lambda AB + 2\mu\Sigma A_i B_i + \mu\Sigma C_i D_i) \\ &\qquad + \zeta^2(\lambda B^2 + 2\mu\Sigma B_i^2 + \mu\Sigma D_i^2)]\, dx\, dy\, d\zeta. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant effectuer l'intégration en ζ, ce qui donne

$$2\varpi = \iint_\Sigma \left[2h(\lambda A^2 + 2\mu\Sigma A_i^2 + \mu\Sigma C_i^2) + \frac{2h^3}{3}(\lambda B^2 + 2\mu\Sigma B_i^2 + \mu\Sigma D_i^2) \right] dx\, dy.$$

Tenant compte de la signification des symboles, nous voyons que le potentiel de forme est une fonctionnelle des u_i, v_i. Il se présente comme une intégrale de surface portant sur un polynome en u_i, v_i et leurs dérivées premières en x et y. Comme le calcul des variations fournit directement la dérivée fonctionnelle de l'intégrale

$$\iint_\Sigma F(u, u'_x, u'_y)\, dx\, dy$$

sous la forme

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u'_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u'_y},$$

nous saurons calculer les dérivées partielles fonctionnelles du potentiel de forme en appliquant les formules de dérivation des fonctions composées.

Après avoir remarqué que l'on a

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 2h\left(\lambda A \frac{\partial A}{\partial u} + 2\mu \Sigma A_i \frac{\partial A_i}{\partial u} + \mu \Sigma C_i \frac{\partial C_i}{\partial u}\right) + \frac{2h^2}{3}\left(\lambda B \frac{\partial B}{\partial u} + 2\mu \Sigma B_i \frac{\partial B_i}{\partial u} + \mu \Sigma D_i \frac{\partial D_i}{\partial u}\right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial u'_x} = 2h\left(\lambda A \frac{\partial A}{\partial u'_x} + \dots\right) + \frac{2h^2}{3}\left(\lambda B \frac{\partial B}{\partial u'_x} + \dots\right), \qquad \frac{\partial F}{\partial u'_y} = \dots,$$

nous trouvons de cette manière le tableau suivant :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial \varpi}{\partial u_1} &= -\frac{\partial}{\partial x}[2h(\lambda A + 2\mu A_1)] - \frac{\partial}{\partial y}(2\mu h C_3),\\
\frac{\partial \varpi}{\partial v_1} &= -\frac{\partial}{\partial x}(2\mu h C_3) - \frac{\partial}{\partial y}[2h(\lambda A + 2\mu A_2)],\\
\frac{\partial \varpi}{\partial w_1} &= -\frac{\partial}{\partial x}(2\mu h C_2) - \frac{\partial}{\partial y}(2\mu h C_1),\\
\frac{\partial \varpi}{\partial u_2} &= 2h[\mu C_2 - p(\lambda A + 2\mu A_1) - \mu q C_3]\\
&\quad - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{2h^3}{3}(\lambda B + 2\mu B_1)\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2h^3}{3}\mu D_3\right),\\
\frac{\partial \varpi}{\partial v_2} &= 2h[\mu C_1 - \mu p C_3 - q(\lambda A + 2\mu A_2)]\\
&\quad - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2h^3}{3}\mu D_3\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{2h^3}{3}(\lambda B + 2\mu B_2)\right],\\
\frac{\partial \varpi}{\partial w_2} &= 2h(\lambda A + 2\mu A_3 - \mu q C_1 - \mu p C_2) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2h^3}{3}\mu D_2\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2h^3}{3}\mu D_1\right).
\end{aligned}\right.$$

Pour évaluer le travail des forces extérieures agissant sur la coque, nous distinguons les forces massiques, ou de volume, et les forces de surface agissant sur l'une ou l'autre des faces de la coque.

Soient $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ les composantes de la force massique par unité de volume; ce sont des fonctions données de X, Y, Z. Nous avons donc, par exemple,

$$\mathfrak{X}(X, Y, Z) = \mathfrak{X}(x, y, z + \zeta) = \mathfrak{X} + \zeta \mathfrak{X}'_z,$$

$\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{X}'_z$ étant, dans ce qui suit, calculés au point de coordonnées x, y, z et non X, Y, Z. Le travail virtuel des forces massiques a donc la valeur suivante :

$$\sum \iiint (\mathfrak{X} + \zeta \mathfrak{X}'_z)(\delta u_1 + \zeta\, \delta v_1)\, dx\, dy\, d\zeta,$$

la sommation étant entendue pour les trois composantes. Nous pouvons effectuer l'intégration en ζ,

$$\sum \iint_\Sigma \left(2h \mathfrak{X}\, \delta u_1 + \frac{2h^3}{3} \mathfrak{X}'_z\, \delta u_2\right) dx\, dy.$$

Pour connaître le travail des forces de surface, désignons par X^+, Y^+, Z^+ et X^-, Y^-, Z^-, les composantes des forces agissant sur l'unité d'aire des faces de cotes respectives $z + h$ et $z - h$.

L'élément d'aire de la surface décrite par le point de coordonnées $x, y, z+h$, étant

$$\sqrt{1+(p+h'_x)^2+(q+h'_y)^2}\,dx\,dy \sim \sqrt{1+p^2+q^2}\left(1+\frac{ph'_x+qh'_y}{1+p^2+q^2}\right)dx\,dy,$$

le travail virtuel des forces précédentes a pour expression

$$\sum \iint \left\{\left[(X^+ + X^-) + (X^+ - X^-)\frac{ph'_x+qh'_y}{1+p^2+q^2}\right]\delta u_1 + h(X^+ - X^-)\,\delta u_2\right\}\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy.$$

Calculons encore la force vive de la coque,

$$2T = \sum \iiint \rho(\dot u_1 + \zeta \dot u_2)^2\,dx\,dy\,d\zeta = \sum \iint_\Sigma \rho\left[2h\dot u_1^2 + \frac{2h^3}{3}\dot u_2\right)dx\,dy.$$

Ses dérivées partielles fonctionnelles par rapport aux fonctions-paramètres sont nulles, et ses dérivées par rapport à leurs dérivées par rapport au temps ont la valeur suivante :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot u_1} = 2\rho h \dot u_1, \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot u_2} = \frac{2\rho h^3}{3}\dot u_2.$$

Nous avons enfin les six équations du mouvement, dans le cas le plus général. Elles sont du type suivant :

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} 2\rho h \ddot u_1 &= -\frac{\partial \varpi}{\partial u_1} + 2h\mathfrak{X} + (X^+ + X^-)\sqrt{1+p^2+q^2} + (X^+ - X^-)\frac{ph'_x+qh'_y}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\\ 2\rho\frac{h^3}{3}\ddot u_2 &= -\frac{\partial \varpi}{\partial u_2} + \frac{2h^3}{3}\mathfrak{X}'_z + h(X^+ - X^-)\sqrt{1+p^2+q^2}.\end{aligned}\right.$$

L'approximation faite est dite du second ordre, car nous avons arrêté les développements de Taylor du déplacement aux termes du premier ordre. Une approximation moins bonne, mais meilleure que dans le cas des poutres droites, est celle que l'on obtient en prenant le déplacement du point P réduit aux seuls termes u_1, v_1, w_1. Comme les calculs sont beaucoup plus simples, nous les donnons à titre d'indication. Dans ce cas, toutes les quantités B_i et D_i sont nulles, et nous avons

$$A_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \qquad A_2 = \frac{\partial v_1}{\partial y}, \qquad A_3 = 0;$$

$$C_1 = \frac{\partial w_1}{\partial y}, \qquad C_2 = \frac{\partial w_1}{\partial x}, \qquad C_3 = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y},$$

avec trois dérivées fonctionnelles seulement, $\frac{\partial \varpi}{\partial u_1}, \frac{\partial \varpi}{\partial v_1}, \frac{\partial \varpi}{\partial w_1}$, dont la valeur est toujours donnée par le tableau (6).

Le travail virtuel des forces extérieures comprend les termes suivants :

$$\delta\mathfrak{T} = \sum \iint_\Sigma \left[2h\mathfrak{X} + (X^+ + X^-)\sqrt{1+p^2+q^2} + (X^+ - X^-)\frac{ph'_x+qh'_y}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right]\delta u_1\,dx\,dy,$$

d'où les trois équations simplifiées du mouvement :

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
2\rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left\{2h\left[\lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)+2\mu\frac{\partial u_1}{\partial x}\right]\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left[2\mu h\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right]\\
&\quad + 2h\mathfrak{X} + (X^+ + X^-)\sqrt{1+p^2+q^2} + (X^+ - X^-)\frac{ph'_x + qh'_y}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\\
2\rho h \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu h\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left\{2h\left[\lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)+2\mu\frac{\partial v_1}{\partial y}\right]\right\}\\
&\quad + 2h\mathfrak{Y} + (Y^+ + Y^-)\sqrt{1+p^2+q^2} + (Y^+ - Y^-)\frac{ph'_x + qh'_y}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\\
2\rho h \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu h\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(2\mu h\frac{\partial w_1}{\partial y}\right)+2h\mathfrak{Z}\\
&\quad + (Z^+ + Z^-)\sqrt{1+p^2+q^2} + (Z^+ - Z^-)\frac{ph'_x + qh_y}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.
\end{aligned}
\right.
$$

2. Statique des plaques planes chargées. — Considérons une plaque plane, homogène et d'épaisseur constante, située dans le plan horizontal, l'axe des z étant vertical ascendant. Elle supporte à sa partie supérieure une charge unitaire X, Y, Z. Nous allons écrire les équations du mouvement en nous contentant, pour commencer, de l'approximation d'ordre un. En supprimant l'indice, nous avons

$$
(8')\quad \left\{
\begin{aligned}
\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{X}{\varepsilon},\\
\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right]+\frac{Y}{\varepsilon},\\
\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\mu\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\mu\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{Z}{\varepsilon}
\end{aligned}
\right.
$$

(X, Y, Z, peuvent aussi désigner les composantes de la force extérieure globale qui agit sur l'élément d'aire $dx\,dy$ de la plaque, qu'il s'agisse de forces massiques ou de forces de surface). Les équations sont celles de l'élasticité à trois dimensions avec une force moyenne répartie dans toute l'épaisseur, le déplacement étant supposé indépendant de z. Le système précédent peut être considéré comme satisfaisant.

Avec l'approximation du second ordre, nous conservons les notations antérieures qui se simplifient :

$$
\begin{array}{lll}
A_1 = \dfrac{\partial u_1}{\partial x}, & A_2 = \dfrac{\partial v_1}{\partial y}, & A_3 = w_2;\\[2ex]
B_1 = \dfrac{\partial u_2}{\partial x}, & B_2 = \dfrac{\partial v_2}{\partial y}, & B_3 = 0;\\[2ex]
C_1 = \dfrac{\partial w_1}{\partial y} + v_2, & C_2 = \dfrac{\partial w_1}{\partial x} + u_2, & C_3 = \dfrac{\partial v_1}{\partial x} + \dfrac{\partial u_1}{\partial y};\\[2ex]
D_1 = \dfrac{\partial w_2}{\partial y}, & D_2 = \dfrac{\partial w_2}{\partial x}, & D_3 = \dfrac{\partial v_2}{\partial x} + \dfrac{\partial u_2}{\partial y}.
\end{array}
$$

On obtient alors les équations de la statique des plaques planes chargées :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\lambda A + 2\mu A_1) + \mu\frac{\partial C_3}{\partial y} + \mathfrak{X} + \frac{X^+ + X^-}{\varepsilon} = 0,$$

$$\mu\frac{\partial C_3}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda A + 2\mu A_2) + \mathfrak{Y} + \frac{Y^+ Y^-}{\varepsilon} = 0,$$

$$\mu\left(\frac{\partial C_2}{\partial x} + \frac{\partial C_1}{\partial y}\right) + \mathfrak{Z} + \frac{Z^+ + Z^-}{\varepsilon} = 0,$$

$$-\mu C_2 + \frac{\varepsilon^2}{12}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\lambda B + 2\mu B_1) + \mu\frac{\partial D_3}{\partial y}\right] + \frac{\varepsilon^2}{12}\mathfrak{X}'_z + \frac{X^+ - X^-}{2} = 0,$$

$$-\mu C_1 + \frac{\varepsilon^2}{12}\left[\mu\frac{\partial D_3}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda B + 2\mu B_2)\right] + \frac{\varepsilon^2}{12}\mathfrak{Y}'_z + \frac{Y^+ - Y^-}{2} = 0,$$

$$-(\lambda A + 2\mu A_3) + \mu\frac{\varepsilon^2}{12}\left(\frac{\partial D_2}{\partial x} + \frac{\partial D_1}{\partial y}\right) + \frac{\varepsilon^2}{12}\mathfrak{Z}'_z + \frac{Z^+ - Z^-}{2} = 0.$$

Formons enfin le système d'équations en u_i, v_i :

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}
&(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) + \mu\,\Delta u_1 + \lambda\frac{\partial w_2}{\partial x} = 0,\\
&(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) + \mu\,\Delta v_1 + \lambda\frac{\partial w_2}{\partial y} = 0,\\
&\mu\varepsilon\left(\Delta w_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\right) = p,\\
&\mu\left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + u_2\right) - \frac{\varepsilon^2}{12}\left[(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\right) + \mu\,\Delta u_2\right] = 0,\\
&\mu\left(\frac{\partial w_1}{\partial y} + v_2\right) - \frac{\varepsilon^2}{12}\left[(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\right) + \mu\,\Delta v_2\right] = 0,\\
&\lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + w_2\right) + 2\mu w_2 - \mu\frac{\varepsilon^2}{12}\Delta w_2 = -p.
\end{aligned}\right.$$

Nous nous sommes bornés à l'écrire pour le cas fréquent où l'on néglige les forces massiques dues à la pesanteur, mais où l'on tient compte d'une pression verticale unitaire p sur la face supérieure. Le symbole Δ désigne le laplacien à deux termes, en x et y. On peut remarquer que les première, deuxième et sixième équations ne contiennent que les trois fonctions inconnues u_1, v_1 w_2, tandis que les troisième, quatrième et cinquième équations ne contiennent que u_2, v_2, w_1.

Le calcul symbolique permet, en un sens, de résoudre de tels systèmes. Nous allons écrire successivement l'équation qui fournit v_1 quand u_1 et w_2 sont connus, l'équation qui donne u_1 quand w_2 est connu, et enfin l'équation à laquelle satisfait w_2. Pour n'avoir que des calculs algébriques d'élimination, désignons par X, Y les deux opérateurs différentiels $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\cdot$ Grâce à ces nouvelles notations, le système en u_1, v_1, w_2 prend l'aspect suivant :

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}
&[(\lambda+\mu)X^2 + \mu\,\Delta]u_1 + (\lambda+\mu)XY v_1 + \lambda X w_2 = 0,\\
&(\lambda+\mu)XY u_1 + [(\lambda+\mu)Y^2 + \mu\,\Delta]v_1 + \lambda Y w_2 = 0,\\
&\lambda X u_1 + \lambda Y v_1 + \left(\lambda + 2\mu - \mu\frac{\varepsilon^2}{12}\Delta\right)w_2 = -p.
\end{aligned}\right.$$

La première équation du système (10) donne v_1. Nous la considérons comme une équation du premier degré en v_1 et nous la résolvons comme telle, mais en prenant soin de ne jamais diviser par un opérateur différentiel, pour pouvoir interpréter plus simplement les résultats :

$$(\lambda+\mu)\,XY\,v_1 = -\,[(\lambda+\mu)\,X^2+\mu\Delta]\,u_1 - \lambda X\,w_2. \tag{11}$$

Portons la valeur de v_1 ainsi trouvée dans la deuxième équation du système (10), ou plus exactement, éliminons v_1 entre la première et la seconde équation, sans introduire de dénominateurs, comme s'il s'agissait d'équations linéaires. Nous formons ainsi l'équation en u_1 :

$$(\lambda+2\mu)\,\Delta^2 u_1 = -\,\lambda X\,\Delta w_2.$$

ou encore, $\mathcal{H}_1$ étant une fonction harmonique arbitraire,

$$(\lambda+2\mu)\,\Delta u_1 = -\,\lambda X\,w_2 + \mathcal{H}_1. \tag{12}$$

Si l'on porte cette valeur de u_1 dans la valeur de v_1 obtenue précédemment on trouve une autre valeur de u_1, que l'on aurait pu obtenir directement par la méthode d'élimination appliquée aux deux premières équations en u_1 et v_1 :

$$(\lambda+2\mu)\,\Delta^2 v_1 = -\,\lambda Y\,\Delta w_2.$$

ou encore

$$(\lambda+2\mu)\,\Delta v_1 = -\,\lambda Y\,w_2 + \mathcal{K}_1 \qquad (\Delta\mathcal{K}_1 = 0).$$

Mais ce procédé serait défectueux, car il semble introduire un arbitraire trop grand (fonctions arbitraires d'intégration) qu'on réduit d'ailleurs par un recours au système proposé.

Dans les relations qui donnent symboliquement u_1 et v_1, multiplions par X et Y respectivement, nous trouvons

$$(\lambda+2\mu)\,\Delta\,(X u_1 + Y v_1) = -\,\lambda\Delta\,w_2 + X\mathcal{H}_1 + Y\mathcal{K}_1.$$

Or, la même combinaison linéaire formée à partir des deux premières équations du système (10) donne

$$(\lambda+2\mu)\,\Delta\,(X u_1 + Y v_1) + \lambda\Delta\,w_2 = 0.$$

Par comparaison, nous constatons que la fonction harmonique $\mathcal{K}_1$ n'est pas arbitraire, comme nous l'avions annoncé, il est nécessaire que l'on ait

$$X\mathcal{H}_1 + Y\mathcal{K}_1 = 0.$$

Nous avons donc

$$(\lambda+2\mu)\,(X u_1 + Y v_1) + \lambda w_2 = \mathcal{L}_2 \qquad (\Delta\mathcal{L}_2 = 0).$$

Partant alors de la combinaison linéaire correcte entre u_1 et v_1, nous transportons dans la troisième relation du système (10) :

$$\mu\left[4(\lambda+\mu) - (\lambda+2\mu)\,\frac{\varepsilon^2}{12}\,\Delta\right] w_2 = -\,(\lambda+2\mu)\,p - \lambda\mathcal{L}_2. \tag{13}$$

Tirant, théoriquement, w_2 de cette équation, les équations (12) et (11) donnent u_1 et v_1. Bien entendu, il s'introduit un nombre important de fonctions arbitraires qui sont à déterminer grâce à des conditions aux limites dont nous n'entreprenons pas l'étude.

D'une manière analogue on écrit le système différentiel en u_2, v_2, w_1 :

$$(14) \quad \left\{\begin{aligned} &\left\{\mu - \frac{\varepsilon^2}{12}[(\lambda+\mu)X^2+\mu\Delta]\right\} u_2 - \frac{\varepsilon^2}{12} XY v_2 + \mu X w_1 = 0, \\ &-\frac{\varepsilon^2}{12}(\lambda+\mu) XY u_2 + \left\{\mu - \frac{\varepsilon^2}{12}[(\lambda+\mu)Y^2+\mu\Delta]\right\} v_2 + \mu Y w_1 = 0, \\ &X u_2 + Y v_2 + \Delta w_1 = \frac{p}{\mu\varepsilon}. \end{aligned}\right.$$

On forme comme précédemment les équations en v_2 et u_2 :

$$\frac{\varepsilon^2}{12} XY v_2 = \left\{\mu - \frac{\varepsilon^2}{12}[(\lambda+\mu)X^2+\mu\Delta]\right\} u_2 + \mu X w_1 = 0,$$

$$\left[\mu - \frac{\varepsilon^2}{12}(\lambda+2\mu)\Delta + \frac{\varepsilon^2}{144}(\lambda+2\mu)\Delta^2\right] u_2 = -\mu X\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{12}\Delta\right) w_1.$$

Si maintenant dans le système (14) nous multiplions la première équation par X, la seconde par Y, et que nous ajoutons membre à membre, nous formons la combinaison suivante :

$$\left[\mu - \frac{\varepsilon^2}{12}(\lambda+2\mu)\Delta\right](X u_2 + Y v_2) + \mu\Delta w_1 = 0,$$

qui permet l'élimination de u_2 et v_2 de la troisième équation du système (14) :

$$\frac{\varepsilon^2}{12}(\lambda+2\mu)\Delta^2 w_1 = \left[-\mu + \frac{\varepsilon^2}{12}(\lambda+2\mu)\Delta\right]\frac{p}{\mu\varepsilon}.$$

C'est une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre.

3. Vibration des plaques planes. — En mesurant, si c'est nécessaire, la déviation de chaque point à partir de la position d'équilibre sous l'action de charges données, nous pouvons supposer que ces dernières sont nulles, puisque le système différentiel est linéaire par rapport aux déplacements et par rapport aux charges. Les équations (7) permettent la mise en équations du problème de dynamique. Nous avons trois couples de relations telles que les suivantes :

$$\rho\varepsilon\frac{\partial^2 u_1}{\partial t_2} + \frac{\partial\varpi}{\partial u_1} = 0, \qquad \rho\frac{\varepsilon^3}{12}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \frac{\partial\varpi}{\partial u_2} = 0.$$

Les valeurs des dérivées du potentiel de forme sont les mêmes que dans le cas de la Statique. Nous pouvons écrire immédiatement les six équations du mouvement de la plaque, en l'absence de forces extérieures, avec l'approximation du second ordre :

$$\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) + \mu\Delta u_1 + \lambda \frac{\partial w_2}{\partial x} = 0,$$

$$\rho \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) + \mu\Delta v_1 + \lambda \frac{\partial w_2}{\partial y} = 0,$$

$$\rho \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + \mu\left(\Delta w_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\right) = 0,$$

$$\rho \frac{\varepsilon^2}{12}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \mu\left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + u_2\right) - \frac{\varepsilon^2}{12}\left[(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\right) + \mu\Delta u_2\right] = 0,$$

$$\rho \frac{\varepsilon^2}{12}\frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} + \mu\left(\frac{\partial w_1}{\partial y} + v_2\right) - \frac{\varepsilon^2}{12}\left[(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\right) + \mu\Delta v_2\right] = 0,$$

$$\rho \frac{\varepsilon^2}{12}\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + \lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) + (\lambda + 2\mu) w_2 - \mu\frac{\varepsilon^2}{12}\Delta w_2 = 0.$$

Comme précédemment, ce système se décompose en deux systèmes partiels où les fonctions inconnues sont, d'une part u_1, v_1, w_2, et d'autre part u_2, v_2, w_1.

Bornons-nous à une étude rapide des vibrations propres, celles pour lesquelles

$$u_1 = \mathcal{U}_1 e^{i\omega t}, \qquad u_2 = \mathcal{U}_2 e^{i\omega t}, \qquad \ldots,$$

ω étant une constante que nous déterminerons ultérieurement. Les six nouvelles fonctions inconnues sont solutions des deux systèmes suivants :

$$\left\{\begin{aligned} &[-\rho\omega^2 + (\lambda+\mu)X^2 + \mu\Delta]\,u_1 + (\lambda+\mu)XY\,v_1 + \lambda X\,w_2 = 0,\\ &(\lambda+\mu)XY\,u_1 + [-\rho\omega^2 + (\lambda+\mu)Y^2 + \mu\Delta]\,v_1 + \lambda Y\,w_2 = 0,\\ &\lambda(Xu_1 + Yv_1) + \left[(\lambda+2\mu) - \frac{\varepsilon^2}{12}(\rho\omega^2 + \mu\Delta)\right] w_2 = 0; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &\left\{\mu - \frac{\varepsilon^2}{12}[(\lambda+\mu)X^2 + \rho\omega^2 + \mu\Delta]\right\} u_2 - \frac{\varepsilon^2}{12}(\lambda+\mu)XY\,v_2 + \mu X\,w_1 = 0,\\ &-\frac{\varepsilon^2}{12}(\lambda+\mu)XY\,u_2 + \left\{\mu - \frac{\varepsilon^2}{12}[(\lambda+\mu)Y^2 + \rho\omega^2 + \mu\Delta]\right\} v_2 + \mu Y\,w_1 = 0,\\ &\mu(Xu_2 + Yv_2) + (\mu\Delta - \rho\omega^2)\,w_1 = 0. \end{aligned}\right.$$

La résolution symbolique de ces deux systèmes s'opère comme dans les cas précédents. Nous donnons seulement les équations auxquelles satisfont w_1 et w_2

$$\left\{\rho\omega^2\left[-(\lambda+2\mu) + \frac{\varepsilon^2}{12}\rho\omega^2\right] + (\lambda+\mu)\left[4\mu - \frac{\varepsilon^2}{12}\rho\omega^2\right]\Delta - \frac{\varepsilon^2}{12}\mu(\lambda+2\mu)\Delta^2\right\} w_1 = 0,$$

$$\left[-\mu\rho\omega^2 + \frac{\varepsilon^2}{12}\rho^2\omega^4\Delta - \frac{\varepsilon^2}{12}\mu(\lambda+2\mu)\Delta^2\right] w_2 = 0.$$

Les systèmes d'équations étant linéaires et homogènes, en tenant compte de conditions sur les frontières, on trouve la seule solution identiquement nulle, sauf si la constante ω prend des valeurs bien déterminées. Nous n'abordons pas l'étude de ce dernier problème.

4. Le potentiel de forme en variables quelconques. — On parvient de différentes manières au potentiel de forme calculé en variables quelconques, suivant les principes de base adoptés. On peut relire à ce sujet le chapitre X des *Tenseurs en Mécanique et en Élasticité* de Léon Brillouin plus spécialement consacré à l'Élasticité. Nous nous proposons ici de parvenir au but en partant de formules usuelles et en leur donnant un caractère tensoriel, en nous réservant de reprendre ailleurs la notion d'énergie en Mécanique.

On sait que le double de l'énergie nécessaire pour produire une déformation de composantes rectangulaires u, v, w s'exprime ainsi

$$2\varpi = \iiint [\lambda(e_1 + e_2 + e_3)^2 + 2\mu(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) + 4\mu(g_1^2 + g_2^2 + g_3^2)]\, dx\, dy\, dz,$$

avec les coefficients suivants de la déformation :

$$e_1 = u'_x, \qquad 2g_1 = w'_y + v'_z, \qquad \ldots,$$

λ et μ sont les coefficients de Lamé. Les notations données ci-dessus pour les coefficients de la déformation ne sont vraiment commodes qu'en axes rectangulaires, car elles ne font pas apparaître le caractère tensoriel de l'ensemble de ces coefficients. En surlignant les quantités évaluées en axes rectangulaires, nous posons

$$e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i},$$

de sorte que la correspondance entre les anciennes notations et les suivantes se fait ainsi :

$$\bar{e}_{11} = 2e_1, \qquad \bar{e}_{23} = 2g_1, \qquad \ldots.$$

En axes rectangulaires nous pouvons écrire le potentiel de forme de la manière suivante :

$$2\varpi = \iiint \left[\frac{\lambda}{4}\left(\overline{e_{11}}^2 + \overline{e_{22}}^2 + \overline{e_{33}}^2\right) + \frac{\mu}{2}\left(\overline{e_{11}}^2 + \overline{e_{22}}^2 + \overline{e_{33}}^2\right) + \mu\left(\overline{e_{23}}^2 + \overline{e_{31}}^2 + \overline{e_{12}}^2\right)\right] dx\, dy\, dz$$

La notation ci-dessus est mauvaise car le caractère tensoriel de diverses grandeurs apparaît mal. On sait qu'en axes rectangulaires λ et μ, au point de vue dimensionnel, sont le quotient d'une force par une surface. Un produit tel que $\lambda\, dx\, dy\, dz$ est homogène au produit d'une force par une longueur, c'est-à-dire, à un travail. Or, un travail est un scalaire, donc strictement invariant, comme toute énergie. Il est donc nécessaire que le crochet qui figure dans ϖ soit aussi un invariant. Comme il s'agit pour l'instant d'axes rectangulaires, la distinction entre covariance et contravariance n'est pas essentielle, et nous pouvons encore écrire

$$2\varpi = \iiint \left[\frac{\lambda}{4}(\bar{e}_1^1 + \bar{e}_2^2 + \bar{e}_3^3)^2 + \frac{\mu}{2}\left(\overline{e_1^1}^2 + \overline{e_2^2}^2 + \overline{e_3^3}^2\right) + \mu\left(\overline{e_2^3}^2 + \overline{e_3^1}^2 + \overline{e_1^2}^2\right)\right] dx\, dy\, dz.$$

Pour parvenir à un résultat d'écriture plus simple, introduisons les scalaires suivants :

$$\bar{e}_i^i = \bar{e}_1^1 + \bar{e}_2^2 + \bar{e}_3^3,$$
$$\bar{e}_i^k \bar{e}_k^i = \left(\overline{e_1^1}^2 + \overline{e_2^2}^2 + \overline{e_3^3}^2\right) + 2\left(\overline{e_2^3}^2 + \overline{e_3^1}^2 + \overline{e_1^2}^2\right).$$

Nous avons alors, toujours en axes rectangulaires,

$$2\varpi = \iiint \left(\frac{\lambda}{4} \overline{e_i^i}^2 + \frac{\mu}{2} \bar{e}_i^k \bar{e}_k^i\right) d\tau, \qquad d\tau = dx\, dy\, dz.$$

Nous ne ferons pas dans la suite la transformation tensorielle sur λ et μ qui sont des densités scalaires, puisque nous avons remarqué que leur produit par l'élément de volume $dx\,dy\,dz$, capacité scalaire, est un scalaire. Nous ne ferons le changement nécessaire que sur l'élément de volume, et non sur λ et μ dont nous conserverons la valeur en axes rectangulaires.

Nous avons alors en axes quelconques la valeur suivante du potentiel de forme

$$2\varpi = \iiint \left[\frac{\lambda}{4} (e_i^i)^2 + \frac{\mu}{2} e_i^k e_k^i\right] d\tau, \qquad d\tau = \frac{D(x, y, z)}{D(x^1, x^2, x^3)} dx^1 dx^2 dx^3.$$

Notons que $d\tau$ est l'élément de volume $dx\,dy\,dz$ et non la capacité scalaire $dx^1\,dx^2\,dx^3$.

Pour avoir une évaluation définitive du potentiel de forme, il nous reste à calculer les sommes contractées e_i^i et $e_i^k e_k^i$. Si nous nous reportons à la définition des $\overline{e_{ij}}$, nous pouvons, en axes rectangulaires, introduire des dérivations covariantes, identiques aux dérivations ordinaires :

$$\bar{e}_{ij} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}^j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}^i} = \frac{D\bar{u}_i}{D\bar{x}^j} + \frac{D\bar{u}_j}{D\bar{x}^i}.$$

Les expressions écrites ont un caractère tensoriel correct qui permet tous les changements d'axes. Nous avons en particulier

$$e_{ij} = \frac{Du_i}{Dx^j} + \frac{Du_j}{Dx^i}. \tag{14}$$

C'est la formule (X.44) de L. Brillouin. Si nous introduisons les composantes g^{jk} du tenseur métrique fondamental, nous pouvons obtenir les composantes mixtes de la déformation

$$e_i^k = g^{jk} e_{ij} = g^{jk} \frac{Du_i}{Dx^j} + g^{jk} \frac{Du_j}{Dx^i}.$$

Dans le second terme faisons pénétrer g^{jk} sous la dérivation; nous savons qu'il se comporte comme une constante : On voit ainsi apparaître les composantes contravariantes du déplacement. Employons-les systématiquement pour calculer les composantes mixtes de la déformation

$$e_i^k = g^{jk} g_{ih} \frac{Du^h}{Dx^j} + \frac{Du^k}{Dx^i}.$$

De ces formules nous déduisons en particulier la dilatation

$$e_i^i = g^{ji} g_{ih} \frac{Du^h}{Dx^j} + \frac{Du^i}{Dx^i} = 2 \frac{Du^i}{Dx^i}.$$

Nous avons de même le second invariant,

$$\begin{aligned} e_i^k e_k^i &= \left(g^{jk} g_{ih} \frac{Du^h}{Dx^j} + \frac{Du^k}{Dx^i} \right) \left(g^{\alpha i} g_{k\beta} \frac{Du^\beta}{Dx^\alpha} + \frac{Du^i}{Dx^k} \right) \\ &= g^{jk} g_{ih} g^{\alpha i} g_{k\beta} \frac{Du^h}{Dx^j} \frac{Du^\beta}{Dx^\alpha} + g^{jk} g_{ih} \frac{Du^h}{Dx^j} \frac{Du^i}{Dx^k} + g^{\alpha i} g_{k\beta} \frac{Du^\beta}{Dx^\alpha} \frac{Du^k}{Dx^i} + \frac{Du^k}{Dx^i} \frac{Du^i}{Dx^k}. \end{aligned}$$

On constate que le premier et le quatrième termes sont identiques. On fait la même constatation sur le deuxième et le troisième, après avoir remplacé les indices muets j, k, i, h par α, i, k, β. Nous parvenons à la valeur suivante :

$$(15) \quad 2\varpi = \iiint \left[\lambda \left(\frac{Du^i}{Dx^i} \right)^2 + \mu \left(g^{jk} g_{ih} \frac{Du^h}{Dx^j} \frac{Du^i}{Dx^k} + \frac{Du^k}{Dx^i} \frac{Du^i}{Dx^k} \right) \right] \frac{D(x, y, z)}{D(x^1, x^2, x^3)} dx^1 dx^2 dx^3.$$

qui fournit la valeur cherchée du potentiel de forme. Ultérieurement, nous aurons à préciser le tenseur métrique fondamental dont la connaissance permet de calculer les dérivées covariantes.

5. Vibrations des surfaces de révolution. — Considérons une surface de révolution autour de Oz, limitée soit à deux parallèles, soit à un seul parallèle, la surface rencontrant alors l'axe de révolution. Pour étudier les vibrations de la coque ainsi définie, nous supposons qu'elle est d'épaisseur constante et qu'il n'existe pas de forces extérieures. Nous employons le même raisonnement qu'au paragraphe 1 pour mettre le problème en équations, après avoir, au préalable, obtenu le potentiel de forme en coordonnées semi-polaires grâce aux résultats du paragraphe précédent. Ce dernier résultat peut-être obtenu à la suite d'un changement de variables et de composantes dans la valeur du potentiel de forme de l'espace euclidien à trois dimensions rectangulaires.

En coordonnées semi-polaires le carré de l'élément linéaire euclidien a pour expression

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 \qquad (x^1 = r,\ x^2 = \theta,\ x^3 = z).$$

d'où le tableau des g_{ik} et celui des g^{ik} :

$$\| g_{ik} \| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \| g^{ik} \| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

On en déduit les symboles de Christoffel. Ils sont tous nuls, sauf

$$\Gamma_{12,2} = \Gamma_{21,2} = r, \qquad \Gamma_{22,1} = -r,$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \qquad \Gamma_{22}^1 = -r,$$

On en déduit le tableau des dérivées covariantes des composantes contravariantes $\mathfrak{U}^i$ du déplacement :

$$\frac{D\mathfrak{U}^1}{Dx^1} = \frac{\partial \mathfrak{U}^1}{\partial r}, \qquad \frac{D\mathfrak{U}^1}{Dx^2} = \frac{\partial \mathfrak{U}^1}{\partial \theta} - r\mathfrak{U}^2, \qquad \frac{D\mathfrak{U}^1}{Dx^3} = \frac{\partial \mathfrak{U}^1}{\partial z},$$

$$\frac{D\mathfrak{U}^2}{Dx^1} = \frac{\partial \mathfrak{U}^2}{\partial r} + \frac{\mathfrak{U}^2}{r}, \qquad \frac{D\mathfrak{U}^2}{Dx^2} = \frac{\partial \mathfrak{U}^2}{\partial \theta} + \frac{\mathfrak{U}^1}{r}, \qquad \frac{D\mathfrak{U}^2}{Dx^3} = \frac{\partial \mathfrak{U}^2}{\partial z},$$

$$\frac{D\mathfrak{U}^3}{Dx^1} = \frac{\partial \mathfrak{U}^3}{\partial r}, \qquad \frac{D\mathfrak{U}^3}{Dx^2} = \frac{\partial \mathfrak{U}^3}{\partial \theta}, \qquad \frac{D\mathfrak{U}^3}{Dx^3} = \frac{\partial \mathfrak{U}^3}{\partial z}.$$

La formule (15) nous permet d'évaluer le potentiel de forme. Utilisant le jacobien

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, z)} = r,$$

nous trouvons

$$2\varpi = \iiint \left\{ \lambda \left[\frac{\partial \mathfrak{U}^1}{\partial r} + \frac{\partial \mathfrak{U}^2}{\partial \theta} + \frac{\mathfrak{U}^1}{r} + \frac{\partial \mathfrak{U}^3}{\partial z} \right]^2 + 2\mu \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{U}^1}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{U}^2}{\partial \theta} + \frac{\mathfrak{U}^1}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{U}^3}{\partial z} \right)^2 \right] \right.$$
$$\left. + \mu \left[\left(r\frac{\partial \mathfrak{U}^2}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{U}^1}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{U}^1}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{U}^3}{\partial r} \right)^2 + \left(r\frac{\partial \mathfrak{U}^2}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{U}^3}{\partial \theta} \right)^2 \right] \right\} r\,dr\,d\theta\,dz,$$

après avoir regroupé des termes, comme pour les coordonnées rectangulaires.

Désignons maintenant par R, Θ, Z, les coordonnées semi-polaires d'un point de la coque dont nous voulons étudier les vibrations. Prenons r, θ, coordonnées polaires de la projection du point considéré de la coque sur le plan xOy, comme paramètres sur la surface moyenne de la coque, et soit ζ la cote relative du point de la coque par rapport à la surface moyenne. r, θ, ζ sont donc trois paramètres pouvant servir à fixer la position d'un point de la coque. Entre R, Θ, Z et r, θ, ζ, nous avons les relations suivantes :

$$R = r, \qquad \Theta = \theta, \qquad Z = z + \zeta.$$

$z = z(r)$ est l'ordonnée sur la surface moyenne. Le paramètre ζ varie entre + et $-h(r)$, h étant lié à l'épaisseur de la surface par la relation

$$2h = \varepsilon\sqrt{1 + z'^2}.$$

Les accents désignent ici les dérivations par rapport à r, quand il s'agit de fonctions dépendant uniquement de r.

Dans une *approximation du premier ordre,* assez médiocre, mais sans doute meilleure que dans le cas analogue des poutres, nous admettons que $\mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{U}^2$, $\mathfrak{U}^3$ ne dépendent pas de ζ. Les trois dérivées en z sont donc nulles dans la région de l'espace qui nous intéresse. Nous avons alors le potentiel de forme particulier suivant :

$$2\varpi = \varepsilon \iint \left\{ \lambda \left[\frac{\partial \mathfrak{U}^1}{\partial r} + \frac{\partial \mathfrak{U}^2}{\partial \theta} + \frac{\mathfrak{U}^1}{r} \right]^2 + 2\mu \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{U}^1}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{U}^2}{\partial \theta} + \frac{\mathfrak{U}^1}{r} \right)^2 \right] \right.$$
$$\left. + \mu \left[\left(r\frac{\partial \mathfrak{U}^2}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{U}^1}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{U}^3}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{U}^3}{\partial \theta} \right)^2 \right] \right\} r\sqrt{1 + z'^2}\,dr\,d\theta,$$

que l'on obtient après avoir effectué l'intégration en ζ. Nous pouvons maintenant écrire les dérivées fonctionnelles du potentiel de forme

$$\frac{\partial\varpi}{\partial\mathcal{U}^1}=\frac{\lambda\varkappa}{r}\left(\frac{\partial\mathcal{U}^1}{\partial r}+\frac{\partial\mathcal{U}^2}{\partial\theta}+\frac{\mathcal{U}^1}{r}\right)+\frac{2\mu\varkappa}{r}\left(\frac{\partial\mathcal{U}^2}{\partial\theta}+\frac{\mathcal{U}^1}{r}\right)$$
$$-\frac{\partial}{\partial r}\varkappa\left[\lambda\left(\frac{\partial\mathcal{U}^1}{\partial r}+\frac{\partial\mathcal{U}^2}{\partial\theta}+\frac{\mathcal{U}^1}{r}\right)+2\mu\frac{\partial\mathcal{U}^1}{\partial r}\right]-\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\mu\varkappa}{r}\left(r\frac{\partial\mathcal{U}^2}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\mathcal{U}^1}{\partial\theta}\right)\right],$$
$$\frac{\partial\varpi}{\partial\mathcal{U}^2}=-\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\mu\varkappa}{r}\left(r\frac{\partial\mathcal{U}^2}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\mathcal{U}^1}{\partial\theta}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial\theta}\varkappa\left[\lambda\left(\frac{\partial\mathcal{U}^1}{\partial r}+\frac{\partial\mathcal{U}^2}{\partial\theta}+\frac{\mathcal{U}^1}{r}\right)+2\mu\left(\frac{\partial\mathcal{U}^2}{\partial\theta}+\frac{\mathcal{U}^1}{r}\right)\right],$$
$$\frac{\partial\varpi}{\partial\mathcal{U}^3}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\mu\varkappa\frac{\partial\mathcal{U}^3}{\partial r}\right)-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\mu\varkappa}{r^2}\frac{\partial\mathcal{U}^3}{\partial\theta}\right),\qquad \varkappa=\varepsilon r\sqrt{1+z'^2}.$$

Les composantes contravariantes de la vitesse d'un point de la coque sont $\frac{\partial\mathcal{U}^i}{\partial t}$, et par suite, le carré scalaire de la vitesse vaut

$$\left(\frac{\partial\mathcal{U}^1}{\partial t}\right)^2+r^2\left(\frac{\partial\mathcal{U}^2}{dt}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{U}^3}{\partial t}\right)^2.$$

Nous pouvons alors évaluer la force vive de la coque sous forme d'intégrale triple, puis nous effectuons l'intégration en ζ, ce qui nous conduit au résultat suivant :

$$2\,\mathrm{T}=\iint\rho\left[\left(\frac{\partial\mathcal{U}^1}{\partial t}\right)^2+r^2\left(\frac{\partial\mathcal{U}^2}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{U}^3}{\partial t}\right)^2\right]2\,h\,r\,dr\,d\theta,$$

où ρ représente la densité cubique de la coque, que nous supposons constante. $\mathcal{U}^1$, $\mathcal{U}^2$, $\mathcal{U}^3$ sont alors solution du système différentiel suivant :

$$(16)\qquad\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\varkappa\frac{\partial\mathcal{U}^1}{\partial t}\right)+\frac{\partial\varpi}{\partial\mathcal{U}^1}=0,\qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\varkappa r^2\frac{\partial\mathcal{U}^2}{\partial t}\right)+\frac{\partial\varpi}{\partial\mathcal{U}^2}=0,\\&\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\varkappa\frac{\partial\mathcal{U}^3}{\partial t}\right)+\frac{\partial\varpi}{\partial\mathcal{U}^3}=0,\end{aligned}\right.$$

où les dérivées du potentiel de forme ont les valeurs précédemment calculées.

Admettons maintenant que la vibration de la surface de révolution ait lieu de sorte que le mouvement soit périodique :

$$\mathcal{U}^k(r,\theta,t)=\mathcal{V}^k(r,\theta)\,e^{i\omega t}\qquad(\omega=\text{const.}).$$

Les fonctions $\mathcal{V}^k$ satisfont alors au système différentiel suivant :

$$(17)\qquad\left\{\begin{aligned}&\rho\omega^2 r\sqrt{1+z'^2}\mathcal{V}^1-\lambda\sqrt{1+z'^2}\left(\frac{\partial\mathcal{V}^1}{\partial r}+\frac{\partial\mathcal{V}^2}{\partial\theta}+\frac{\mathcal{V}^1}{r}\right)-2\mu\sqrt{1+z'^2}\left(\frac{\partial\mathcal{V}^2}{\partial\theta}+\frac{\mathcal{V}^1}{r}\right)\\&\quad+\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\sqrt{1+z'^2}\left[\lambda\left(\frac{\partial\mathcal{V}^1}{\partial r}+\frac{\partial\mathcal{V}^2}{\partial\theta}+\frac{\mathcal{V}^1}{r}\right)+2\mu\frac{\partial\mathcal{V}^1}{\partial r}\right]\right\}\\&\qquad\qquad+\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\mu\sqrt{1+z'^2}\left(r\frac{\partial\mathcal{V}^2}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\mathcal{V}^1}{\partial\theta}\right)\right]=0,\\&\rho\omega^2 r^3\sqrt{1+z'^2}\mathcal{V}^2+\frac{\partial}{\partial r}\left[\mu r^2\sqrt{1+z'^2}\left(r\frac{\partial\mathcal{V}^2}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\mathcal{V}^1}{\partial\theta}\right)\right]\\&\quad-\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{r\sqrt{1+z'^2}\left[\lambda\left(\frac{\partial\mathcal{V}^1}{\partial r}+\frac{\partial\mathcal{V}^2}{\partial\theta}+\frac{\mathcal{V}^1}{r}\right)+2\mu\left(\frac{\partial\mathcal{V}^2}{\partial\theta}+\frac{\mathcal{V}^1}{r}\right)\right]\right\}=0,\\&\frac{1}{r\sqrt{1+z'^2}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\sqrt{1+z'^2}\frac{\partial\mathcal{V}^3}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\mathcal{V}^3}{\partial\theta^2}+\frac{\rho\omega^2}{\mu}\mathcal{V}^3=0.\end{aligned}\right.$$

On constate la disparition de l'épaisseur ε des équations, ce qui ne semble pas conforme à l'expérience, mais il se pourrait peut être que pour des épaisseurs très faibles ce résultat puisse être considéré comme acceptable. Dans le système précédent les deux premières équations forment un système à deux inconnues $\mathcal{V}^1$ et $\mathcal{V}^2$, tandis que la troisième équation ne renferme que la seule inconnue $\mathcal{V}^3$.

Comme application des équations précédentes, proposons-nous de trouver la période fondamentale d'une cloche dont le sommet et le plan tangent en ce point sont maintenus fixes.

Ce problème est différent de celui où l'on étudie les vibrations d'une cloche sonnant à la volée, qui oscille autour d'un axe horizontal fixe encastré dans la cloche, sous l'action de la pesanteur. Il est vraisemblable que les résultats quantitatifs sont différents.

Nous admettons, dans le problème proposé, que la vibration a lieu dans le plan méridien de chaque point, $\mathcal{V}^2 = 0$, et que la répartition des déplacements soit de révolution; $\mathcal{V}^1$ et $\mathcal{V}^3$ sont des fonctions de r seul, indépendantes de θ. Le système différentiel ci-dessus se simplifie, et se réduit aux deux équations suivantes :

$$\rho\omega^2 r\mathcal{V}^1 - \lambda\left(\frac{d\mathcal{V}^1}{dr} + \frac{\mathcal{V}^1}{r}\right) - \mu\frac{\mathcal{V}^1}{r} + \frac{1}{\sqrt{1+z'^2}}\frac{d}{dr}\left\{r\sqrt{1+z'^2}\left[\lambda\left(\frac{d\mathcal{V}^1}{dr} + \frac{\mathcal{V}^1}{r}\right) + 2\mu\frac{d\mathcal{V}^1}{dr}\right]\right\} = 0,$$

$$\frac{1}{r\sqrt{1+z'^2}}\frac{d}{dr}\left(r\sqrt{1+z'^2}\frac{d\mathcal{V}^3}{dr}\right) + \frac{\rho\omega^2}{\mu}\mathcal{V}^3 = 0,$$

ou, après avoir ordonné,

$$\frac{d^2\mathcal{V}^1}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{z'z''}{1+z'^2}\right)\frac{d\mathcal{V}^1}{dr} + \frac{\mathcal{V}^1}{\lambda+2\mu}\left[\rho\omega^2 - \frac{\lambda+\mu}{r^2} + \frac{\lambda z'z''}{r(1+z'^2)}\right] = 0, \tag{18}$$

$$\frac{d^2\mathcal{V}^3}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{z'z''}{1+z'^2}\right)\frac{d\mathcal{V}^3}{dr} + \frac{\rho\omega^2}{\mu}\mathcal{V}^3 = 0. \tag{19}$$

Le problème de Mathématiques que nous avons à résoudre actuellement se pose ainsi : Pour chacune des équations précédentes déterminer une constante ω de manière que chacune de ces équations possède une solution qui satisfasse à des conditions aux limites que nous allons énoncer. Il est à présumer que les deux nombres ω que l'on détermine ainsi sont en général différents (il s'agit bien entendu du plus petit nombre que l'on puisse ainsi déterminer, car les conditions aux limites donnent une infinité de nombres ω, le plus petit de chaque série correspond à la période fondamentale). Une cloche peut être considérée comme bien construite si les deux périodes fondamentales, correspondant à chacune des équations différentielles sont égales.

La cloche étant parfaitement encastrée en son sommet, cela entraîne la fixité du sommet $\mathcal{V}^1 = \mathcal{V}^3 = 0$ pour $r = 0$, ainsi que la fixité de la tangente à la méridienne $\frac{d\mathcal{V}^3}{dr}=0$. D'autre part, au bord libre de la cloche les tensions internes doivent être nulles. Comme la déformation est de révolution il suffit d'écrire cette condition lorsque $\theta=0$, r ayant sa valeur maximum. Nous allons calculer les tensions internes en partant des composantes contravariantes du déplacement, $\mathcal{U}^1$, $\mathcal{U}^2$, $\mathcal{U}^3$, en passant ensuite par les composantes suivant les axes qui s'introduisent normalement dans l'étude des coordonnées semi-polaires, $\mathcal{U}^1$, $r\mathcal{U}^2$, $\mathcal{U}^3$, puis par les composantes rectangulaires

$$(\mathcal{V}^1\cos\theta - r\mathcal{V}^2\sin\theta)\,e^{i\omega t},\quad (\mathcal{V}^1\sin\theta+\mathcal{V}^2\cos\theta)\,e^{i\omega t},\quad \mathcal{V}^3\,e^{i\omega t}.$$

Or $\mathcal{V}^1$ et $\mathcal{V}^3$ sont des fonctions de r, et $\mathcal{V}^2=0$. Utilisant les différentielles suivantes :

$$dr=\cos\theta\,dx+\sin\theta\,dy,\qquad r\,d\theta=-\sin\theta\,dx+\cos\theta\,dy,$$

il nous est possible d'obtenir les coefficients de la déformation. On en déduit le tenseur des efforts, et en particulier

$$\mathrm{N}_1=\left[\lambda\left(\frac{d\mathcal{V}^1}{dr}+\frac{\mathcal{V}^1}{r}\right)+2\mu\left(\frac{d\mathcal{V}^1}{dr}\cos^2\theta+\frac{\mathcal{V}^1}{r}\sin^2\theta\right)\right]e^{i\omega t},$$

$$\mathrm{T}_3=2\mu\left(\frac{d\mathcal{V}^1}{dr}-\frac{\mathcal{V}^1}{r}\right)\sin\theta\cos\theta\,e^{i\omega t},$$

$$\mathrm{T}_2=\mu\,\frac{d\mathcal{V}^3}{dr}\cos\theta\,e^{i\omega t}.$$

Ces quantités permettent de calculer les composantes de la tension en un point où r est maximum et θ nul :

$$\mathrm{N}_1=\left[(\lambda+2\mu)\frac{d\mathcal{V}^1}{dr}+\lambda\frac{\mathcal{V}^1}{r}\right]e^{i\omega t},\qquad \mathrm{T}_3=0,\qquad \mathrm{T}_2=\mu\frac{d\mathcal{V}^3}{dr}e^{i\omega t}.$$

Les expressions ci-dessus sont nulles et nous obtenons ainsi les conditions aux limites cherchées. En résumé, pour l'équation (18), nous recherchons un nombre ω tel qu'il existe une solution pour laquelle

$$\mathcal{V}^1(0)=0;\qquad (\lambda+2\mu)\frac{d\mathcal{V}^1}{dr}+\lambda\frac{\mathcal{V}^1}{r}=0\qquad \text{pour}\quad r_{\max},$$

tandis que pour l'équation (19) nous recherchons une solution satisfaisant aux conditions aux limites suivantes :

$$\mathcal{V}^3(0)=0;\qquad \frac{d\mathcal{V}^3}{dr}=0\qquad \text{pour}\quad r=0\quad \text{et}\quad r_{\max}.$$

Les deux équations (18) et (19) se ramènent à l'équation de Bessel lorsque

$$z=\int\sqrt{\left(\frac{r}{a}\right)^{2k}-1}\,dr,$$

a et k étant des constantes. $k=0$ correspond au cône de révolution. Pour toutes ces coques, l'arc de la méridienne est br^{k+1} ($b=$ const.).

Recherchons maintenant des solutions du système (17) qui soient de la forme suivante :

$$\mathcal{V}^1=\varphi(r)\,e^{ni\theta},\qquad \mathcal{V}^2=i\chi(r)\,e^{ni\theta},\qquad \mathcal{V}^3=\psi(r)\,e^{ni\theta},\tag{20}$$

n étant un entier assurant la périodicité du déplacement sur la surface de révolution. Admettant, ce que nous allons bientôt établir, qu'il existe des fonctions réelles φ, χ, ψ telles que les fonctions $\mathcal{V}^1$, $\mathcal{V}^2$, $\mathcal{V}^3$ qu'on en déduit par les formules précédentes soient solutions du problème général des vibrations d'une surface de révolution, on peut trouver des solutions réelles à partir de $\mathcal{V}^1$, $\mathcal{V}^2$, $\mathcal{V}^3$ de la manière suivante. Le remplacement de i en $-i$ dans les formules (20) fournit une deuxième solution complexe $\overline{\mathcal{V}}^1$, $\overline{\mathcal{V}}^2$, $\overline{\mathcal{V}}^3$. Comme le système proposé est linéaire, on peut former les combinaisons

$$\frac{1}{2}(\mathcal{V}^1+\overline{\mathcal{V}}^1),\quad \frac{1}{2}(\mathcal{V}^2+\overline{\mathcal{V}}^2),\quad \frac{1}{2}(\mathcal{V}^3+\overline{\mathcal{V}}^3),$$
$$\frac{1}{2i}(\mathcal{V}^1-\overline{\mathcal{V}}^1),\quad \frac{1}{2i}(\mathcal{V}^2-\overline{\mathcal{V}}^2),\quad \frac{1}{2i}(\mathcal{V}^3-\overline{\mathcal{V}}^3),$$

qui sont réelles, et satisfont encore aux équations du problème.

Transportant les valeurs des $\mathcal{V}^k$ dans le système (17), on constate que φ et χ sont solution du système différentiel réel

$$\frac{1}{\sqrt{1+z'^2}}\frac{d}{dr}\left\{r\sqrt{1+z'^2}\left[\lambda(\varphi'-n\chi)+(\lambda+2\mu)\frac{\varphi}{r}\right]\right\}$$
$$-n\mu\left(r\chi'+\frac{n\varphi}{r}\right)-\lambda\varphi'+(\lambda+2\mu)\left(n\chi-\frac{\varphi}{r}\right)+\rho\omega^2 r\varphi=0,$$
$$\frac{\mu}{\sqrt{1+z'^2}}\frac{d}{dr}\left[r^2\sqrt{1+z'^2}\left(r\chi'+\frac{n\varphi}{r}\right)\right]+nr\left[\lambda\varphi'+(\lambda+2\mu)\left(-n\chi+\frac{\varphi}{r}\right)\right]+\rho\omega^2 r^3\chi=0,$$

et que ψ est solution de l'équation différentielle

$$\frac{1}{\sqrt{1+z'^2}}\frac{d}{dr}(r\sqrt{1+z'^2}\,\psi')+\left(\frac{\rho\omega^2 r}{\mu}-\frac{n^2}{r}\right)\psi=0,$$

ou

$$\psi''+\left(\frac{1}{r}+\frac{z'z''}{1+z'^2}\right)\psi'+\left(\frac{\rho\omega^2}{\mu}-\frac{n^2}{r^2}\right)=0.$$

Ces équations étant *réelles*, elles possèdent bien des solutions réelles comme nous l'avions affirmé.

Il resterait ensuite à trouver les solutions de ces équations différentielles qui vérifient les conditions aux limites précédemment données. En particulier, les conditions sur le bord libre de la cloche peuvent s'obtenir de la manière suivante. Les composantes rectangulaires du déplacement d'un point de la coque s'expriment en fonction des composantes contravariantes de la manière indiquée dans la recherche de la période fondamentale :

$$u = (\mathcal{V}^1 \cos\theta - r\mathcal{V}^2 \sin\theta)\, e^{i\omega t}, \qquad v = (\mathcal{V}^1 \sin\theta + r\mathcal{V}^2 \cos\theta)\, e^{i\omega t}, \qquad w = \mathcal{V}^3\, e^{i\omega t},$$

les $\mathcal{V}^i$ étant donnés par les formules (20). Nous trouvons ainsi

$$u = (\varphi \cos\theta - ir\chi \sin\theta)\, e^{ni\theta + i\omega t}, \qquad v = (\varphi \sin\theta + ir\chi \cos\theta)\, e^{ni\theta + i\omega t}, \qquad w = \psi\, e^{ni\theta + i\omega t},$$

ce qui nous permet de déterminer le tableau des composantes du tenseur des tensions

$$\begin{aligned}
N_1 &= \lambda\left(\varphi' + \frac{\varphi}{r} - n\chi\right) + 2\mu\left[\varphi' \cos^2\theta + \left(\frac{\varphi}{r} - n\chi\right)\sin^2\theta - i\left(r\chi' + \frac{n\varphi}{r}\right)\sin\theta\cos\theta\right],\\
N_2 &= \lambda\left(\varphi' + \frac{\varphi}{r} - n\chi\right) + 2\mu\left[\varphi' \sin^2\theta + \left(\frac{\varphi}{r} - n\chi\right)\cos^2\theta + i\left(r\chi' + \frac{n\varphi}{r}\right)\sin\theta\cos\theta\right],\\
N_3 &= \lambda\left(\varphi' + \frac{\varphi}{r} - n\chi\right),\\
T_1 &= \mu\left(\psi' \sin\theta + ni\frac{\psi}{r}\cos\theta\right),\\
T_2 &= \mu\left(\psi' \cos\theta - ni\frac{\psi}{r}\sin\theta\right),\\
T_3 &= \mu\left[2\left(\varphi' - \frac{\varphi}{r} + n\chi\right)\sin\theta\cos\theta + i\left(\frac{n\varphi}{r} + r\chi'\right)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\right].
\end{aligned}$$

Il nous intéresse de connaître les composantes de la tension relative à la coupure ayant pour cosinus directeurs $\cos\theta$, $\sin\theta$, o. Ce sont les trois fonctions suivantes :

$$N_1\cos\theta + T_3\sin\theta, \quad T_3\cos\theta + N_2\sin\theta, \quad T_2\cos\theta + T_1\sin\theta$$

qui doivent être nulles quel que soit θ :

$$\begin{aligned}
&\left[\lambda\left(\varphi' + \frac{\varphi}{r} - n\chi\right) + 2\mu\varphi'\right]\cos\theta - \mu i\left(\frac{n\varphi}{r} + r\chi'\right)\sin\theta,\\
&\left[\lambda\left(\varphi' + \frac{\varphi}{r} - n\chi\right) + 2\mu\varphi'\right]\sin\theta + \mu i\left(\frac{n\varphi}{r} + r\chi'\right)\cos\theta, \quad \mu\psi'.
\end{aligned}$$

Pour le rayon extrême de la cloche nous devons donc avoir les trois conditions suivantes :

$$\lambda\left(\varphi' + \frac{\varphi}{r} - n\chi\right) + 2\mu\varphi' = 0,$$

$$\frac{n\varphi}{r} + r\chi' = 0, \qquad \psi' = 0.$$

6. Vibration des coques de révolution. Seconde approximation. — Désignons

par R, Θ, Z les coordonnées semi-polaires d'un point de la coque, et soit $z = z(r)$ l'équation de la méridienne de la surface moyenne. Exprimons les coordonnées R, Θ, Z d'un point de la coque au moyen de trois paramètres r, θ, ζ de la manière suivante : r et θ sont les coordonnées polaires de la projection du point considéré sur le plan xOy, et ζ représente la cote relative de ce point par rapport à la surface moyenne,

$$R = r, \qquad \Theta = \theta, \qquad Z = z(r) + \zeta.$$

Comme au paragraphe 1, ζ varie entre $-h$ et $+h(r)$, h étant lié à l'épaisseur ε de la surface par la relation (2),

$$2h = \varepsilon\sqrt{1 + z'^2}.$$

Les accents désignent ici les dérivations par rapport à r lorsqu'il s'agit de fonctions qui ne dépendent que de r. Dans une approximation du second ordre on admet que l'on a une bonne représentation des composantes du déplacement en prenant

$$\mathfrak{U}^i = u^i(r, \theta) + \zeta v^i(r, \theta).$$

En remarquant que

$$dr = dR, \qquad d\theta = d\Theta, \qquad d\zeta = dZ - z'\, dR,$$

on peut appliquer les résultats obtenus au début du paragraphe 5 au calcul du potentiel de forme. On obtient

$$2\varpi = \iiint [\lambda(A + \zeta B)^2 + 2\mu\Sigma(A_i + \zeta B_i)^2 + \mu\Sigma(C_i + \zeta D_i)^2]\, r\, dr\, d\theta\, d\zeta,$$

après avoir posé

$$A = \Sigma A_i, \qquad B = \Sigma B_i,$$

$$A_1 = \frac{\partial u^1}{\partial r} - z'v^1, \qquad A_2 = \frac{\partial u^2}{\partial \theta} + \frac{u^1}{r}, \qquad A_3 = v^3,$$

$$B_1 = -\frac{\partial v^1}{\partial r}, \qquad B_2 = \frac{\partial v^2}{\partial \theta} + \frac{v^1}{r}, \qquad B_3 = 0,$$

$$C_1 = r\frac{\partial u^2}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u^1}{\partial \theta} - z'v^2, \qquad C_2 = v^1 + \frac{\partial u^3}{\partial r} - z'v^3, \qquad C_3 = rv^2 + \frac{1}{r}\frac{\partial u^3}{\partial \theta},$$

$$D_1 = \frac{\partial v^2}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v^1}{\partial \theta}, \qquad D_2 = \frac{\partial v^3}{\partial r}, \qquad D_3 = \frac{1}{r}\frac{\partial v^3}{\partial \theta}.$$

Effectuons l'intégration en ζ,

$$2\varpi = \iint \left[2hr(\lambda A^2 + 2\mu\Sigma A_i^2 + \mu\Sigma C_i^2) + \frac{2h^3}{3} r(\lambda B^2 + 2\mu\Sigma B_i^2 + \mu\Sigma D_i^2)\right] dr\, d\theta,$$

et calculons maintenant les dérivées partielles du potentiel de forme

$$\frac{\partial \varpi}{\partial u^1} = 2h(\lambda A + 2\mu A_2) - \frac{\partial}{\partial r} 2hr(\lambda A + 2\mu A_1) - \frac{\partial}{\partial \theta} 2\mu h C_1,$$

$$\frac{\partial \varpi}{\partial u^2} = - \frac{\partial}{\partial r} 2\mu h r^2 C_1 - \frac{\partial}{\partial \theta} 2hr(\lambda A + 2\mu A_2),$$

$$\frac{\partial \varpi}{\partial u^3} = - \frac{\partial}{\partial r} 2\mu h r C_2 - \frac{\partial}{\partial \theta} 2\mu h C_3,$$

$$\frac{\partial \varpi}{\partial v^1} = 2hr[-(\lambda A + 2\mu A_1)z' + \mu C_2] + \frac{2h^3}{3}(\lambda B + 2\mu B_2) + \frac{\partial}{\partial r}\frac{2h^3}{3} r(\lambda B + 2\mu B_1) - \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{2h^3}{3} D_1,$$

$$\frac{\partial \varpi}{\partial v^2} = 2\mu h r^2 C_3 - \frac{\partial}{\partial r}\frac{2h^3}{3}\mu r D_1 - \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{2h^3}{3} r(\lambda B + 2\mu B_2),$$

$$\frac{\partial \varpi}{\partial v^3} = 2hr(\lambda A + 2\mu A_3 - \mu z' C_2) - \frac{\partial}{\partial r}\frac{2h^3}{3}\mu r D_2 - \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{2h^3}{3}\mu D_3.$$

Pour mettre en équations le problème de la vibration de la coque en l'absence de forces extérieures, formons la force vive et appliquons la méthode de Lagrange,

$$2T = \iiint \rho \left[\left(\frac{\partial u^1}{\partial t} + \zeta\frac{\partial v^1}{\partial t}\right)^2 + r^2\left(\frac{\partial u^2}{\partial t} + \zeta\frac{\partial v^2}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^3}{\partial t} + \zeta\frac{\partial v^3}{\partial t}\right)^2\right] r\,dr\,d\theta\,d\zeta,$$

ou après l'intégration en ζ,

$$2T = \iint \rho \left\{ 2h\left[\left(\frac{\partial u^1}{\partial t}\right)^2 + r^2\left(\frac{\partial u^2}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^3}{\partial t}\right)^2\right] + \frac{2h^3}{3}\left[\left(\frac{\partial v^1}{\partial t}\right)^2 + r^2\left(\frac{\partial v^2}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v^3}{\partial t}\right)^2\right]\right\} r\,dr\,d\theta.$$

Les équations condensées du problème sont les suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(2\rho h r \frac{\partial u^1}{\partial t}\right) + \frac{\partial \varpi}{\partial u^1} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(2\rho \frac{h^3}{3} r \frac{\partial v^1}{\partial t}\right) + \frac{\partial \varpi}{\partial v^1} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(2\rho h r^3 \frac{\partial u^2}{\partial t}\right) + \frac{\partial \varpi}{\partial u^2} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(2\rho \frac{h^3}{3} r^3 \frac{\partial v^2}{\partial t}\right) + \frac{\partial \varpi}{\partial v^2} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(2\rho h r \frac{\partial u^3}{\partial t}\right) + \frac{\partial \varpi}{\partial u^3} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(2\rho \frac{h^3}{3} r \frac{\partial v^3}{\partial t}\right) + \frac{\partial \varpi}{\partial v^3} = 0.$$

Ces équations nous permettent de former les équations différentielles relatives à une vibration qui est de révolution autour de Oz, et pour laquelle on a

$$u^1 = \varphi(r)\,e^{i\omega t}, \quad u^2 = 0, \quad u^3 = \psi(r)\,e^{i\omega t}, \quad v^1 = \alpha(r)\,e^{i\omega t}, \quad v^2 = 0, \quad v^3 = \beta(r)\,e^{i\omega t}.$$

ω est une constante qui reste à déterminer. Parmi les vibrations de ce type se trouve la vibration fondamentale.

On constate que les équations relatives aux fonctions-paramètres u^2 et v^2

disparaissent complètement, et il reste quatre équations à quatre inconnues u^1, u^3, v^1, v^3 :

$$2\rho\omega^2 hr\varphi - 2h\left[\lambda\left(\varphi' - \alpha z' + \frac{\alpha}{r} + \beta\right) + 2\mu\frac{\varphi}{r}\right] + \frac{d}{dr}2hr\left[\lambda\left(\varphi' - \alpha z' + \frac{\alpha}{r} + \beta\right) + 2\mu(\varphi' - \alpha z')\right] = 0,$$

$$2\rho\omega^2 hr\psi + \frac{d}{dr}2\mu hr(\alpha + \psi' - \beta z') = 0,$$

$$2\rho\omega^2\frac{h^3}{3}r\alpha - 2hr\left\{-\left[\lambda\left(\varphi' - \alpha z' + \frac{\alpha}{r} + \beta\right) + 2\mu(\varphi' - \alpha z')\right]z' + \mu(\alpha + \psi' - \beta z')\right\} - \frac{d}{dr}\frac{2h^3}{3}r\left[\lambda\left(\frac{\alpha}{r} - \alpha'\right) - 2\mu\alpha'\right] = 0,$$

$$2\rho\omega^2\frac{h^3}{3}r\beta - 2hr\left[\lambda\left(\varphi' - \alpha z' + \frac{\varphi}{r} + \beta\right) + 2\mu\beta - \mu z'(\alpha + \psi' - \beta z')\right] + \frac{d}{dr}\frac{2h^3}{3}\mu r\beta' = 0.$$

Il resterait à résoudre le difficile problème de la recherche de ω pour que le système différentiel possède une solution non identiquement nulle vérifiant les conditions aux limites.

7. Calcul du ds^2 d'une coque. — Nous avons vu que pour déterminer le potentiel de forme, il était indispensable, par la méthode proposée, de connaître le tenseur métrique fondamental. C'est ce problème que nous abordons ici.

Soit P un point de la coque et M sa projection sur la surface moyenne. Si α, β sont les coordonnées curvilignes de M sur la surface moyenne et γ la distance de P à la surface, convenablement orientée, la position de P est complètement définie par la connaissance des trois nombres α, β, γ :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \frac{\gamma}{H}\vec{N},$$

en désignant par $\vec{N} = \vec{M}'_\alpha \wedge \vec{M}'_\beta$ le vecteur normal à la surface moyenne. Ce vecteur $\vec{N}$ est relié au vecteur unitaire normal $\vec{m}$ par la relation $\vec{N} = H\vec{m}$, avec $H = \sqrt{EG - F^2}$. Formons le vecteur différentiel $d\vec{P}$:

$$d\vec{P} = d\vec{M} + \frac{\gamma}{H}d\vec{N} + \vec{N}\,d\frac{\gamma}{H}.$$

Son carré scalaire sera le ds^2 cherché. Auparavant mettons le vecteur $d\vec{N}$ sous la forme suivante :

$$d\vec{N} = \lambda\vec{M}'_\alpha + \mu\vec{M}'_\beta + \nu\vec{N}.$$

Nous obtenons les coefficients λ, μ, ν en faisant les produits scalaires par $\vec{M}'_\alpha$, $\vec{M}'_\beta$, $\vec{N}$. Pour cela nous utilisons les notations classiques suivantes :

$$E = \overrightarrow{M'_\alpha}^2, \qquad F = \vec{M}'_\alpha . \vec{M}'_\beta, \qquad G = \overrightarrow{M'_\beta}^2,$$

$$\vec{N}^2 = H^2, \qquad \vec{N}\,d\vec{N} = H\,dH, \qquad D = \vec{N}.\vec{M}''_{\alpha^2}, \qquad D' = \vec{N}.\vec{M}''_{\alpha\beta}, \qquad D'' = \vec{N}.\vec{M}''_{\beta^2}.$$

Nous remarquons de plus que

$$\overrightarrow{\mathrm{M}'_\alpha}\, d\overrightarrow{\mathrm{N}} = d\left(\overrightarrow{\mathrm{N}}.\overrightarrow{\mathrm{M}'_\alpha}\right) - \overrightarrow{\mathrm{N}}\, d\overrightarrow{\mathrm{M}'_\alpha} = -(\mathrm{D}\, d\alpha + \mathrm{D}'\, d\beta) = \mathrm{E}\lambda + \mathrm{F}\mu,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{M}'_\beta}\, d\overrightarrow{\mathrm{N}} = d\left(\overrightarrow{\mathrm{N}}.\overrightarrow{\mathrm{M}'_\beta}\right) - \overrightarrow{\mathrm{N}}\, d\overrightarrow{\mathrm{M}'_\beta} = -(\mathrm{D}'\, d\alpha + \mathrm{D}''\, d\beta) = \mathrm{F}\lambda + \mathrm{G}\mu,$$

de sorte qu'en multipliant respectivement par G et — F, ou — F et E, puis en additionnant, nous trouvons

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^2\lambda &= (\mathrm{FD}' - \mathrm{GD})\, d\alpha + (\mathrm{FD}'' - \mathrm{GD}')\, d\beta, \\ \mathrm{H}^2\mu &= (\mathrm{FD} - \mathrm{ED}')\, d\alpha + (\mathrm{FD}' - \mathrm{ED}'')\, d\beta, \\ \mathrm{H}\nu &= d\mathrm{H}. \end{aligned}$$

La dernière de ces relations correspond au produit scalaire par N. Nous avons en définitive :

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{\mathrm{P}} = \overrightarrow{\mathrm{M}'_\alpha}\, d\alpha + \overrightarrow{\mathrm{M}'_\beta}\, d\beta + \frac{\gamma}{\mathrm{H}^3}\Big\{ &[(\mathrm{FD}' - \mathrm{GD})\, d\alpha + (\mathrm{FD}'' - \mathrm{GD}')\, d\beta]\overrightarrow{\mathrm{M}'_\alpha} \\ &+ [(\mathrm{FD} - \mathrm{ED}')\, d\alpha + (\mathrm{FD}' - \mathrm{ED}'')\, d\beta]\overrightarrow{\mathrm{M}'_\beta} + \overrightarrow{\mathrm{N}}\mathrm{H}\, d\mathrm{H}\Big\} + \overrightarrow{\mathrm{N}}\, d\frac{\gamma}{\mathrm{H}}. \end{aligned}$$

Après avoir regroupé quelques termes, on trouve la valeur suivante pour le ds^2 :

$$\begin{aligned} (21)\quad ds^2 = {} & (\mathrm{E}\, d\alpha^2 + 2\mathrm{F}\, d\alpha\, d\beta + \mathrm{G}\, d\beta^2) - \frac{2\gamma}{\mathrm{H}}(\mathrm{D}\, d\alpha^2 + 2\mathrm{D}'\, d\alpha\, d\beta + \mathrm{D}''\, d\beta^2) + d\gamma^2 \\ & + \frac{\gamma^2}{\mathrm{H}^4}\{(\mathrm{GD}^2 - 2\mathrm{FDD}' + \mathrm{ED}'^2)\, d\alpha^2 \\ & \quad + 2[\mathrm{E}\,\mathrm{D}'\,\mathrm{D}'' + \mathrm{F}(\mathrm{D}'^2 - \mathrm{DD}'') + \mathrm{G}\,\mathrm{DD}']\, d\alpha\, d\beta \\ & \quad + (\mathrm{G}\,\mathrm{D}'^2 - 2\mathrm{F}\,\mathrm{D}'\,\mathrm{D}'' + \mathrm{E}\,\mathrm{D}''^2)\, d\beta^2\}. \end{aligned}$$

On voit s'introduire dans le coefficient de γ la courbure normale

$$\frac{1}{\mathrm{R}_m} = \frac{\mathrm{D}\, d\alpha^2 + 2\mathrm{D}'\, d\alpha\, d\beta + \mathrm{D}''\, d\beta^2}{\mathrm{H}(\mathrm{E}\, d\alpha^2 + 2\mathrm{F}\, d\alpha\, d\beta + \mathrm{G}\, d\beta^2)}$$

calculée dans la direction $d\overrightarrow{\mathrm{M}}$.

Si l'on néglige les termes en γ^2 petits par rapport aux carrés des rayons de courbure de la surface, nous avons

$$(22)\quad ds^2 = (\mathrm{E}\, d\alpha^2 + 2\mathrm{F}\, d\alpha\, d\beta + \mathrm{G}\, d\beta^2) - \frac{2\gamma}{\mathrm{H}}(\mathrm{D}\, d\alpha^2 + 2\mathrm{D}'\, d\alpha\, d\beta + \mathrm{D}''\, d\beta^2) + d\gamma^2.$$

Calcul géométrique du ds^2. — La méthode précédente donne la valeur du ds^2 d'une surface matérielle définie à l'aide de paramètres α, β. La méthode suivante donne l'interprétation des termes du ds^2. P décrivant une courbe quelconque dans l'espace (non forcément voisine de la surface moyenne), attachons lui le point M, de la surface moyenne, qui se déplace par continuité sur cette surface moyenne de façon que la normale en M passe constamment par P. Le point M décrit une certaine courbe sur la surface moyenne. Soient $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, les trois vecteurs unitaires du trièdre géodésique de cette dernière courbe : $\vec{i}$ est dirigé suivant la tangente à la courbe, $\vec{j}$ est normal à la surface, $\vec{k}$, normale géodésique, forme avec les deux précédents un trièdre direct. On sait que le trièdre précédent (dit de Darboux-Ribaucour) possède une rotation égale à

$$\vec{\Omega} = \frac{\vec{i}}{T_r} + \frac{\vec{j}}{R_g} + \frac{\vec{k}}{R_m}.$$

(C'est la rotation instantanée de la Cinématique pour un mouvement de ce trièdre dans lequel le point M décrirait sa trajectoire avec la vitesse $+1$.) Or nous avons ici :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \gamma\vec{j},$$

et en dérivant par rapport à l'arc σ du lieu de M :

$$\frac{d\vec{P}}{d\sigma} = \vec{i} + \vec{j}\frac{d\gamma}{d\sigma} + \gamma\frac{d\vec{j}}{d\sigma}.$$

Comme

$$\frac{d\vec{j}}{d\sigma} = \vec{\Omega} \wedge \vec{j} = -\frac{\vec{i}}{R_m} + \frac{\vec{k}}{T_r},$$

nous avons donc

$$d\vec{P} = \vec{i}\left(1 - \frac{\gamma}{R_m}\right)d\sigma + \vec{j}\,d\gamma + \vec{k}\,\frac{\gamma\,d\sigma}{T_r}.$$

Le carré scalaire donne le ds^2 sous la forme désirée :

$$(23) \qquad ds^2 = \left[\left(1 - \frac{\gamma}{R_m}\right)^2 + \frac{\gamma^2}{T_r^2}\right]d\sigma^2 + d\gamma^2.$$

Nous allons lui donner une autre forme intéressante en introduisant les directions principales de la surface au point M, et θ, angle que fait la tangente orientée du lieu de M avec la première direction principale. Rappelons les valeurs de la courbure normale et de la torsion relative :

$$\frac{1}{R_m} = \frac{\cos^2\theta}{R_1} + \frac{\sin^2\theta}{R_2}, \qquad \frac{1}{T_r} = \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\sin\theta\cos\theta.$$

Ayant écrit le ds^2 ainsi :

$$ds^2 = \left[1 - \frac{2\gamma}{R_m} + \gamma^2\left(\frac{1}{R_m^2} + \frac{1}{T_r^2}\right)\right]d\sigma^2 + d\gamma^2,$$

nous calculons le groupement

$$\frac{1}{R_m^2} + \frac{1}{T_r^2} = \frac{\cos^2\theta}{R_1^2} + \frac{\sin^2\theta}{R_2^2}.$$

Il en résulte la valeur suivante du ds^2 :

$$ds^2 = \left[\cos^2\theta\left(1 - \frac{\gamma}{R_1}\right)^2 + \sin^2\theta\left(1 - \frac{\gamma}{R_2}\right)^2\right]d\sigma^2 + d\gamma^2.$$

Si l'on désigne par $d\sigma_1$, $d\sigma_2$ les projections du vecteur dM sur les deux directions principales,

$$d\sigma_1 = \cos\theta \, d\sigma, \qquad d\sigma_2 = \sin\theta \, d\sigma,$$

nous avons encore :

$$(24) \qquad ds^2 = \left(1 - \frac{\gamma}{R_1}\right)^2 d\sigma_1^2 + \left(1 - \frac{\gamma}{R_2}\right)^2 d\sigma_2^2 + d\gamma^2.$$

Il est possible d'interpréter géométriquement cette formule, et même de l'obtenir directement si l'on se rappelle que les lignes de courbures jouissent de la propriété suivante : le long de chacune d'elles, deux normales à la surface infiniment voisines, se rencontrent au troisième ordre près en un point qui est un des centres de courbure principale de la surface.

Sous les dernières formes du ds^2 nous voyons mieuxcomment peut se traduire notre hypothèse concernant l'épaisseur de la surface. Si γ est faible vis-à-vis de R_1 et R_2, nous pouvons écrire plus simplement :

$$(25) \qquad ds^2 = \left(1 - \frac{2\gamma}{R_1}\right) d\sigma_1^2 + \left(1 - \frac{2\gamma}{R_2}\right) d\sigma_2^2 + d\gamma^2,$$

ou, par le calcul, pour une surface définie paramétriquement :

$$(22) \qquad ds^2 = (E\,d\alpha^2 + 2F\,d\alpha\,d\beta + G\,d\beta^2) - \frac{2\gamma}{H}(D\,d\alpha^2 + 2D'\,d\alpha\,d\beta + D''\,d\beta^2) + d\gamma^2,$$

formule déjà rencontrée.

8. Équations de l'Élasticité en variables quelconques. — La formule (15) donne le potentiel de forme en variables quelconques, et la méthode des fonctions-paramètres permet d'écrire les équations correspondantes de Statique ou de Dynamique. Nous supposons que dans le déplacement virtuel défini par la variation virtuelle arbitraire $\delta\mathfrak{U}^i$, les forces extérieures accomplissent le travail

$$\iiint \mathfrak{Q}_i \, \delta\mathfrak{U}^i \, dx^1 \, dx^2 \, dx^3.$$

Sous forme condensée, les équations de la statique sont

$$\frac{\partial\varpi}{\partial\mathfrak{U}^m} = \mathfrak{Q}_m.$$

Pour calculer la dérivée fonctionnelle, nous remarquons que l'intégrale du potentiel de forme est un polynome en $\mathfrak{U}^m$ et $\dfrac{\partial\mathfrak{U}^m}{\partial x^n}$, puisque

$$\frac{D\mathfrak{U}^i}{Dx^k} = \frac{\partial\mathfrak{U}^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{km}\mathfrak{U}^m.$$

Prenons la demi-dérivée ordinaire de l'intégrale par rapport à $\mathfrak{U}^m$; on trouve

$$\lambda \sum_i \left(\frac{D\mathfrak{U}^i}{Dx^i}\Gamma^i_{im}\right) + \mu g^{jk} g_{ih}\left(\Gamma^h_{jm}\frac{D\mathfrak{U}^i}{Dx^k} + \Gamma^i_{km}\frac{D\mathfrak{U}^h}{Dx^j}\right) + \mu\left(\Gamma^k_{im}\frac{D\mathfrak{U}^i}{Dx^k} + \Gamma^i_{km}\frac{D\mathfrak{U}^k}{Dx^i}\right),$$

ou encore

$$\lambda \sum_i \Gamma^i_{im} \frac{D\mathfrak{U}^i}{Dx^i} + 2\mu (g^{jk}\Gamma_{i,jm} + \Gamma^k_{im}) \frac{D\mathfrak{U}^i}{Dx^k}.$$

Pour obtenir la demi-dérivée partielle de l'intégrale par rapport à $\frac{\partial \mathfrak{U}^m}{\partial x^n}$, supposons d'abord $n \neq m$; la demi-dérivée partielle vaut

$$2\mu \left(g^{nk} g_{im} \frac{D\mathfrak{U}^i}{Dx^k} + \frac{D\mathfrak{U}^n}{Dx^m} \right).$$

Tandis que si $n = m$, il faut ajouter le terme unique $\lambda \frac{D\mathfrak{U}^m}{Dx^m}$, où l'indice n'est pas muet. D'où les équations de la Statique :

$$(26) \qquad \begin{aligned} &\lambda \left(\Gamma^1_{1m} \frac{D\mathfrak{U}^1}{Dx^1} + \Gamma^2_{2m} \frac{D\mathfrak{U}^2}{Dx^2} + \Gamma^3_{3m} \frac{D\mathfrak{U}^3}{Dx^3} \right) + 2\mu (g^{jk}\Gamma_{i,jm} + \Gamma^k_{im}) \frac{D\mathfrak{U}^i}{Dx^k} \\ &\quad - 2\mu \frac{\partial}{\partial x^n} \left(g^{nk} g_{im} \frac{D\mathfrak{U}^i}{Dx^k} + \frac{D\mathfrak{U}^n}{Dx^m} \right) - \lambda \frac{\partial}{\partial x^m} \frac{D\mathfrak{U}^m}{Dx^m} = \mathfrak{Q}_m. \end{aligned}$$

Comme les composantes contravariantes de la vitesse sont $\frac{\partial \mathfrak{U}^i}{\partial t}$, le carré de la longueur de ce vecteur est

$$g_{ik} \frac{\partial \mathfrak{U}^i}{\partial t} \frac{\partial \mathfrak{U}^k}{\partial t}.$$

On en déduit la force vive du système élastique. Pour obtenir les équations de l'Élasticité dynamique, il suffit donc d'introduire au premier membre de l'équation (26), la quantité

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho g_{im} \frac{D(x, y, z)}{D(x^1, x^2, x^3)} \frac{\partial \mathfrak{U}^i}{\partial t} \right].$$

La formule (15), qui donne le potentiel de forme, est d'un emploi relativement facile si l'on a affaire à un système triple orthogonal de coordonnées curvilignes :

$$\begin{aligned} 2\varpi = \iiint \frac{D(x, y, z)}{D(x^1, x^2, x^3)} \Bigg\{ & \lambda \left(\frac{D\mathfrak{U}^1}{Dx^1} + \frac{D\mathfrak{U}^2}{Dx^2} + \frac{D\mathfrak{U}^3}{Dx^3} \right)^2 \\ & + 2\mu \left[\left(\frac{D\mathfrak{U}^1}{Dx^1} \right)^2 + \left(\frac{D\mathfrak{U}^2}{Dx^2} \right)^2 + \left(\frac{D\mathfrak{U}^3}{Dx^3} \right)^2 \right] \\ & + \mu \Bigg[g^{11} g_{22} \left(\frac{D\mathfrak{U}^2}{Dx^1} \right)^2 + g^{11} g_{33} \left(\frac{D\mathfrak{U}^3}{Dx^1} \right)^2 \\ & \quad + g^{22} g_{33} \left(\frac{D\mathfrak{U}^3}{Dx^2} \right)^2 + g^{22} g_{11} \left(\frac{D\mathfrak{U}^1}{Dx^2} \right)^2 \\ & \quad + g^{33} g_{11} \left(\frac{D\mathfrak{U}^1}{Dx^3} \right)^2 + g^{33} g_{22} \left(\frac{D\mathfrak{U}^2}{Dx^3} \right)^2 \Bigg] \Bigg\} dx^1 dx^2 dx^3. \end{aligned}$$

En particulier cette formule peut être appliquée au cas d'une coque dont la surface moyenne est rapportée à ses lignes courbures ($F = D' = 0$). Le ds^2 (21) de l'espace euclidien se réduit aux termes suivants :

$$ds^2 = \left(\sqrt{E} - \frac{\gamma D}{E\sqrt{G}} \right)^2 d\alpha^2 + \left(\sqrt{G} - \frac{\gamma D''}{G\sqrt{E}} \right)^2 d\beta^2 + d\gamma^2.$$

Il est alors possible de déterminer les symboles de Christoffel, puis les dérivées covariantes qui figurent dans la formule (26). Dans l'approximation du second ordre, on pose $\mathcal{U}^i = u^i + \gamma v^i$, puis on intègre entre $\pm \frac{\varepsilon}{2}$ par rapport à γ, et l'on opère comme dans les exemples antérieurs. La même méthode est applicable au cas où la surface moyenne est rapportée à des coordonnées curvilignes quelconque, mais les calculs sont plus longs.

9. Application à l'Hydrodynamique. — Nous allons montrer que la méthode des fonctions-paramètres permet de retrouver les équations des fluides parfaits en variables de Lagrange.

Soient a, b, c trois paramètres définissant la position d'une particule du fluide considéré. a, b, c sont par exemple les coordonnées rectangulaires ou polaires dans l'espace, de la particule, ou tout autre système de coordonnées curvilignes, à l'instant initial. Ce système de paramètres qui individualise chaque particule est donc indépendant du temps. Considérons alors trois fonctions-paramètres ξ, η, ζ, fonctions de a, b, c et du temps t, qui définissent la position d'une particule lorsque le temps s'écoule. Nous désignons par $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$ les dérivées partielles de ces fonctions par rapport au temps; ces quantités caractérisent la vitesse de l'élément fluide.

Soit maintenant un fluide situé dans une enveloppe fermée Σ, fixe ou de mouvement connu à l'avance. A cette surface correspond dans l'espace a, b, c, un domaine D nécessairement fixe s'il n'existe aucun échange de matière avec l'extérieur. La force vive du fluide est une forme quadratique en $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$. Elle est homogène si les parois sont fixes, sinon elle se présente sous la forme

$$2\mathrm{T} = \iiint_{\mathrm{D}} [\alpha_{ij}\dot{\varphi}_i\dot{\varphi}_j + 2\beta_k\dot{\varphi}_k + \gamma]\, da\, db\, dc.$$

Les coefficients α, β, γ sont des fonctionnelles des φ qui représentent l'une ou l'autre des fonctions ξ, η, ζ.

Soit d'autre part

$$\delta\mathcal{T} = \iiint_{\mathrm{D}} (\mathrm{P}\,\delta\xi + \mathrm{Q}\,\delta\eta + \mathrm{R}\,\delta\zeta)\, da\, db\, dc,$$

le travail virtuel des forces extérieures dans un déplacement virtuel arbitraire conservant les liaisons, c'est-à-dire ici, laissant indéformable et impénétrable la cloison Σ. Dans le cas où il existerait un travail des forces intérieures, on le ferait entrer dans le terme précédent.

Nous devons remarquer que les trois fonctions-paramètres ξ, η, ζ ne sont pas indépendantes, car il faut tenir compte de l'équation de continuité qui traduit la conservation de la masse, $dm = dm_0$. Nous considérons que la densité ρ est une fonction de a, b, c, t, comme toutes les fonctions inconnues que nous utilisons. Soit $\mathrm{H}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$ l'élément de volume dans l'espace où se meut le fluide, et $\mathrm{K}\,da\,db\,dc$ l'élément de volume dans l'espace a, b, c. L'hypothèse de la conservation de la masse se traduit par la relation différentielle

$$\rho \mathrm{H}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = \rho_0 \mathrm{K}\,da\,db\,dc,$$

ou mieux, par

$$\mathrm{H}\frac{\mathrm{D}(\xi,\eta,\zeta)}{\mathrm{D}(a,b,c)} = \frac{\rho_0\mathrm{K}}{\rho},$$

relation dans laquelle on remarque que le second membre est une fonction de a, b, c, t.

Si nous nous reportons à la notion de déplacement virtuel, ici défini par les trois fonctions non indépendantes $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, nous aurons la relation imposée au déplacement virtuel en prenant la différentielle δ du jacobien précédent, et en se rappelant que ξ, η, ζ varient seules, a, b, c, t étant des constantes dans cette opération. Nous obtenons donc

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\log \mathrm{H}\right)\delta\xi + \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\log \mathrm{H}\right)\delta\eta + \left(\frac{\partial}{\partial\zeta}\log \mathrm{H}\right)\delta\zeta + \frac{\mathrm{D}(\delta\xi,\eta,\zeta)}{\mathrm{D}(a,b,c)} + \frac{\mathrm{D}(\xi,\delta\eta,\zeta)}{\mathrm{D}(a,b,c)} + \frac{\mathrm{D}(\xi,\eta,\delta\zeta)}{\mathrm{D}(a,b,c)} = 0.$$

Multiplions par une fonction arbitraire $\lambda(a, b, c, t)$ et intégrons dans D :

$$\sum_{a,b,c}\iiint_{\mathrm{D}}\lambda\left[\frac{\mathrm{D}(\eta,\zeta)}{\mathrm{D}(b,c)}\delta\xi'_a + \frac{\mathrm{D}(\zeta,\xi)}{\mathrm{D}(b,c)}\delta\eta'_a + \frac{\mathrm{D}(\xi,\eta)}{\mathrm{D}(b,c)}\delta\zeta'_a\right]da\,db\,dc$$
$$+\sum_{\xi,\eta,\zeta}\iiint_{\mathrm{D}}\lambda\frac{\partial}{\partial\xi}\log \mathrm{H}\,\delta\xi\,da\,db\,dc = 0.$$

Intégrons par parties, nous obtenons

$$\sum\iint\lambda\left[\frac{\mathrm{D}(\eta,\zeta)}{\mathrm{D}(b,c)}\delta\xi + \frac{\mathrm{D}(\zeta,\xi)}{\mathrm{D}(b,c)}\delta\eta + \frac{\mathrm{D}(\xi,\eta)}{\mathrm{D}(b,c)}\delta\zeta\right]db\,dc$$
$$+\sum_{\xi,\xi,\eta}\iiint_{\mathrm{D}}\lambda\frac{\partial}{\partial\xi}\log \mathrm{H}\,\delta\xi\,da\,db\,dc$$
$$-\sum_{\xi,\eta,\zeta}\iiint_{\mathrm{D}}\left[\frac{\partial}{\partial a}\lambda\frac{\mathrm{D}(\eta,\zeta)}{\mathrm{D}(b,c)} + \frac{\partial}{\partial b}\lambda\frac{\mathrm{D}(\eta,\zeta)}{\mathrm{D}(c,a)} + \frac{\partial}{\partial c}\lambda\frac{\mathrm{D}(\eta,\zeta)}{\mathrm{D}(a,b)}\right]\delta\xi\,da\,db\,dc = 0.$$

Avant de poursuivre les calculs, vérifions que l'intégrale double est nulle. En effet, supposons que la frontière de D soit représentée paramétriquement à l'aide de u et v. Comme le déplacement virtuel doit être tangent à cette frontière, sinon on aurait entrée ou sortie de matière, nous avons la relation suivante :

$$\delta\xi\frac{\mathrm{D}(y,z)}{\mathrm{D}(u,v)} + \delta\eta\frac{\mathrm{D}(z,x)}{\mathrm{D}(u,v)} + \delta\zeta\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(u,v)} = 0.$$

Or, en fait, x, y, z sont des fonctions composées de u, v par l'intermédiaire de a, b, c. Nous avons donc

$$\frac{D(y,z)}{D(u,v)}=\frac{D(y,z)}{D(b,c)}\frac{D(b,c)}{D(u,v)}+\frac{D(y,z)}{D(c,a)}\frac{D(c,a)}{D(u,v)}+\frac{D(y,z)}{D(a,b)}\frac{D(a,b)}{D(u,v)},$$

et il en résulte que l'intégrale double est nulle, ainsi que l'intégrale triple.

Si nous nous reportons à l'intégrale d'Hamilton, dans le cas où les fonctions-paramètres ne sont pas indépendantes, on sait qu'il suffit d'ajouter à l'intégrale habituelle l'intégrale entre les deux instants t_0 et t_1 de l'intégrale triple ci-dessus. Nous sommes alors conduits à un système de trois équations telles que la suivante :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\xi}=P-\lambda\frac{\partial}{\partial \xi}\log H+\frac{\partial}{\partial a}\lambda\frac{D(\eta,\zeta)}{D(b,c)}+\frac{\partial}{\partial b}\lambda\frac{D(\eta,\zeta)}{D(c,a)}+\frac{\partial}{\partial c}\lambda\frac{D(\eta,\zeta)}{D(a,b)}.$$

Cette équation se simplifie grâce à la remarque suivante. Dans l'espace a, b, c, le vecteur de composantes

$$\frac{D(\eta,\zeta)}{D(b,c)},\qquad \frac{D(\eta,\zeta)}{D(c,a)},\qquad \frac{D(\eta,\zeta)}{D(a,b)}$$

est le produit vectoriel de deux gradients,

$$\operatorname{grad}\eta \wedge \operatorname{grad}\zeta;$$

il en résulte que sa divergence est nulle, on a donc plus simplement

$$\frac{\partial}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\xi}=P-\lambda\frac{\partial}{\partial \xi}\log H+\frac{\partial\lambda}{\partial a}\frac{D(\eta,\zeta)}{D(b,c)}+\frac{\partial\lambda}{\partial b}\frac{D(\eta,\zeta)}{D(c,a)}+\frac{\partial\lambda}{\partial c}\frac{D(\eta,\zeta)}{D(a,b)}.$$

Si on multiplie par ξ'_a cette équation, et par η'_a et ζ'_a les deux autres équations analogues, et qu'on les ajoute membre à membre, on obtient l'équation suivante :

$$\xi'_a\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\xi}+\eta'_a\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\eta}+\zeta'_a\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot\zeta}=(P\xi'_a+Q\eta'_a+R\zeta'_a)+\lambda'_a\frac{D(\xi,\eta,\zeta)}{D(a,b,c)}-\frac{\lambda H'_a}{H},$$

et l'on forme de même deux autres équations analogues qui se prètent mieux à une éventuelle élimination de λ. On note aussi la présence d'un jacobien dont la valeur est $\frac{\rho_0 K}{\rho H}$.

Formons explicitement les équations du mouvement en axes rectangulaires. La force vive a pour expression

$$2T=\iiint_D \rho_0 K(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2)\,da\,db\,dc.$$

le travail virtuel est d'autre part

$$\delta\mathcal{C} = \iiint_D (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, K\, da\, db\, dc$$

quand on désigne par X, Y, Z les composantes de la force unitaire qui agit sur l'élément de masse $\rho_0\, dx\, dy\, dz$. On parvient alors à trois équations telles que la suivante :

$$\frac{d}{dt} K\rho_0 \dot{x} = \rho_0 K X + \lambda'_a \frac{D(y, z)}{D(b, c)} + \lambda'_b \frac{D(y, z)}{D(c, a)} + \lambda'_c \frac{D(y, z)}{D(a, b)},$$

où, après la transformation donnée antérieurement,

$$K\rho_0[(\ddot{x} - X)x'_a + (\ddot{y} - Y)y'_a + (\ddot{z} - Z)z'_a] = \lambda'_a \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)};$$

et comme

$$\frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} = \frac{\rho_0 K}{\rho},$$

on a finalement trois équations telles que

$$(\ddot{x} - X)x'_a + (\ddot{y} - Y)y'_a + (\ddot{z} - Z)z'_a = \frac{1}{\rho}\lambda'_a.$$

Nous constatons, ce que l'on peut démontrer autrement, que λ, dans ce cas, s'identifie avec la pression.

Les trois équations analogues à celle qui précède sont les équations des fluides en variables de Lagrange quelconques.

10. Écoulement adiabatique d'un fluide parfait dans une conduite de faible section, presque constante. — Un fluide, pour l'instant quelconque, s'écoule dans une conduite de faible section, presque constante, de manière que l'on puisse définir une densité, une vitesse, une pression, etc., uniques pour une section donnée d'abscisse curviligne s. Soit a l'abscisse curviligne de la même section à l'instant initial t_0. Nous supposons que la densité ρ, la pression p, l'abscisse curviligne s sont des fonctions de a et t, pour l'instant inconnues. Les quantités

$$\rho_0 = \rho(a, t_0), \qquad S_0 = S(a, t_0)$$

font partie des données initiales, et la section droite S de la conduite est une fonction donnée de s.

Équation de continuité. — Les deux sections d'abscisses a et $a + da$, à l'instant initial, ont pour abscisses respectives s et $s + \frac{\partial s}{\partial a} da$, à l'instant t. Les masses des deux éléments de fluides que ces sections permettent de définir, sont égales :

$$\rho_0 S_0\, da = \rho S \frac{\partial s}{\partial a}\, da; \qquad \rho_0 S_0 = \rho S \frac{\partial s}{\partial a}.$$

Telle est l'équation de continuité qui permet d'évaluer la nouvelle densité, ρ à l'instant t quand s est connu en fonction de a et t.

Équation du mouvement. — Le mouvement du fluide a lieu sous l'action d'une force extérieure dont seule la composante suivant la tangente à la trajectoire moyenne intervient; nous désignons par F_t cette composante par unité de volume. Nous négligeons toute force de viscosité. La vitesse des points d'une tranche d'abscisse s est $\dot{s}=\frac{\partial s}{\partial t}\cdot$ La force vive du fluide est

$$\int_{a_0}^{a_1}\rho_0 S_0 \dot{s}^2\, da$$

pour la portion qui initialement était entre les tranches d'abscisses curvilignes a_0 et a_1.

Le fluide est supposé parfait. Pour nous, et cela rejoint les définitions habituelles, cela veut dire que le travail spécifique des forces intérieures $\frac{\delta\mathfrak{G}}{\mathcal{V}}$ (travail $\delta\mathfrak{G}$ pour un petit volume $\mathcal{V}$) est proportionnel à la variation relative de volume :

$$\frac{\delta\mathfrak{G}}{\mathcal{V}}=-p\frac{\delta\mathcal{V}}{\mathcal{V}} \quad \text{ou} \quad \delta\mathfrak{G}=-p\,\delta\mathcal{V}.$$

Si le volume augmente, il faut dépenser du travail, d'où le signe moins. Le coefficient de proportionnalité est appelé pression. Un déplacement virtuel du fluide à l'instant t est défini par la fonction δs de la seule variable a. Le volume $S\,ds$ compris entre les deux tranches a et $a+da$ devient dans ces conditions

$$S\frac{\partial s}{\partial a}da+\delta\left(S\frac{\partial s}{\partial a}\right)da.$$

Il lui correspond le travail virtuel

$$-\int_{a_0}^{a_1}p\,\delta\left(S\frac{\partial s}{\partial a}\right)da=-\int_{a_0}^{a_1}\left(p\frac{dS}{ds}\frac{\partial s}{\partial a}\delta s+pS\frac{\partial\,\delta s}{\partial a}\right)da.$$

D'autre part le travail virtuel des forces extérieures a la valeur suivante :

$$\int_{s_0}^{s_1}F_t S\,\delta s\,ds=\int_{a_0}^{a_1}F_t S\frac{\partial s}{\partial a}\delta s\,da.$$

Imaginons que nous refaisons la mise en équations à l'aide de l'intégrale d'Hamilton, nous aurons une intégration par parties à effectuer, nécessitée par la présence du terme $\frac{\partial}{\partial a}\delta s$. Il en résulte que nous avons à remplacer le terme relatif à la pression par l'expression suivante :

$$\int_{a_0}^{a_1}\left[-p\frac{dS}{ds}\frac{\partial s}{\partial a}+\frac{\partial}{\partial a}(pS)\right]\delta s\,da=\int_{a_0}^{a_1}S\frac{\partial p}{\partial a}\delta s\,da,$$

et nous parvenons ainsi à l'équation du problème

$$-\rho_0 S_0 \ddot{s} + S\frac{\partial p}{\partial a} + F_t S\frac{\partial s}{\partial a} = 0,$$

ou

$$\rho\frac{\partial s}{\partial a}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{\partial p}{\partial a} + F_t\frac{\partial s}{\partial a},$$

quand on tient compte de l'équation de continuité. Les quantités inconnues sont l'abscisse curviligne s, la pression p, la densité ρ. Pour les déterminer nous avons l'équation dynamique ci-dessus et l'équation de continuité. Il faut y ajouter l'équation d'état. On peut par exemple, supposer que l'écoulement se fasse sans échange de chaleur, ni avec les parois, ni à l'intérieur du fluide. On admet généralement une relation $p = k\rho^\gamma$ entre la pression et la densité.

Considérons le cas du mouvement permanent, pour retrouver les équations classiques de l'étude des tuyères. S'il en est bien ainsi, en chaque point d'abscisse curviligne donnée s, la pression et la densité ne dépendent pas explicitement du temps. p est donc fonction de a et t par le seul intermédiaire de $s(a, t)$ nous avons alors une équation dynamique simplifiée :

$$\rho\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{dp}{ds} + F_t.$$

La vitesse, elle aussi, est une fonction de s seul. Si on la désigne par $v = \dot{s}$, nous avons

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dp}{ds} + F_t.$$

Si de plus la force F_t dérive d'une fonction de force, ou même plus généralement, si l'on désigne par $\mathcal{U}(s)$ une primitive de la fonction $\frac{F_t(s)}{\rho}$, nous avons

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{d}{ds}\left(\int\frac{dp}{\rho} + \mathcal{U}\right).$$

Multiplions les deux membres de cette relation par $v = \frac{\partial s}{\partial t}$ et intégrons par rapport au temps :

$$\frac{1}{2}v^2 = \int\frac{dp}{\rho} + \mathcal{U} + f(a).$$

La fonction $f(a)$ se détermine d'après les conditions initiales.

11. Membrures de ponts. — Considérons une membrure de pont constituée par un cadre rigide rectangulaire bien encastré aux angles. Cette membrure est posée sur deux appuis simples de même niveau par ses deux sommets inférieurs. Pour utiliser au mieux la poutre supérieure, on pose des tirants verticaux

identiques, régulièrement disposés, simplement articulés sur les poutres horizontales inférieure et supérieure. Désignons par les indices 1, 2, 3, 4 les éléments relatifs à la poutre inférieure, verticale droite, supérieure, et verticale gauche. Nous négligeons le poids des tirants et celui des poutres verticales qui n'influe que d'une manière négligeable sur leur longueur. Nous tenons compte de charges réparties sur les deux poutres horizontales, p_1 ou p_3 par unité de longueur. Prenons pour origine des axes le milieu O de la poutre inférieure, Ox est horizontal dirigé vers la droite, Oz est vertical ascendant. Nous admettons pour simplifier que la répartition des charges est symétrique par rapport à Oz, mais cette hypothèse n'interviendra guère que dans l'écriture de certaines conditions aux limites. Soit h la hauteur du pont et $2L$ sa longueur. Ω, E, I sont la section, le module d'élasticité et le moment d'inertie d'une section de poutre (sans indice pour les tirants); l est la distance de deux tirants consécutifs. u, v sont les composantes du déplacement d'un point.

Dans ce problème et dans les suivants, nous avons un assemblage de poutres en assez grand nombre. Nous remplacerons dans nos raisonnements cet assemblage discontinu de poutres par une membrane formée d'un grand nombre de poutres identiques et régulièrement réparties pour passer ensuite à la limite, la distance de deux poutres consécutives tendant vers zéro.

Ce problème et les suivants peuvent plus ou moins facilement se traiter par les méthodes classiques, mais la méthode des fonctions-paramètres, outre l'avantage qu'elle possède d'être systématique, met en évidence le fait que la solution du problème dépend d'une ou plusieurs équations aux dérivées partielles, dont la solution se détermine, en principe, grâce à des conditions au contour, fréquemment plus compliquées que celles que l'on considère dans les problèmes usuels d'Analyse, et que l'on peut obtenir par la mise en équation. Quoique dans la membrure de pont que nous considérons, le cadre rectangulaire soit l'essentiel, il ne nous donne que des conditions de contour.

Dans ce problème les fonctions-paramètres sont $u_2(y)$, $u_4(y)$, $v_1(x)$, $v_3(x)$, car elles permettent de déterminer toutes les déformations ou efforts intérieurs. Le potentiel de forme comprend la contribution des quatre poutres du contour

$$\int_0^L E\left[I_1\left(\frac{d^2 v_1}{dx^2}\right)^2 + I_3\left(\frac{d^2 v_3}{dx^2}\right)^2\right] dx + \frac{1}{2}\int_0^h E\left[I_2\left(\frac{d^2 u_2}{dy^2}\right)^2 + I_4\left(\frac{d^2 u_4}{dy^2}\right)^2\right] dx \qquad (I_2 = I_4),$$

où l'on a tenu compte de leur courbure et non de leur allongement. D'autre part, pour un tirant dont seul l'allongement entre en ligne de compte, le potentiel correspondant a pour valeur

$$\frac{E\Omega}{2h}(v_3 - v_1)^2.$$

Cette quantité est valable pour une longueur l, distance de deux tirants consécutifs. Faisant le passage à la limite indiqué plus haut, le potentiel de forme dû à l'ensemble des tirants est

$$2\int_0^L \frac{E\Omega}{2hl}(v_3 - v_1)^2 dx.$$

Pour l'ensemble du système matériel,

$$2\varpi = 2\int_0^L E\left[I_1\left(\frac{d^2 v_1}{dx^2}\right)^2 + I_3\left(\frac{d^2 v_3}{dx^2}\right)^2 + \frac{\Omega}{hl}(v_3 - v_1)^2\right]dx + \int_0^h EI_2\left[\left(\frac{d^2 u_2}{dy^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 u_4}{dy^2}\right)^2\right]dy.$$

D'autre part, le travail virtuel des forces extérieures a pour expression

$$\delta\mathfrak{T} = -2\int_0^L (p_1 \delta v_1 + p_3 \delta v_3)\, dy.$$

Nous pouvons maintenant écrire les équations de l'équilibre :

$$EI_1 \frac{d^4 v_1}{dx^4} - \frac{E\Omega}{hl}(v_3 - v_1) = -p_1, \qquad EI_2 \frac{d^4 u_2}{dy^4} = 0,$$
$$EI_3 \frac{d^4 v_3}{dx^4} + \frac{E\Omega}{hl}(v_3 - v_1) = -p_3, \qquad EI_2 \frac{d^4 u_4}{dy^4} = 0.$$

Les conditions aux limites expriment, soit que les sommets du rectangle sont immobiles (par raison de symétrie, et parce qu'on néglige les variations de longueurs des côtés du rectangle), soit que les angles du rectangle restent droits :

$$v_1(\pm L) = v_3(\pm L) = 0,$$
$$u_2(0) = u_2(h) = u_4(0) = u_4(h) = 0,$$
$$\frac{dv_1(-L)}{dx} + \frac{du_4(0)}{dy} = \frac{dv_1(L)}{dx} + \frac{du_2(0)}{dy} = \frac{dv_3(L)}{dx} + \frac{du_2(h)}{dy} = \frac{dv_3(-L)}{dx} + \frac{du_4(h)}{dy} = 0.$$

Nous nous bornons, pour notre objet, à faire la mise en équations du problème sans vouloir en donner la solution complète.

12. Pont a tirants verticaux encastrés. — Nous considérons la même membrure que précédemment, mais les rotules existant entre les tirants et les poutres supérieure et inférieure sont supprimées et remplacées par des encastrements. Au lieu de rechercher des fonctions u et v d'une seule variable, dans le problème actuel, nous rencontrons des fonctions de deux variables.

Chemin faisant nous aurons à transformer des intégrales doubles en intégrales simples ou inversement, aussi désignons-nous par $\mathfrak{S}$ l'aire intérieure du rectangle et par $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2 + \mathfrak{L}_3 + \mathfrak{L}_4$ son contour décrit dans le sens direct. La formule de Riemann,

$$\iint_{\mathfrak{S}} R'_y\, dx\, dy = -\int_{\mathfrak{L}} R\, dx,$$

appliquée au cas où $R = PQ$ donne une formule d'intégration par parties

$$\iint_{\mathcal{S}} PQ'_y \, dx \, dy = -\int_{\mathcal{L}} PQ \, dx - \iint_{\mathcal{S}} QP'_y \, dx \, dy.$$

que nous utiliserons par la suite, ainsi que celle qui correspond à une intégration en x.

Nous supposons encore que la longueur des poutres du contour est conservée, le potentiel de forme ne fait donc intervenir que leur courbure; tandis que pour un tirant interviennent l'allongement et la courbure. Nous remplaçons encore l'ensemble des tirants par une membrane continue dont nous désignerons par $u(x, y)$ et $v(x, y)$ les composantes du déplacement au point de coordonnées x et y.

La portion de tirant d'abscisse x, dont les extrémités ont pour ordonnées y et $y + dy$ subit une déformation telle que les extrémités se déplacent verticalement (seul déplacement entrant en ligne de compte) de $v(x, y)$ et $v + \frac{\partial v}{\partial y} dy$ respectivement. Le taux d'allongement est donc $\frac{\partial v}{\partial y}$, et le potentiel de forme dû à l'allongement de ce seul tirant est

$$\frac{1}{2} \int_0^h E\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 dy.$$

Pour l'ensemble des tirants, nous trouvons donc

$$2\varpi_1 = \iint_{\mathcal{S}} \frac{E\Omega}{l} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 dx \, dy.$$

Cette formule est vraie quelle que soit la forme du contour. On calcule de même le potentiel dû à la courbure des tirants :

$$2\varpi_2 = \iint_{\mathcal{S}} \frac{EI}{l} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 dx \, dy,$$

valable, lui aussi, quelle que soit la forme du contour.

Pour les quatre poutres du contour, seule la courbure intervient :

$$2\varpi_3 = \int_{-L}^{+L} EI_1 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx + \int_0^h EI_2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 dy + \int_{-L}^{+L} EI_3 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx + \int_0^h EI_4 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 dy.$$

Dans ces termes il s'agit de fonctions d'une seule variable car x ou y y est constant. Dans ce problème nous allons calculer explicitement la variation du potentiel de forme dans un déplacement virtuel de forme dans un déplacement virtuel quelconque, quoique l'intégrale double soit seule nécessaire, mais nous constaterons que les conditions aux limites annulent la variation représentée par une intégrale simple. Calculons $\delta\varpi_1$ et intégrons par parties :

$$\delta\varpi_1 = \iint_{\mathcal{S}} \frac{E\Omega}{l} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \delta v}{\partial y} dx\, dy = -\frac{E\Omega}{l} \int_{\mathcal{L}} \frac{\partial v}{\partial y} \delta v\, dx - \frac{E\Omega}{l} \iint_{\mathcal{S}} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \delta v\, dx\, dy.$$

De même,

$$\delta\varpi_2 = \frac{EI}{l} \int_{\mathcal{L}} \left[-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \delta u \right] dx + \frac{EI}{l} \iint_{\mathcal{S}} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \delta u\, dx\, dy.$$

Partageons encore le terme ϖ_3 en ϖ_{31}, ϖ_{32}, ϖ_{33}, ϖ_{34}, relatifs chacun à un côté du rectangle. Nous obtenons

$$\delta\varpi_{31} = EI_1 \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial \delta v}{\partial x} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \delta v \right]_A^B + EI_1 \int_{\mathcal{L}_1} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \delta v\, dx,$$

$$\delta\varpi_{32} = EI_2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial \delta u}{\partial y} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \delta u \right]_B^C + EI_2 \int_{\mathcal{L}_2} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \delta u\, dy,$$

$$\delta\varpi_{33} = EI_3 \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial \delta v}{\partial x} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \delta v \right]_C^D - EI_3 \int_{\mathcal{L}_3} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \delta v\, dx,$$

$$\delta\varpi_{34} = EI_4 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^4} \frac{\partial \delta u}{\partial y} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \delta u \right]_D^A - EI_4 \int_{\mathcal{L}_4} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \delta u\, dy.$$

AB et CD sont les deux côtés horizontaux du rectangle ABCD. $\delta\varpi$ est la somme de tous les éléments partiels trouvés. On peut remarquer que dans les expressions tout intégrées les seconds termes sont nuls par suite de la fixité des quatre sommets en A et B nous avons deux appuis simples et fixes, en C et D, cela résulte de la symétrie des charges et de l'invariabilité des longueurs des côtés verticaux.

Pour vérifier que la somme des quatre termes restant dans la partie tout intégrée est bien nulle, regardons, par exemple les termes correspondants aux sommets A et B :

$$\text{En A :} \quad -\left(EI_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) \frac{\partial \delta v}{\partial x} - \left(EI_4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \frac{\partial \delta u}{\partial y},$$

$$\text{En B :} \quad \left(EI_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) \frac{\partial \delta v}{\partial x} - \left(EI_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \frac{\partial \delta u}{\partial y}.$$

Les quantités $\frac{\partial}{\partial x}\delta v$ et $-\frac{\partial}{\partial y}\delta u$ représentent les angles dont ont tourné les tangentes en A. Elles sont égales. Les moment agissant en A sur deux éléments de côtés du rectangle sont respectivement $EI_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ et $EI_4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Comme ils sont égaux, le terme relatif au point A est bien nul. On ferait le même raisonnement en B où les moments sont $-EI_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ et $-EI_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Dans $\delta\varpi_{3i}$ ne subsistent donc que les intégrales curvilignes. Nous avons aussi des simplifications dans les termes $\delta\varpi_1$ et $\delta\varpi_2$. En effet, sur $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_3$, $\delta u = 0$,

$dy = 0$, tandis que sur $\mathcal{L}_2$ et $\mathcal{L}_4$, $\delta v = 0$, $dx = 0$. Il en résulte que l'intégrale curviligne de $\delta\varpi_1$ est à calculer seulement sur $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_3$, tandis que l'intégrale curviligne de $\delta\varpi_2$ est identiquement nulle. La somme de tous les termes restant de la variation du potentiel de forme est égale au travail virtuel des forces extérieures :

$$\delta\mathcal{T} = \int_{\mathcal{L}_1} - p_1\, \delta v\, dx + \int_{\mathcal{L}_3} p_3\, \delta v\, dx.$$

Le principe du travail virtuel donne donc la relation globale suivante :

$$\iint_{\mathcal{S}} \left(- \frac{E\Omega}{l} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \delta v + \frac{EI}{l} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \delta u \right) dx\, dy + \int_{\mathcal{L}_1} \left(- \frac{E\Omega}{l} \frac{\partial v}{\partial y} + EI_1 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \right) \delta v\, dx$$
$$+ \int EI_2 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \delta u\, dy - \int_{\mathcal{L}_3} \left(\frac{E\Omega}{l} \frac{\partial v}{\partial y} + EI_3 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \right) \delta v\, dx - \int_{\mathcal{L}_4} EI_4 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \delta u\, dy.$$

Il en résulte que u et v sont solutions des équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \qquad (\text{dans } \mathcal{S}).$$

(Il existe un second membre si l'on a une répartition de charges sur les tirants verticaux.) De plus la solution doit satisfaire aux conditions limites suivantes :

$$\Omega \frac{\partial v}{\partial y} - l I_1 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0 \quad \text{sur } \mathcal{L}_1, \qquad \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0 \quad \text{sur } \mathcal{L}_2,$$
$$\Omega \frac{\partial v}{\partial y} + l I_3 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0 \quad \text{sur } \mathcal{L}_3, \qquad \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0 \quad \text{sur } \mathcal{L}_4.$$

13. Grille verticale. — Une grille, qui peut être une membrure de pont métallique, est constituée par un cadre relativement rigide, et supposé inextensible, et par deux systèmes de barres régulièrement disposées. Les unes sont horizontales et les autres verticales, de sorte que la grille est nécessairement verticale. Nous admettons que les poutres horizontales du rectangle supportent des charges réparties p_1 et p_3 par unité de longueur. Nous prenons les mêmes axes que précédemment, et pour simplifier les conditions aux limites, nous admettons la symétrie des charges. Les barres horizontales et verticales sont encastrées en chacun des nœuds et aussi aux points où elles rencontrent les côtés du rectangle. La grille est posée sur deux appuis simples de même niveau aux sommets inférieurs A et B du rectangle.

Désignons par Ω, l, I la section, l'espacement et le moment d'inertie des barres horizontales et par Ω', l', I' les mêmes éléments relatifs aux barres verticales. Remplaçant le système de barres par une membrane, on peut évaluer le potentiel de forme des barres horizontales, dû à leur allongement et à leur courbure

$$\frac{1}{2} \iint_{\mathcal{S}} \left[\frac{E\Omega}{l} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{EI}{l} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx\, dy;$$

ainsi que celui des barres verticales :

$$\frac{1}{2}\iint_{\mathcal{S}}\left[\frac{E\Omega'}{l'}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\frac{EI'}{l'}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2\right]dx\,dy.$$

Le contour rectangulaire fournit la contribution

$$\frac{1}{2}\int_{\mathcal{L}_1}EI_1\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2dx+\frac{1}{2}\int_{\mathcal{L}_2}EI_2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2dy-\frac{1}{2}\int_{\mathcal{L}_3}EI_3\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2dx-\frac{1}{2}\int_{\mathcal{L}_4}EI_4\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2dy,$$

tandis que le travail des forces extérieures est

$$\int_{\mathcal{L}_1}-p_1\,\delta v\,dx+\int_{\mathcal{L}_3}p_3\,\delta v\,dx.$$

Formons le potentiel de forme de la grille

$$\begin{aligned}2\varpi=E\iint_{\mathcal{S}}&\left[\frac{\Omega}{l}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{I'}{l'}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2+\frac{\Omega'}{l'}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\frac{I}{l}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2\right]dx\,dy\\&+EI_1\int_{\mathcal{L}_1}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2dx+EI_2\int_{\mathcal{L}_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2dy-EI_3\int_{\mathcal{L}_3}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2dx-EI_4\int_{\mathcal{L}_4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2dy,\end{aligned}$$

et avant d'en rechercher la variation, notons que les deux fonctions u et v ne sont pas indépendantes par suite de l'encastrement aux nœuds.

Considérons les trois points de coordonnées x, y; $x+dx, y$ et $x, y+dy$ avant toute déformation. Après l'application des charges, ils viennent respectivement en

$$\begin{gathered}x+u,\quad y+v;\quad (x+dx)+(u+u'_x\,dx),\quad y+(v+v'_x\,dx);\\x+(u+u'_y\,dy),\quad (y+dy)+(v+v'_y\,dy).\end{gathered}$$

Les deux vecteurs initiaux, orthogonaux, dx, o et o, dy deviennent $dx+u'_x\,dx$, $v'_x\,dx$ et $u'_y\,dy$, $dy+v'_y\,dy$. Nous admettons que l'encastrement est suffisant pour qu'ils soient encore orthogonaux

$$[u'_y(1+u'_x)+v'_x(1+v'_y)]\,dx\,dy=0,$$

ou, en négligeant les termes du second ordre,

$$u'_y+v'_x=0.$$

Cette condition exprime que la dilatation angulaire est nulle. Elle montre que u et v ne peuvent être pris comme fonctions-paramètres. Il existe une seule fonction-paramètre, φ, que nous choisirons de manière que

$$u=\varphi'_x,\qquad v=-\varphi'_y.$$

Le potentiel de forme que nous avons évalué antérieurement est correct car les encastrements n'apportent aucun potentiel supplémentaire (s'ils ne sont pas élastiques), mais nous devons y exprimer u et v en fonction de φ :

$$\begin{aligned}
2\varpi = {} & \mathrm{E}\iint_{\mathcal{S}} \left[\frac{\Omega}{l}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)^2 + \frac{\Omega'}{l'}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)^2 + \frac{\mathrm{I}}{l}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\,\partial y}\right)^2 + \frac{\mathrm{I}'}{l'}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\,\partial y^2}\right)^2\right] dx\,dy \\
& + \mathrm{EI}_1\int_{\mathcal{L}_1}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\,\partial y}\right)^2 dx + \mathrm{EI}_2\int_{\mathcal{L}_2}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\,\partial y^2}\right)^2 dy \\
& - \mathrm{EI}_3\int_{\mathcal{L}_3}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\,\partial y}\right)^2 dx - \mathrm{EI}_4\int_{\mathcal{L}_4}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\,\partial y^2}\right)^2 dy.
\end{aligned}$$

On calcule la variation du potentiel de forme dans un déplacement virtuel arbitraire $\delta\varphi$ $\left(\text{sous la seule réserve que ce déplacement virtuel soit nul en A, B, C, D, c'est-à-dire } \frac{\partial}{\partial x}\delta\varphi = \frac{\partial}{\partial y}\delta\varphi = 0\right)$. Après les intégrations par parties nécessaires, faites comme dans l'exemple précédent, et après avoir retranché le travail virtuel des charges, on trouve la relation suivante, conséquence du principe du travail virtuel :

$$\begin{aligned}
& \mathrm{E}\iint_{\mathcal{S}}\left[\frac{\Omega}{l}\varphi^{\mathrm{IV}}_{x^4} + \frac{\Omega'}{l'}\varphi^{\mathrm{IV}}_{y^4} - \frac{\mathrm{I}}{l}\varphi^{\mathrm{VI}}_{x^4y^2} - \frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi^{\mathrm{VI}}_{x^2y^4}\right]\delta\varphi\,dx\,dy \\
& \quad + \int_{\mathcal{L}_1}\left\{\left[\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi^{\mathrm{IV}}_{x^2y^2} - \frac{\Omega'}{l'}\varphi''_{y^2} + \mathrm{I}_1\varphi^{\mathrm{V}}_{x^4y}\right) - p_1\right]\frac{\partial}{\partial y}\delta\varphi\right. \\
& \qquad\qquad \left. + \mathrm{E}\left(-\frac{\mathrm{I}}{l}\varphi^{\mathrm{V}}_{x^4y} - \frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi^{\mathrm{V}}_{x^2y^3} + \frac{\Omega'}{l'}\varphi'''_{y^3}\right)\delta\varphi\right\} dx \\
& \quad + \mathrm{E}\int_{\mathcal{L}_2+\mathcal{L}_4}\left[\left(\frac{\Omega}{l}\varphi''_{x^2} - \frac{\mathrm{I}}{l}\varphi^{\mathrm{IV}}_{x^2y^2} + \mathrm{I}_2\varphi^{\mathrm{V}}_{xy^4}\right)\frac{\partial}{\partial x}\delta\varphi + \left(\frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi^{\mathrm{V}}_{xy^4} - \frac{\Omega}{l}\varphi'''_{x^3} + \frac{\mathrm{I}}{l}\varphi^{\mathrm{V}}_{x^3y^2}\right)\delta\varphi\right] dy \\
& \quad + \int_{\mathcal{L}_3}\left\{\left[\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi^{\mathrm{IV}}_{x^2y^2} - \frac{\Omega'}{l'}\varphi''_{y^2} - \mathrm{I}_3\varphi^{\mathrm{V}}_{x^4y}\right) + p_3\right]\frac{\partial}{\partial y}\delta\varphi\right. \\
& \qquad\qquad \left. + \mathrm{E}\left(-\frac{\mathrm{I}}{l}\varphi^{\mathrm{V}}_{x^4y} - \frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi^{\mathrm{V}}_{x^2y^3} + \frac{\Omega'}{l'}\varphi'''_{y^3}\right)\delta\varphi\right\} dx \\
& \quad + \mathrm{E}\left[-(\mathrm{I}_1\varphi'''_{x^2y} + \mathrm{I}_4\varphi'''_{xy^2})\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\delta\varphi + \left(\frac{\mathrm{I}}{l}\varphi'''_{x^2y} + \mathrm{I}_4\varphi^{\mathrm{IV}}_{xy^3}\right)\frac{\partial}{\partial x}\delta\varphi\right. \\
& \qquad\qquad \left. + \left(\frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi'''_{xy^2} + \mathrm{I}_1\varphi^{\mathrm{IV}}_{x^3y}\right)\frac{\partial}{\partial y}\delta\varphi - \left(\frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi^{\mathrm{IV}}_{xy^3} + \frac{\mathrm{I}}{l}\varphi^{\mathrm{IV}}_{x^3y}\right)\delta\varphi\right]_{\mathrm{A}} \\
& \quad + \mathrm{E}\left[(\mathrm{I}_1\varphi'''_{x^2y} - \mathrm{I}_2\varphi'''_{xy^2})\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\delta\varphi + \left(-\frac{\mathrm{I}}{l}\varphi'''_{x^2y} + \mathrm{I}_2\varphi^{\mathrm{IV}}_{xy^3}\right)\frac{\partial}{\partial x}\delta\varphi\right. \\
& \qquad\qquad \left. - \left(\frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi'''_{xy^2} + \mathrm{I}_1\varphi^{\mathrm{IV}}_{x^3y}\right)\frac{\partial}{\partial y}\delta\varphi + \left(\frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi^{\mathrm{IV}}_{xy^3} + \frac{\mathrm{I}}{l}\varphi^{\mathrm{IV}}_{x^3y}\right)\delta\varphi\right]_{\mathrm{B}} \\
& \quad + \mathrm{E}\left[(\mathrm{I}_2\varphi'''_{xy^2} + \mathrm{I}_3\varphi'''_{x^2y})\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\delta\varphi + \left(-\mathrm{I}_2\varphi^{\mathrm{IV}}_{xy^3} + \frac{\mathrm{I}}{l}\varphi'''_{x^2y}\right)\frac{\partial}{\partial x}\delta\varphi\right. \\
& \qquad\qquad \left. + \left(-\mathrm{I}_3\varphi^{\mathrm{IV}}_{x^3y} + \frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi'''_{xy^2}\right)\frac{\partial}{\partial y}\delta\varphi - \left(\frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi^{\mathrm{IV}}_{xy^3} + \frac{\mathrm{I}}{l}\varphi^{\mathrm{IV}}_{x^3y}\right)\delta\varphi\right]_{\mathrm{C}} \\
& \quad + \mathrm{E}\left[(\mathrm{I}_4\varphi'''_{xy^2} - \mathrm{I}_3\varphi'''_{x^2y})\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\delta\varphi - \left(\mathrm{I}_4\varphi^{\mathrm{IV}}_{xy^3} + \frac{\mathrm{I}}{l}\varphi'''_{x^2y}\right)\frac{\partial}{\partial x}\delta\varphi\right. \\
& \qquad\qquad \left. + \left(\mathrm{I}_3\varphi^{\mathrm{IV}}_{x^3y} - \frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi'''_{xy^2}\right)\frac{\partial}{\partial y}\delta\varphi + \left(\frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi^{\mathrm{IV}}_{xy^3} + \frac{\mathrm{I}}{l}\varphi^{\mathrm{IV}}_{x^3y}\right)\delta\varphi\right]_{\mathrm{D}} = 0.
\end{aligned}$$

Les quatre derniers crochets sont à calculer au sommet indiqué en indice. Par suite de la fixité des sommets, on peut noter que les deuxième et troisième parenthèses de ces crochets sont nulles.

La fonction-paramètre φ est donc solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\mathrm{I}}{l}\varphi^{\mathrm{VI}}_{x^4y^2}+\frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi^{\mathrm{VI}}_{x^2y^4}=\frac{\Omega}{l}\varphi^{\mathrm{IV}}_{x^4}+\frac{\Omega'}{l'}\varphi^{\mathrm{IV}}_{y^4}.$$

Elle doit vérifier sur le contour les conditions suivantes :

$$\text{sur } \mathcal{L}_1 : \quad \mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi^{\mathrm{IV}}_{x^2y^2}-\frac{\Omega'}{l'}\varphi''_{y^2}+\mathrm{I}_1\varphi^{\mathrm{V}}_{x^4y}\right)=p_1, \qquad -\frac{\mathrm{I}}{l}\varphi^{\mathrm{V}}_{x^4y}-\frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi^{\mathrm{V}}_{x^2y^3}+\frac{\Omega'}{l'}\varphi'''_{y^3}=0;$$

$$\text{sur } \mathcal{L}_2 \text{ et } \mathcal{L}_4 : \quad \frac{\Omega}{l}\varphi''_{x^2}-\frac{\mathrm{I}}{l}\varphi^{\mathrm{IV}}_{x^2y^2}+\mathrm{I}_2\varphi^{\mathrm{V}}_{xy^4}=0, \qquad \frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi^{\mathrm{V}}_{xy^4}-\frac{\Omega}{l}\varphi'''_{x^3}+\frac{\mathrm{I}}{l}\varphi^{\mathrm{V}}_{x^3y^2}=0;$$

$$\text{sur } \mathcal{L}_3 : \quad \mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi^{\mathrm{IV}}_{x^2y^2}-\frac{\Omega'}{l'}\varphi''_{y^2}-\mathrm{I}_3\varphi^{\mathrm{V}}_{x^4y}\right)+p_3=0, \qquad -\frac{\mathrm{I}}{l}\varphi^{\mathrm{V}}_{x^4y}-\frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi^{\mathrm{V}}_{x^2y^3}+\frac{\Omega'}{l'}\varphi'''_{y^3}=0;$$

et aux quatre sommets, on doit avoir :

$$\text{en A, B, C, D} : \quad \frac{\mathrm{I}'}{l'}\varphi^{\mathrm{IV}}_{xy^3}+\frac{\mathrm{I}}{l}\varphi^{\mathrm{IV}}_{x^3y}=0,$$

$$\text{en A} : \quad \mathrm{I}_1\varphi'''_{x^2y}+\mathrm{I}_4\varphi'''_{xy^2}=0,$$

$$\text{en B} : \quad \mathrm{I}_1\varphi'''_{x^2y}-\mathrm{I}_2\varphi'''_{xy^2}=0,$$

$$\text{en C} : \quad \mathrm{I}_3\varphi'''_{x^2y}+\mathrm{I}_2\varphi'''_{xy^2}=0,$$

$$\text{en D} : \quad \mathrm{I}_3\varphi'''_{x^2y}-\mathrm{I}_4\varphi'''_{xy^2}=0.$$

Cet exemple, relativement difficile, a été traité d'une manière entièrement analytique : formation de l'équation aux dérivées partielles, et conditions au contour. Nous avons évité l'emploi des réactions au contour. Elles auraient permis de constater que les conditions de contour qui ne sont pas géométriques sont vérifiées, comme on l'avait fait dans les exemples antérieurs. Mais notre but, qui est de se ramener à des problèmes classés de Mathématiques, est atteint : il reste à déterminer une fonction solution d'une équation différentielle connue, moyennant des conditions analytiques connues au contour. En particulier, il serait intéressant de prouver que l'ensemble de ces conditions détermine une fonction unique.

14. Petite déformation d'un plan, calcul des nouvelles courbures. — Pour étudier l'équilibre de nouveaux assemblages de poutres, initalement plans, nous avons besoin de calculer les nouvelles courbures, normale et géodésique, et la torsion relative d'une courbe donnée, après une déformation très petite.

Considérons une surface plane située dans le plan invariable xOy. Sous l'action d'un système de charges, le point de coordonnées x, y, o, subit un déplacement de composantes u, v, w, fonctions de x et y. Nous considérons que x et y sont les coordonnées curvilignes de ce point sur la surface déformée. Les vecteurs qui définissent le plan tangent en un point P sont

$$\vec{P}'_x(1+u'_x,\ v'_x,\ w'_x), \qquad \vec{P}'_y(u'_y,\ 1+v'_y,\ w'_y).$$

On en déduit le vecteur normal et ses composantes

$$\vec{N}=\vec{P}'_x \wedge \vec{P}'_y \qquad (-w'_x,\ -w'_y,\ 1+u'_x+v'_y).$$

u, v, w et leurs dérivées premières et secondes sont supposées petites et l'on néglige les produits deux à deux de ces quantités. Dans ces conditions on calcule les coefficients des deux formes quadratiques de Gauss de la Théorie des surfaces :

$$E=1+2u'_x, \qquad F=u'_y+v'_x, \qquad G=1+2v'_y, \qquad H=1+u'_x+v'_y,$$
$$D=w''_{x^2}, \qquad D'=w''_{xy}, \qquad D''=w''_{y^2}.$$

On en déduit le carré de la distance de deux points voisins

$$ds^2=(1+2u'_x)\,dx^2+2(u'_y+v'_x)\,dx\,dy+(1+2v'_y)\,dy^2,$$

qui était initialement dx^2+dy^2. Il en résulte la connaissance de l'allongement relatif

$$\frac{\delta l}{l}=\frac{u'_x\,dx^2+(u'_y+v'_x)\,dx\,dy+v'_y\,dy^2}{dx^2+dy^2}. \tag{27}$$

On détermine ensuite, par des formules classiques, la valeur de la courbure normale

$$\frac{1}{R_m}=\frac{w''_{x^2}\,dx^2+2w''_{xy}\,dx\,dy+w''_{y^2}\,dy^2}{dx^2+dy^2}, \tag{28}$$

et celle de la torsion relative

$$\frac{1}{T_r}=\frac{w''_{xy}(dx^2-dy^2)+(w''_{y^2}-w''_{x^2})\,dx\,dy}{dx^2+dy^2}, \tag{29}$$

après déformation; auparavant, ces quantités étaient identiquement nulles. La formule suivante :

$$\frac{1}{R_g}=\frac{d^2\vec{P}\left(d\vec{P}\wedge\vec{N}\right)}{H\,ds^3}$$

donne la valeur de la courbure géodésique. Le numérateur vaut

$$\begin{vmatrix} d^2x+d^2u & dx+du & -w'_x \\ d^2y+d^2v & dy+dv & -w'_y \\ d^2w & dw & 1+u'_x+v'_y \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} d^2x+d^2u & dx+du \\ d^2y+d^2v & dy+dv \end{vmatrix}(1+u'_x+v'_y).$$

Quant au dénominateur, il fait intervenir l'actuel ds^2, c'est-à-dire $dx^2 + dy^2$ et l'allongement relatif $\frac{\delta l}{l}$:

$$\mathrm{H}\, ds^3 = (1 + u'_x + v'_y)(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}\left(1 + 3\frac{\delta l}{l}\right).$$

D'où le nouveau rayon de courbure géodésique,

$$(30) \qquad \frac{1}{\mathrm{R}_g} = \frac{\begin{vmatrix} d^2x + d^2u & dx + du \\ d^2y + d^2v & dy + dv \end{vmatrix}}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}\left(1 - 3\frac{\delta l}{l}\right),$$

l'ancien valant

$$\frac{d^2x\, dy - d^2y\, dx}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

15. Grille verticale a barreaux obliques. — Imaginons des barreaux tous identiques, inclinés de l'angle $\pm\alpha$ sur l'horizontale, régulièrement disposés, limités à un cadre rectangulaire ABCD dont deux côtés AD et BC sont verticaux. On admet un encastrement parfait en chacun des nœuds du système. Nous nous proposons de trouver, dans une étude sommaire, l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction-paramètre dont dépend la déformation du système soumis à des charges réparties systématiquement sur les côtés AB et CD.

Recherchons d'abord la condition qui lie les composantes u et v du déplacement, sur Ox horizontal et Oy vertical. Le point de coordonnées x, y vient après déformation en $x + u$, $y + v$. Le point voisin du précédent, situé sur la poutre inclinée de $+\alpha$ qui passe par ce point, a pour coordonnées $x + l\cos\alpha$, $y + l\sin\alpha$ avant la mise en charge, et

$$x + u + l(\cos\alpha + u'_x\cos\alpha + u'_y\sin\alpha)$$
$$y + v + l(\sin\alpha + v'_x\cos\alpha + v'_y\sin\alpha),$$

après l'application des charges. Le petit vecteur de composantes $l\cos\alpha$, $l\sin\alpha$ a pour nouvelles composantes

$$l[(1 + u'_x)\cos\alpha + u'_y\sin\alpha], \quad l[v'_x\cos\alpha + (1 + v'_y)\sin\alpha],$$

tandis que le vecteur analogue, issu du même point mais incliné de $-\alpha$ a pour nouvelles composantes

$$l'[(1 + u'_x)\cos\alpha - u'_y\sin\alpha], \quad l'[v'_x\cos\alpha - (1 + v'_y)\sin\alpha].$$

D'une première manière, le produit scalaire de ces deux vecteurs, après déformation a pour valeur

$$ll'[(1 + u'_x)\cos^2\alpha - u'^2_y\sin^2\alpha + v'^2_x\cos^2\alpha - (1 + v'_y)^2\sin^2\alpha],$$

c'est-à-dire

$$ll'[(1 + 2u'_x)\cos^2\alpha - (1 + 2v'_y)\sin^2\alpha]$$

quand on néglige les termes du second ordre. D'une seconde manière, ce produit scalaire vaut encore

$$(l+\delta l)(l'+\delta l')\cos 2\alpha$$

par suite de la conservation de l'angle 2α des petits vecteurs. La comparaison de ces deux valeurs donne la relation suivante :

$$\left(1+\frac{\delta l}{l}\right)\left(1+\frac{\delta l'}{l'}\right)\cos 2\alpha = (1+2u'_x)\cos^2\alpha - (1+2v'_y)\sin^2\alpha,$$

c'est-à-dire, après avoir développé les calculs

$$2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\,(u'_x - v'_y) = 0.$$

Comme α n'est pas un multiple de $\frac{\pi}{2}$, sinon les systèmes de poutres ne seraient pas distincts, on peut satisfaire à la condition précédente en introduisant la fonction-paramètre φ telle que

$$u = \varphi'_y, \qquad v = \varphi'_x \quad (^2).$$

Comme nous nous bornons à l'écriture rapide de l'équation aux dérivées partielles du problème, sans nous soucier des conditions de contour, quelque important que soit matériellement ce contour, il suffit de calculer l'énergie des systèmes de poutres croisées. Nous calculons d'abord l'énergie de courbure et d'allongement du système de poutres inclinées de $+\alpha$. Le changement de α en $-\alpha$ donnera ensuite les énergies correspondantes pour le second système.

Le calcul direct, ou la formule (27), donne l'allongement relatif d'une poutre

$$\frac{\delta l}{l} = \varphi''_{xy} + (\varphi''_{x^2} + \varphi''_{y^2})\sin\alpha\cos\alpha.$$

On en déduit, pour cette seule poutre, l'énergie d'allongement relatif à une petite longueur l :

$$\frac{1}{2}\mathrm{E}\Omega l[\varphi''_{xy} + (\varphi''_{x^2} + \varphi''_{y^2})\sin\alpha\cos\alpha]^2.$$

Considérons maintenant une petite aire rectangulaire $dx\,dy$ dont les côtés parallèles aux axes ont pour longueur dx et dy. Cette aire est équivalente à celle d'un parallélogramme de base horizontale dx et dont l'autre côté, parallèle aux poutres considérées a pour longueur $l = \frac{dy}{\sin\alpha}$. Déformons encore ce parallélogramme de façon à obtenir un rectangle équivalent dont l'un des côtés est l, et l'autre $dx\sin\alpha$. Dans sa largeur sont comprises $\frac{dx\sin\alpha}{\lambda}$ poutres

(2) Cette condition entraîne le fait suivant : en chaque point de la membrane, les directions faisant les angles $\pm\beta$ avec l'horizontale, tournent du même angle, qui dépend en général de β.

parallèles, λ étant la distance de deux poutres voisines. Si $\mathcal{S}$ représente la région du plan où est la grille, l'énergie d'allongement des poutres du premier système a pour valeur

$$\frac{E\Omega}{2\lambda}\iint_{\mathcal{S}}[\varphi''_{xy}+(\varphi''_{x^2}+\varphi''_{y^2})\sin\alpha\cos\alpha]^2\,dx\,dy.$$

Pour le même élément de poutre, l'énergie de courbure a pour valeur

$$EIl\left(\Delta\frac{1}{R_g}\right)^2.$$

La formule (30) donne la nouvelle courbure qui est identique à la variation de courbure, car la courbure était initialement nulle. Cette formule s'écrit dans le cas actuel

$$\frac{1}{R_g}=\frac{\begin{vmatrix} d^2u & \cos\alpha \\ d^2v & \sin\alpha\end{vmatrix}}{ds^2}=\sin\alpha\,\frac{d^2u}{ds^2}-\cos\alpha\,\frac{d^2v}{ds^2},$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\frac{1}{R_g}= &\ \ \sin\alpha\,(\varphi'''_{x^2y}\cos^2\alpha+2\varphi'''_{xy^2}\sin\alpha\cos\alpha+\varphi'''_{y^3}\sin^2\alpha)\\ &-\cos\alpha\,(\varphi'''_{x^3}\ \cos^2\alpha+2\varphi'''_{x^2y}\sin\alpha\cos\alpha+\varphi'''_{xy^2}\sin^2\alpha).\end{aligned}$$

On en déduit comme précédemment l'énergie totale du premier système de poutres

$$\frac{EI}{2\lambda}\iint_{\mathcal{S}}[\cos\alpha(-\varphi'''_{x^3}\cos^2\alpha+\varphi'''_{xy^2}\sin^2\alpha)+\sin\alpha\,(-\varphi'''_{x^2y}\cos^2\alpha+\varphi'''_{y^3}\sin^2\alpha)]^2\,dx\,dy.$$

On est donc conduit à l'énergie de l'ensemble des poutres, contour exclus :

$$\begin{aligned}\varpi=&\frac{E\Omega}{\lambda}\iint_{\mathcal{S}}[\varphi''^2_{x^2}+(\varphi''_{x^2}+\varphi''_{y^2})^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha]\,dx\,dy\\ &+\frac{EI}{\lambda}\iint_{\mathcal{S}}[\cos^2\alpha\,(-\varphi'''_{x^3}\cos^2\alpha+\varphi'''_{xy^2}\sin^2\alpha)^2+\sin^2\alpha\,(-\varphi'''_{x^2y}\cos^2\alpha+\varphi'''_{y^3}\sin^2\alpha)^2]\,dx\,dy.\end{aligned}$$

La variation de cette intégrale, telle que la donne le calcul des variations, quand on suppose la variation nulle au contour (ce qui n'est pas le cas en général pour notre problème, mais cela est sans influence sur l'équation aux dérivées partielles et n'agit que sur les conditions de contour que nous laissons de côté) peut se calculer simplement. Si X et Y sont les opérateurs symboliques $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$, l'équation cherchée s'écrit

$$\{E[X^2Y^2+(X^2+Y^2)\sin^2\alpha\cos^2\alpha]-I(X^2\cos^2\alpha+Y^2\sin^2\alpha)(X^2\cos^2\alpha-Y^2\sin^2\alpha)^2\}\,\varphi=0$$

Si dans cette équation on fait $\alpha=\frac{\pi}{4}$, on retrouve le même résultat qu'avec l'équation aux dérivées partielles du problème précédent, après avoir toutefois effectué une rotation des axes de $\frac{\pi}{4}$ et supposé les deux systèmes de barres identiques

$$\Omega' = \Omega, \qquad I' = I, \qquad l' = l = \lambda.$$

Si l'on désire écrire les conditions au contour, on opère comme au paragraphe 13, c'est-à-dire que l'on ajoute à l'énergie des systèmes de poutres l'énergie du contour; puis on calcule la variation de cette énergie toute entière, et l'on transforme le résultat grâce à des intégrations par parties, de façon à le mettre sous la forme suivante :

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathrm{P}\,\delta\varphi\,dx\,dy + \int_{\mathcal{L}_1}\left(\mathrm{Q}_1\delta\varphi + \mathrm{R}_1\frac{\partial}{\partial y}\delta\varphi + \mathrm{S}_1\frac{\partial}{\partial y^2}\delta\varphi + \ldots\right)dx$$
$$+\int_{\mathcal{L}_2}\left(\mathrm{Q}_2\delta\varphi + \mathrm{R}_2\frac{\partial}{\partial x}\delta\varphi + \ldots\right)dy + \int_{\mathcal{L}_3} + \int_{\mathcal{L}_4} + \mathrm{E_A} + \mathrm{E_B} + \mathrm{E_C} + \mathrm{E_D} = 0.$$

Les conditions aux limites sont

$$\text{sur } \mathcal{S}:\quad \mathrm{P} = 0, \qquad \text{sur } \mathcal{L}_i:\quad 0 = \mathrm{Q}_i = \mathrm{R}_i = \mathrm{S}_i = \ldots;$$
$$\text{en A}:\quad \mathrm{E_A} = 0, \qquad \ldots.$$

Elles expriment naturellement les conditions d'encastrement au contour, mais il est inutile de le vérifier. Ce sont ces conditions qui doivent déterminer la solution de l'équation aux dérivées partielles.

16. Grille horizontale. — Un assemblage de poutres encastrées qui intervient souvent dans la construction de dallages en béton armé est le suivant : deux systèmes de poutres parallèles équidistantes sont construits simultanément, de sorte qu'aux nœuds on a pratiquement un encastrement parfait. Cet assemblage a une forme rectangulaire, dont le contour repose sur des appuis simples, un rectangle égal horizontal. Nous admettons ici une répartition constante de charges verticales, p par unité de surface; nous supposons par surcroît toutes les poutres identiques. Nous admettons en première approximation que le déplacement d'un point de la grille, sous l'action des charges, est vertical, égal à $w(x, y)$.

Le potentiel de forme d'un élément de poutre de longueur très petite, l, est

$$\frac{l}{2}\left[\mathrm{GJ}\left(\Delta\frac{1}{\mathrm{T}_r}\right)^2 + \mathrm{EI}_2\left(\Delta\frac{1}{\mathrm{R}_m}\right)^2 + \mathrm{EI}_3\left(\Delta\frac{1}{\mathrm{R}_g}\right)^2\right].$$

I_2 et I_3 sont respectivement les moments d'inertie de l'aire de la section droite par rapport à l'horizontale et à la verticale du centre de gravité.

Or, en l'absence de charges, $\frac{1}{\mathrm{T}_r}$, $\frac{1}{\mathrm{R}_m}$, $\frac{1}{\mathrm{R}_g}$ sont nuls pour une poutre droite ; le potentiel de forme se réduit donc à

$$\frac{l}{2}\left(\frac{\mathrm{GJ}}{\mathrm{T}_r^2} + \frac{\mathrm{EI}_2}{\mathrm{R}_m^2} + \frac{\mathrm{EI}_3}{\mathrm{R}_g^2}\right),$$

ces quantités étant calculées dans la position déformée. La formule (27) montre que l'allongement relatif est identiquement nul (c'est de l'hypothèse inverse qu'on déduit la nullité de u et v). Les formules (28) et (29) donnent $\frac{1}{R_m}$ et $\frac{1}{T_r}$, la formule (30) montre que $\frac{1}{R_g}$ est nul.

Dans une première hypothèse, nous supposons que les côtés du rectangle qui sert de contour sont parallèles aux deux systèmes de poutres, qui sont donc orthogonaux. Pour le premier système de poutres, un élément de longueur l a pour potentiel de forme

$$\frac{l}{2}[GJ(w''_{xy})^2 + EI(w''_{x^2})^2].$$

Il en résulte pour toute la surface le potentiel

$$\frac{1}{2\lambda}\iint_{\mathcal{S}}[GJ(w''_{xy})^2 + EI(w''_{x^2})^2]\,dx\,dy.$$

De la même manière on a pour le deuxième système de poutres

$$\frac{1}{2\lambda}\iint_{\mathcal{S}} GJ(w''_{xy})^2 + EI(w''_{y^2})^2]\,dx\,dy.$$

Le potentiel de la grille horizontale est donc défini par

$$2\varpi = \frac{1}{\lambda}\iint_{\mathcal{S}}[2GJ\,w''^2_{xy} + EI(w''^2_{x^2} + w''^2_{y^2})]\,dx\,dy.$$

Le travail élémentaire des forces extérieures, dans un déplacement virtuel δw, valant

$$\iint_{\mathcal{S}} -p\,\delta w\,dx\,dy,$$

on en déduit l'équation différentielle du problème

$$2GJ\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + EI\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) + \lambda p = 0.$$

Un calcul plus complet donnerait les conditions au contour.

Dans une deuxième hypothèse, nous admettons que les poutres sont inclinées de l'angle $\pm\alpha$ sur l'axe des x. Les deux axes Ox et Oy étant des axes de symétrie du système matériel. On calcule le potentiel de forme de la manière indiquée ci-dessus et l'on trouve

$$\varpi = \frac{1}{\lambda}\iint_{\mathcal{S}}\{GJ[w''^2_{xy}\cos^2 2\alpha + (w''_{y^2} - w''_{x^2})^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha]$$
$$+ EI[(w''_{x^2}\cos^2\alpha + w''_{y^2}\sin^2\alpha)^2 + w''^2_{xy}\sin^2 2\alpha]\}\,dx\,dy.$$

Le travail virtuel des forces extérieures ayant la valeur précédemment donnée, on forme sans peine l'équation différentielle du problème

$$\begin{aligned}\{ &\mathrm{GJ}\,[\mathrm{X}^2\mathrm{Y}^2\cos^2 2\alpha + (\mathrm{X}^2 - \mathrm{Y}^2)^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha] \\ &+ \mathrm{EI}\,[(\mathrm{X}^2\cos^2\alpha + \mathrm{Y}^2\sin^2\alpha)^2 + \mathrm{X}^2\mathrm{Y}^2\sin^2 2\alpha]\,\}\, w + \lambda p = 0,\end{aligned}$$

avec les symboles

$$\mathrm{X} = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad y = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Il conviendrait d'adjoindre les conditions aux limites qu'on obtient en formant complètement la variation du potentiel de forme.

17. Forme optima des colonnes de révolution pour résister au flambement. — Nous donnons un dernier exemple d'application du Calcul fonctionnel pour déterminer le rayon $r(x)$ à donner à une colonne de révolution verticale supportant la charge verticale Q donnée, de manière à employer le minimum de matériau. La longueur l de la colonne est une donnée du problème.

Ox est l'axe de révolution et O une des extrémités de la colonne. Nous employons la théorie sommaire du phénomène. Soit $y(x)$ la déflexion de la poutre, sous l'action de la charge Q, supposée nulle aux extrémités de la poutre. Calculant de deux manières différentes le moment fléchissant en un point on parvient à l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{\pi \mathrm{E} r^4}{2} y'' + \mathrm{Q} y = 0, \tag{31}$$

où l'on considère, en général, y comme la fonction inconnue et $r(x)$ comme donné. Il n'existe de solution non identiquement nulle pour cette équation, et satisfaisant aux conditions aux limites trouvées, que si Q prend l'une ou l'autre des valeurs d'une certaine suite. La plus petite de ces valeurs est la valeur critique de flambement, au-dessus de laquelle la colonne se brise, car une petite déformation s'amplifie.

D'un autre côté, nous voulons choisir la fonction $r(x)$ de manière que la quantité de matière utilisée soit minimum :

$$\delta \int_0^l \pi r^2\, dx = 0. \tag{32}$$

Nous nous ramenons à un problème du Calcul des variations en considérant que c'est $y(x)$ la fonction variable dont dépend le problème, et non $r(x)$ comme il est d'usage de le faire.

Soit donc $y(x)$ une fonction arbitraire, continue, possédant un nombre suffisant de dérivées continues, cette fonction étant nulle pour $x = 0$ et $x = l$.

La supposant connue, l'équation (31) fournira r :

$$r^4 = -\frac{2Q}{\pi E}\frac{y}{y''}.$$

Enfin, $y(x)$ doit satisfaire à la condition

$$\delta \int_0^l \sqrt{-\frac{y}{y''}}\, dx = 0.$$

C'est un problème bien connu du Calcul des variations. On forme l'équation d'Euler :

$$\frac{1}{\sqrt{-yy''}} + \frac{d^2}{dx^2}\sqrt{-\frac{y}{y''^3}} = 0.$$

On peut l'intégrer complètement, mais nous avons trouvé des difficultés dans la détermination des constantes d'intégration.

18. Conclusion. — La diversité des problèmes traités montre tout l'intérêt qu'il y a à introduire le Calcul fonctionnel en Mécanique et aussi en Physique. Le détail des calculs mis à part, la méthode est simple et relève directement des conceptions de Lagrange au sujet du principe du travail virtuel. Il semble que les exemples étudiés sont relativement simples dans le cadre de l'Analyse fonctionnelle.

Nous avons vu divers procédés pour introduire ou éliminer les réactions au contour. Le procédé, peut-être le plus intéressant, a consisté à ne les introduire que par leur travail virtuel élémentaire, puis à traduire exactement le principe du travail virtuel. On trouve ainsi une intégrale de surface augmentée d'une intégrale curviligne et de termes isolés au contour (points singuliers tels que sommets de rectangles, ou appuis), dont l'ensemble doit être nul quel que soit le déplacement virtuel. L'écriture de cette condition se fait immédiatement, si l'on est assuré que les fonctions-paramètres sont indépendantes. Sinon, ou bien on recherche des fonctions-paramètres indépendantes, ou bien on introduit les multiplicateurs nécessaires. De toutes façons on forme simultanément l'équation ou les équations différentielles du problème et les conditions aux limites.