

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PHILLIPS

## Note sur un problème de cinématique

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 2<sup>e</sup> série*, tome 2 (1873), p. 353-356

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1873\\_2\\_2\\_353\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1873_2_2_353_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1873, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# NOTE

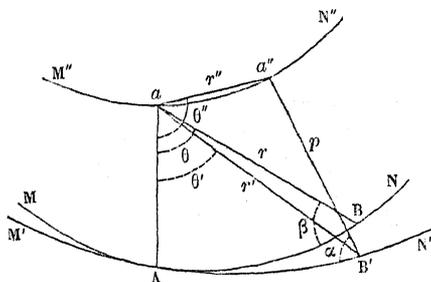
SUR UN

## PROBLÈME DE CINÉMATIQUE,

PAR M. PHILLIPS,

MEMBRE DE L'INSTITUT.

On sait que M. Airy a fait voir que la méthode des enveloppes et celle des roulettes, pour déterminer deux profils conjugués d'un engrenage plan, reviennent au fond l'une à l'autre, et c'est ce qu'il a fait en démontrant que, étant données deux courbes planes quelconques  $M'N'$  et  $M''N''$ , on peut toujours trouver une autre courbe  $MN$  qui soit telle que,



$MN$  roulant sur  $M'N'$ , un point  $a$  relié invariablement à  $MN$  décrit la courbe  $M''N''$ . La seule condition nécessaire est que les normales, menées par les différents points de  $M'N'$  à  $M''N''$ , rencontrent cette dernière courbe. Il a donné, en même temps, le moyen de déterminer cette courbe  $MN$ .

Cette question suggère le problème suivant, qui fait l'objet de cette Note : Étant données deux courbes quelconques  $MN$  et  $M''N''$ , trouver

une courbe  $M'N'$  qui soit telle que,  $MN$  roulant sur  $M'N'$ , un point  $a$  relié invariablement à  $MN$  décrive la courbe  $M''N''$ .

La droite  $aA$ , qui joint  $a$  au point de contact actuel  $A$  des deux courbes  $MN$  et  $M'N'$ , est normale en  $a$  à la courbe  $M''N''$ . Prenons  $a$  pour pôle et  $aA$  pour axe polaire.

Soient  $B$ , dont les coordonnées polaires sont  $r$  et  $\theta$ , un point quelconque de  $MN$  et  $B'$ , dont les coordonnées polaires sont  $r'$  et  $\theta'$ , le point de  $M'N'$  avec lequel le point  $B$  doit plus tard coïncider. Soit  $B'a''$  la normale à  $M''N''$ , menée du point  $B'$ . Soient  $r''$  et  $\theta''$  les coordonnées polaires de  $a''$ . Désignons enfin : par  $p$  la longueur de la normale  $B'a''$ ; par  $\alpha$  l'angle sous lequel cette normale rencontre la courbe  $M'N'$  en  $B'$  et par  $\epsilon$  l'angle sous lequel le rayon vecteur  $aB$  rencontre la courbe  $MN$  en  $B$ . Quand le contact des deux courbes  $MN$  et  $M'N'$  a lieu en  $B'$ , le rayon vecteur  $aB$  coïncide exactement avec la normale  $B'a''$ , et l'on a

$$r = p \quad \text{et} \quad \epsilon = \alpha.$$

La courbe  $MN$  étant donnée, on a

$$\text{tang} \epsilon = f(r),$$

$f(r)$  étant une fonction connue de  $r$ ; par suite on a

$$(1) \quad \text{tang} \alpha = f(p).$$

Soient  $t'$  l'angle formé par le rayon vecteur  $aB'$  avec la tangente à  $M'N'$  en  $B'$  et  $t''$  l'angle formé par le rayon vecteur  $aa''$  avec la tangente à  $M''N''$  en  $a''$ .

Le triangle  $aa''B'$  donne

$$(2) \quad p = \sqrt{r'^2 + r''^2 - 2r'r'' \cos(\theta'' - \theta')}.$$

Dans le même triangle, l'angle  $aa''B' = 90^\circ + t''$ ; d'où

$$p : r' :: \sin(\theta'' - \theta') : \cos t''.$$

On déduit de là, en ayant égard à l'équation (2),

$$(3) \quad \frac{r'^2 \sin^2(\theta'' - \theta')}{\cos^2 t''} = r'^2 + r''^2 - 2r'r'' \cos(\theta'' - \theta'),$$

équation qui revient à

$$(I) \quad r'^2 \sin^2(\theta'' - \theta') \left( 1 + \frac{r''^2 d\theta''^2}{dr''^2} \right) = r'^2 + r''^2 - 2 r' r'' \cos(\theta'' - \theta').$$

D'un autre côté, on a

$$\alpha = t' + aB'a'',$$

ou, en mettant pour  $aB'a''$  sa valeur donnée par le triangle  $aB'a''$ ,

$$\alpha = t' + 180^\circ - (90^\circ + t'') - (\theta'' - \theta'),$$

ou enfin

$$(4) \quad \alpha = 90^\circ - (t'' - t') - (\theta'' - \theta').$$

On tire de là, en développant,

$$\text{tang } \alpha = \frac{1 + \text{tang } t'' \text{ tang } t' - (\text{tang } t'' - \text{tang } t') \text{ tang } (\theta'' - \theta')}{\text{tang } t'' - \text{tang } t' + (1 + \text{tang } t'' \text{ tang } t') \text{ tang } (\theta'' - \theta')},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(5) \quad \text{tang } \alpha = \frac{1 + \frac{r'' d\theta''}{dr''} \frac{r' d\theta'}{dr'} - \left( \frac{r'' d\theta''}{dr''} - \frac{r' d\theta'}{dr'} \right) \text{tang } (\theta'' - \theta')}{\frac{r'' d\theta''}{dr''} - \frac{r' d\theta'}{dr'} + \left( 1 + \frac{r'' d\theta''}{dr''} \frac{r' d\theta'}{dr'} \right) \text{tang } (\theta'' - \theta')}$$

Substituons maintenant, dans l'équation (1), à  $\text{tang } \alpha$  sa valeur (5) et à  $p$  sa valeur (2); nous aurons

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{r'' d\theta''}{dr''} \frac{r' d\theta'}{dr'} - \left( \frac{r'' d\theta''}{dr''} - \frac{r' d\theta'}{dr'} \right) \text{tang } (\theta'' - \theta') \\ \frac{r'' d\theta''}{dr''} - \frac{r' d\theta'}{dr'} + \left( 1 + \frac{r'' d\theta''}{dr''} \frac{r' d\theta'}{dr'} \right) \text{tang } (\theta'' - \theta') \\ = f[\sqrt{r'^2 + r''^2 - 2 r' r'' \cos(\theta'' - \theta')}] \end{array} \right.$$

Soit enfin

$$(III) \quad r'' = F(\theta'')$$

l'équation de la courbe donnée  $M''N''$ .

En éliminant  $r''$  et  $\theta''$  entre les trois équations (I), (II) et (III), on aura l'équation différentielle de la courbe cherchée  $M'N'$ .

Supposons que la courbe  $M''N''$  soit une droite. Alors on a

$$\theta'' = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \frac{r'' d\theta''}{dr''} = 0.$$

L'équation (I) donne

$$\sqrt{r'^2 + r''^2 - 2 r' r'' \cos(\theta'' - \theta')} = r' \cos \theta',$$

et l'équation (II) devient

$$(6) \quad \frac{\text{tang } \theta' + \frac{r' d\theta'}{dr'}}{1 - \text{tang } \theta' \frac{r' d\theta'}{dr'}} = f(r' \cos \theta'),$$

qui est l'équation différentielle de la courbe cherchée  $M'N'$ .

Supposons que, en même temps, la courbe donnée  $MN$  soit une spirale logarithmique dont le pôle soit en  $a$ . Alors l'angle  $\epsilon$  est constant et l'équation (6) devient

$$\frac{\text{tang } \theta' + \frac{r' d\theta'}{dr'}}{1 - \text{tang } \theta' \frac{r' d\theta'}{dr'}} = \text{tang } \epsilon.$$

Soit  $\gamma'$  l'angle formé par la tangente en  $B'$  à  $M'N'$  avec la droite  $Aa$ . On voit que le premier membre de l'équation ci-dessus revient à  $\text{tang } \gamma'$ , d'où résulte

$$\gamma' = \epsilon,$$

ce qui montre que, dans ce cas, la courbe  $M'N'$  est une droite qui coupe  $Aa$  suivant l'angle  $\epsilon$ .

Si la courbe  $MN$ , au lieu d'être une spirale logarithmique était une circonférence de cercle ayant son centre en  $a$ , on trouverait de même, pour la courbe  $M'N'$ , une droite perpendiculaire à  $aA$ , résultat évident *a priori*.