ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

W. POGORZELSKI

Problème aux limites aux dérivées tangentielles pour l'équation parabolique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 75, nº 1 (1958), p. 19-35

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1958_3_75_1_19_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

PROBLÈME AUX LIMITES AUX DÉRIVÉES TANGENTIELLES POUR L'ÉQUATION PARABOLIQUE

PAR M. W. POGORZELSKI.

1. INTRODUCTION. — Le problème aux limites aux dérivées tangentielles posé pour la première fois par H. Poincaré [1], consiste en la recherche d'une fonction harmonique à l'intérieur d'un domaine plan qui, en tout point de la courbe limitant ce domaine, vérifie une relation linéaire entre les valeurs limites : 1° de la dérivée dans la direction de la normale; 2° de la dérivée dans la direction de la tangente; 3° de la fonction elle-même.

Le problème de H. Poincaré a fait l'objet des recherches de plusieurs auteurs. Les résultats les plus approfondis ont été obtenus par les mathématiciens géorgiens B. Hvédélidzé [2] et I. Vécoua [3]. Le problème de H. Poincaré a été généralisé par l'auteur du présent travail dans le cas d'une relation non linéaire entre les valeurs limites des dérivées au bord du domaine donné (*voir* [4]).

Dans le présent travail nous poserons et résoudrons le problème aux limites aux dérivées tangentielles pour une équation parabolique de la forme

$$\hat{\Psi}(u) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(\mathrm{A}, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha(\mathrm{A}, t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + c(\mathrm{A}, t)u - \frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{F}\left(\mathrm{A}, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) \tag{1}$$

dans l'espace à $n+1$ dimensions.

2. FORMULES ET THÉORÈMES PRINCIPAUX. — Nous admettons les suppositions suivantes :

I. Les fonctions réelles $a_{\alpha\beta}(\mathrm{A}, t)$ sont définies dans le domaine fermé

$$\mathrm{A}(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega + \mathrm{S}; \qquad 0 \leq t \leq \mathrm{T} \tag{2}$$

et vérifient une condition de Hölder de la forme

$$(3) \qquad |a_{\alpha\beta}(A, t) - a_{\alpha\beta}(A_1, t_1)| < \text{Cte} \times [r_{AA_1}^h + |t - t_1|^{h'}].$$

Ω désigne un domaine borné dans l'espace euclidien à n dimensions, limité par la surface fermée S; $(x_1, \ldots, x_n)$ désignent les coordonnées rectangulaires du point A; r_{AA_1} désigne la distance des deux points A, A_1; h et h' sont des constantes positives non supérieures à l'unité.

II. Les fonctions réelles $b_\alpha(A, t)$, $c(A, t)$ sont définies et continues dans le domaine fermé (2) et vérifient la condition de Hölder par rapport aux variables spatiales ;

$$(4) \qquad \begin{cases} |b_\alpha(A, t) - b_\alpha(A_1, t)| < \text{Cte} \times r_{AA_1}^h, \\ |c\ (A, t) - c\ (A_1, t)| < \text{Cte} \times r_{AA_1}^h. \end{cases}$$

III. La fonction réelle $F(A, t, u, u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est définie et continue dans la région fermée

$$(5) \qquad A \in \Omega + S; \qquad 0 \leqq t \leqq T; \qquad |u| \leqq R; \qquad |u_\alpha| \leqq R \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n);$$

en outre, cette fonction vérifie une condition de Hölder par rapport aux variables A, u, u_1, ..., u_n.

IV. La forme quadratique

$$(6) \qquad \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}\ (A, t)\, X_\alpha X_\beta$$

est définie positive dans le domaine (2).

V. La surface S vérifie les conditions suivantes, dites de Liapounoff :

a. Il existe un plan tangent en tout point de la surface S;

b. L'angle (N_P, N_Q), entre deux normales aux points arbitraires P, Q de la surface S, vérifie l'inégalité

$$(7) \qquad (N_P, N_Q) < \text{Cte} \times r_{PQ}^{\varkappa},$$

$\varkappa$ étant une constante positive, non supérieure à l'unité;

c. Il existe un nombre positif δ tel que la sphère K centrée au point arbitraire P de la surface S et ayant pour rayon δ, découpe une portion S_K de cette surface, située à l'intérieur de la sphère K, dont la projection orthogonale sur le plan tangent en P est un ensemble de points qui correspondent dans cette projection d'une façon biunivoque aux points de la portion S_K.

D'après le travail [5], la solution fondamentale Γ de l'équation

$$(8) \qquad \hat{\Psi}(u) = 0$$

est donnée par la formule [1]

$$\Gamma(A, t; B, \tau) = w^{B,\tau}(A, t; B, \tau) + \int_0^t \iiint_{\Omega'(M)} w^{M,\zeta}(A, t; M, \zeta)\Phi(M, \zeta; B, \tau)\, dM\, d\zeta, \tag{9}$$

où l'on a

$$w^{M,\zeta}(A, t; B, \tau) = (t-\tau)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{\vartheta^{M,\zeta}(A, B)}{4(t-\tau)}\right], \tag{9'}$$

$$\vartheta^{M,\zeta}(A, B) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a^{\alpha\beta}(M, \zeta)(x_\alpha - \xi_\alpha)(x_\beta - \xi_\beta). \tag{9''}$$

$a^{\alpha\beta}$ désigne les éléments de la matrice *inverse* de la matrice $\| a_{\alpha\beta} \|$; Ω' désigne un domaine fermé arbitraire, borné dans l'espace à n dimensions considéré, contenant $\Omega + S$, où les fonctions $a_{\alpha\beta}(A, t)$, $b_\alpha(A, t)$, $c(A, t)$ sont prolongées d'une façon arbitraire, mais sous la condition de satisfaire aux inégalités (3), (4) et de conserver la propriété de la forme quadratique (6); $A(x_1, \ldots, x_n)$ et $B(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ désignent deux points arbitraires du domaine Ω', en outre, on a $0 \leqq \tau < t \leqq T$.

La fonction $\Phi(A, t; B, \tau)$ est une solution de l'équation intégrale

$$\Phi(A, t; B, \tau) = f(A, t; B, \tau) + \lambda \int_\tau^t \iiint_{\Omega'} N(A, t; M, \zeta)\Phi(M, \zeta; B, \tau)\, dM\, d\zeta, \tag{10}$$

où l'on a

$$\left\{\begin{aligned} & N(A, t; M, \zeta) = \sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(A, t)|}\, \hat{\Psi}_{A,t}[w^{M,\zeta}(A, t; M, \zeta)], \\ & f(A, t; B, \tau) = \lambda N(A, t; B, \tau), \\ & \lambda = (2\sqrt{\pi})^{-n}, \end{aligned}\right. \tag{11}$$

B, τ jouent le rôle des paramètres fixés arbitrairement dans le domaine Ω', resp. dans l'intervalle $(0, T)$. D'après le travail [5], le noyau N de l'équation (10) admet une limitation aux singularités séparées faibles

$$|N(A, t; M, \zeta)| < \frac{\text{Cte}}{(t-\zeta)^\mu} \frac{1}{r_{AM}^{n+2-2\mu-h_1}}, \tag{12}$$

où $h_1 = \min(h, 2h')$ et μ est un nombre positif arbitrairement fixé à l'intérieur de l'intervalle $\left(1 - \frac{h_1}{2}, 1\right)$. La solution Φ de l'équation (10) vérifie l'inégalité de la même forme

$$|\Phi(A, t; B, \tau)| < \frac{\text{Cte}}{(t-\tau)^\mu} \frac{1}{r_{AB}^{n+2-2\mu-h_1}}. \tag{13}$$

Définition 1. — Nous appelons potentiel de simple couche, relative à

---

[1] Nous conservons dans ce travail le signe d'intégrale triple pour l'intégrale de volume et le signe d'intégrale double pour l'intégrale de surface (à $n-1$ dimensions) dans l'espace à n dimensions; dM désigne l'élément de volume au point M.

l'équation parabolique $\Psi(u) = 0$, l'intégrale de surface suivante :

$$(14) \qquad U(A, t) = \int_0^t \iint_S \Gamma(A, t; Q, \tau)\varphi(Q, \tau)\, dQ\, d\tau,$$

où la fonction $\varphi(Q, \tau)$, dite densité de simple couche, est définie dans la région $[Q \in S; 0 \leqq \tau \leqq T]$ où elle est bornée et intégrable; dQ désigne l'élément d'aire au point Q de la surface S.

La fonction (14) vérifie l'équation (8) en tout point intérieur A du domaine Ω, pour $0 < t < T$. Nous avons étudié plusieurs propriétés de l'intégrale (14) et de ses dérivées dans le travail [6]. Ici nous citons trois des propriétés dont nous aurons besoin.

THÉORÈME 1. — *Si la densité $\varphi(Q, \tau)$ de simple couche est une fonction bornée et intégrable, alors le potentiel (14) dans l'ensemble $[\Omega + S; (0, T)]$ vérifie une condition de Hölder de la forme*

$$(14') \qquad |U(A, t) - U(A_1, t_1)| < \text{Cte.} \sup|\varphi| \left[r_{AA_1}^{\theta} + |t - t_1|^{\frac{1}{2}\theta'} \right],$$

où θ, θ' étant deux constantes positives arbitraires, inférieures à l'unité.

THÉORÈME 2. — *Si la densité $\varphi(Q, \tau)$ de la couche est continue, une certaine combinaison linéaire des dérivées premières du potentiel de simple couche (14),*

$$(15) \qquad \frac{d}{dT_P}[U(A, t)] = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(A, t) \cos(N_P, x_\beta) U_{x_\alpha}(A, t),$$

dite dérivée transversale, relative au point P de la surface S, possède la propriété limite suivante :

$$(16) \qquad \lim_{A \to P} \frac{d}{dT_P}[U(A, t)] = -\frac{1}{2} \frac{(2\sqrt{\pi})^n}{\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(P, t)|}} \varphi(P, t) + \int_0^t \iint_S \frac{d}{dT_P}[\Gamma(P, t; Q, \tau)]\varphi(Q, \tau)\, dQ\, d\tau.$$

La dérivée transversale de la solution fondamentale vérifie l'inégalité suivante aux singularités séparées :

$$(17) \qquad \left| \frac{d}{dT_P}[\Gamma(P, t; Q, \tau)] \right| < \frac{\text{Cte}}{(t - \tau)^{\mu'}} \frac{1}{r_{PQ}^{n+1-2\mu'-\varkappa_1}},$$

où $\varkappa_1 = \min(h, 2h', \varkappa)$ et μ' est une constante positive choisie arbitrairement à l'intérieur de l'intervalle $\left(1 - \frac{\varkappa_1}{2}, 1\right)$. Les singularités de la limitation (17) sont faibles, d'après l'inégalité $n + 1 - 2\mu' - \varkappa_1 < n - 1$, et l'intégrale (16) a un sens.

THÉORÈME 3. — *Si les conditions du théorème 1 sont satisfaites, l'intégrale*

$$(17') \qquad H(P, t) = \int_0^t \iint_S \frac{d}{dT_P}[\Gamma(P, t; Q, \tau)]\varphi(Q, \tau)\, dQ\, d\tau,$$

qui figure dans la propriété limite (16), *vérifie en tout point* P *de la surface* S *la condition de Hölder suivante :*

$$(17'') \qquad |H(P, t) - H(P_1, t_1)| < \text{Cte.}\sup|\varphi|\left[r_{PP_1}^{\theta\varkappa_1} + |t - t_1|^{\frac{1}{3}\theta'\varkappa_1}\right],$$

θ, θ' *étant deux constantes positives arbitraires, inférieures à l'unité.*

Soit maintenant, défini sur la surface S, un champ des directions $\{s_P\}$, qui à tout point P de la surface S fait correspondre un axe déterminé s_P tangent en P à la surface S. Nous admettons que l'angle, que font les directions du champ aux deux points arbitraires P et Q de la surface S, vérifie l'inégalité

$$(18) \qquad (s_P, s_Q) < \text{Cte}\, r_{PQ}^{h_s},$$

où h_s est une constante positive non supérieure à l'unité.

Dans nos considérations actuelles les deux propriétés suivantes des dérivées tangentielles du potentiel de simple couche (14), que nous avons démontrées dans le travail [7], possèdent une importance essentielle.

THÉORÈME 4. — *Si la densité de la couche est continue et vérifie une condition de Hölder de la forme*

$$(19) \qquad |\varphi(Q, \tau) - \varphi(Q_1, \tau)| < k_\varphi r_{QQ_1}^{h_\varphi} \qquad (k_\varphi > 0;\ 0 < h_\varphi \leqq 1),$$

alors la dérivée du potentiel de simple couche (14), *au point intérieur* $A \in \Omega$ (*pour* $0 < t < T$) *dans la direction de la tangente* s_P *au point arbitraire* $P \in S$, *possède une limite déterminée par la formule*

$$(20) \qquad \lim_{A \to P} \frac{d}{ds_P}[U(A, t)] = U_{s_P}(P, t) = \int_0^t \iint_S \Gamma_{s_P}(P, t; Q, \tau)\, \varphi(Q, \tau)\, dQ\, d\tau.$$

Nous signalons que la dérivée tangentielle de la solution fondamentale admet la limitation

$$(20') \qquad |\Gamma_{s_P}(P, t; Q, \tau)| < \frac{\text{Cte}}{(t-\tau)^\mu}\, \frac{1}{r_{PQ}^{n+1-2\mu}};$$

elle a une singularité trop forte pour en conclure la convergence absolue de l'intégrale (20). C'est pourquoi la preuve d'existence de la limite (20) dans le travail [7] exigeait des considérations plus délicates que pour l'intégrale (16). Nous avons démontré, sous l'hypothèse (19) que l'intégrale de surface dans la formule (20) qui n'est pas absolument convergente, admet une limitation à singularité faible

$$(21) \qquad \left|\iint_S \Gamma_{s_P}(P, t; Q, \tau)\varphi(Q, \tau)\, dQ\right| < \frac{\text{Cte.}}{(t-\tau)^{\mu_1}}$$

$\left[\text{où } 1-\frac{\varkappa'}{2}<\mu_1<1,\ \varkappa'=\min(h,\ h_\varphi,\ \varkappa)\right]$ qui assure l'existence de l'intégrale (20) par rapport à la variable τ. Nous ajoutons encore que, d'après le travail [7], l'intégrale singulière a aussi le sens de valeur principale de Cauchy, c'est-à-dire qu'elle est égale à la limite suivante :

$$(22)\qquad U_{s_P}(P,\ t)=\lim_{r_\Pi\to 0}\int_0^t\iint_{S-S_\Pi}\Gamma_{s_P}(P,\ t;\ Q,\ \tau)\varphi(Q,\ \tau)\,dQ\,d\tau,$$

où S_Π est une portion de la surface S au voisinage du point P, découpée par le cylindre Π de l'axe Px_n, normal en P à la surface S, et de rayon r_Π.

Théorème 5. — *Si le champ* $\{s_P\}$ *de directions de tangentes sur la surface* S *vérifie la condition* (18), *si la densité de la couche* $\varphi(Q,\ \tau)$ *vérifie la même condition de Hölder* (19) *que dans le théorème précédent, et si en outre les exposants donnés vérifient l'inégalité*

$$(23)\qquad h_\varphi<\min(h,\ 2h',\ 2\varkappa,\ h_s),$$

alors les valeurs limites (20) des dérivées du potentiel de simple couche (14) dans les directions du champ des tangentes $\{s_P\}$ vérifient une inégalité de Hölder de la forme

$$(24)\qquad |U_{s_P}(P,\ t)-U_{s_{P_1}}(P_1,\ t_1)|<(C_1M_\varphi+C_2k_\varphi)\left(r_{PP_1}^{h_\varphi}+|t-t_1|^{\frac{1}{3}\theta\varkappa_*}\right)$$

avec la même valeur h_φ de l'exposant de Hölder que la densité φ; on a

$$(25)\qquad \varkappa_*=\min\left(h,\ 2h',\ 3\varkappa,\ \frac{3}{2}h_\varphi\right),$$

$M_\varphi=\sup|\varphi|$, C_1 et C_2 sont des constantes positives, indépendantes de la fonction φ, et θ, une constante positive arbitraire inférieure à l'unité.

Remarque. — La valeur limite de la dérivée tangentielle (20), elle-même, vérifie une inégalité de la forme

$$(26)\qquad |U_{s_P}(P,\ t)|<C'_1M_\varphi+C'_2k_\varphi,$$

où C'_1 et C'_2 sont des constantes positives indépendantes de la fonction φ.

Définition 2. — Nous appelons potentiel de charge spatiale relatif à l'équation parabolique (1), l'intégrale de volume

$$(27)\qquad V(A,\ t)=\int_0^t\iiint_\Omega\Gamma(A,\ t;\ B,\ \tau)\rho(B,\ \tau)\,dB\,d\tau,$$

où la fonction $\rho(B,\ \tau)$ — dite la densité de la charge — est définie dans la région $[\Omega,\ (0,\ T)]$.

Théorème 6. — *Si la densité* $\rho(B,\ \tau)$ *est une fonction bornée et intégrable, le* *potentiel de charge spatiale* (27) *satisfait par rapport à la variable t à une condition de Hölder de la forme*

(28) $$|V(A, t) - V(A, t_1)| < \text{Cte.} \sup|\rho|.|t - t_1|^\theta,$$

et les premières dérivées spatiales de ce potentiel satisfont à une condition de Hölder de la forme

(29) $$|V_{x_\alpha}(A, t) - V_{x_\alpha}(A_1, t_1)| < \text{Cte.} \sup|\rho|.\left[r_{AA_1}^{\theta} + |t - t_1|^{\frac{\theta'}{2}}\right]$$
$$(0 < \theta < 1,\ 0 < \theta' < 1).$$

THÉORÈME 7. — *Si la densité* $\rho(B, \tau)$ *est une fonction continue par rapport à la variable t et vérifie une condition de Hölder par rapport à la variable* B, *alors le potentiel de charge spatiale admet des dérivées secondes spatiales en tout point intérieur* A *du domaine* Ω *pour* $0 < t < T$, *qui vérifient l'équation généralisée de Poisson :*

(30) $$\hat{\Psi}[V(A, t)] = -\frac{(2\sqrt{\pi})^n}{\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(A, t)|}}\rho(A, t).$$

3. ÉNONCÉ DU PROBLÈME. — Soient q champs de directions des tangentes

(31) $$\{s_P^{(1)}\},\quad \{s_P^{(2)}\},\quad \ldots,\quad \{s_P^{(q)}\}$$

définies sur la surface S; on suppose que

$$1 \leqq q \leqq n - 1.$$

Nous admettons que tous les champs (27) vérifient une condition de la forme (18), c'est-à-dire que l'angle entre deux directions du même champ, correspondant aux deux points arbitraires P et Q de la surface S, vérifient l'inégalité

(32) $$(s_P^{(\alpha)} s_Q^{(\alpha)}) < \text{Cte.}\, r_{PQ}^{h_s} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, q),$$

où $0 < h_s \leqq 1$.

Nous posons le problème de la détermination d'une fonction $u(A, t)$ qui :

1° vérifie l'équation donnée (1) en tout point intérieur de la région

$$[A \in \Omega;\ 0 < t < T];$$

2° satisfait à une condition limite aux dérivées tangentielles de la forme

(33) $$\frac{du}{dT_P} + g(P, t)u(P, t) = G[P, t, u(P, t), u_{s_P^{(1)}}(P, t), \ldots, u_{s_P^{(q)}}(P, t)]$$

en tout point $P \in S$ pour $0 < t < T$;

3° vérifie la condition initiale

(34) $$\lim_{t \to 0} u(A, t) = 0$$

en tout point intérieur $A \in \Omega$.

Nous admettons que la fonction donnée $G(P, t, u_0, u_1, \ldots, u_q)$ est définie, continue dans la région fermée

$$(35) \qquad P \in S; \quad 0 \leqq t \leqq T; \quad |u_\alpha| \leqq R \quad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, q)$$

et qu'elle vérifie une condition de Hölder de la forme

$$(36) \qquad |G(P, t, u_0, u_1, \ldots, u_q) - G(P', t', u'_0, u'_1, \ldots, u)'_q| < k_G\left[r_{PP'}^{h_G} + |u_0 - u'_0|^{h'_G} + \sum_{\alpha=1}^{q} |u_\alpha - u'_\alpha| \right].$$

En outre, on suppose l'égalité

$$(37) \qquad G(P, 0, u_0, u_1, \ldots, u_q) = 0.$$

Quant à la fonction donnée $g(P, t)$, on suppose qu'elle soit définie dans la région

$$[P \in S; \, 0 \leqq t \leqq T],$$

qu'elle soit continue par rapport à la variable t et qu'elle vérifie une condition de Hölder de la forme

$$(38) \qquad |g(P, t) - g(P', t)| < k_g r_{PP'}^{h_g}.$$

4. Résolution du problème. — Nous allons chercher la solution du problème sous la forme d'une somme

$$(39) \qquad u(A, t) = \int_0^t \iiint_{\Omega(B)} \Gamma(A, t; B, \tau) F_1\left[B, \tau, u(B, \tau), \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial \xi_n}\right] dB\, d\tau + \int_0^t \iint_{S(Q)} \Gamma(A, t; Q, \tau) \varphi(Q, \tau)\, dQ\, d\tau$$

du potentiel de charge spatiale et du potentiel de simple couche de densité inconnue $\varphi(Q, \tau)$. On pose

$$(40) \qquad F_1(B, \tau, u, u_1, \ldots, u_n) = -(2\sqrt{\pi})^{-n} \sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(B, \tau)|}\, F(B, \tau, u, u_1, \ldots, u_n).$$

En demandant que la fonction (39) vérifie la condition limite (33), sous l'hypothèse que la fonction $\varphi(Q, \tau)$ vérifie une condition de Hölder par rapport à la variable Q, d'après les théorèmes 1 et 2, on obtient l'équation suivante :

$$(41) \qquad -\frac{(2\sqrt{\pi})^n}{2\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(P, t)|}} \varphi(P, t) + \int_0^t \iint_{S(Q)} \left\{ \frac{d}{dT_P}[\Gamma(P, t; Q, \tau)] + g(P, t)\Gamma(P, t; Q, \tau) \right\} \varphi(Q, \tau)\, dQ\, d\tau$$
$$+ \int_0^t \iiint_{\Omega(B)} \left\{ \frac{d}{dT_P}[\Gamma(P, t; B, \tau)] + g(P, t)\Gamma(P, t; B, \tau) \right\} \times F_1\left[B, \tau, u(B, \tau), \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial \xi_n}\right] dB\, d\tau$$
$$= G\left[P, t, u(P, t), u_{s_P(1)}(P, t, \ldots, u_{s_P(q)}(P, t)\right],$$

où

$$(42)\quad u_{s_{\rm P}^{(\alpha)}}({\rm P}, t) = \int_0^t \iiint_{\Omega({\rm B})} \Gamma_{s_{\rm P}^{(\alpha)}}({\rm P}, t; {\rm B}, \tau) {\rm F}_1\left[{\rm B}, \tau, u({\rm B}, \tau), \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial \xi_n}\right] d{\rm B}\, d\tau$$
$$+ \int_0^t \iint_{{\rm S}({\rm Q})} \Gamma_{s_{\rm P}^{(\alpha)}}({\rm P}, t; {\rm Q}, \tau)\, \varphi({\rm Q}, \tau)\, d{\rm Q}\, d\tau \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, q).$$

Notre problème se ramène à la résolution du système d'équations intégrodifférentielles (39), (41) aux deux fonctions inconnues : $u({\rm A}, t)$ et $\varphi({\rm P}, t)$; la première dans la région $[\Omega; (0, {\rm T})]$, la seconde dans la région $[{\rm S}; (0, {\rm T})]$. Les équations précédentes présentent des singularités fortes sous le signe de l'intégrale de surface dans les expressions (42). Les autres intégrales admettent des singularités faibles.

Pour résoudre le système d'équations (39), (41), considérons le système suivant d'équations intégrales :

$$(43)\quad \begin{cases} u_0({\rm A}, t) = \displaystyle\int_0^t \iiint_{\Omega({\rm B})} \Gamma({\rm A}, t; {\rm B}, \tau) {\rm F}_1[{\rm B}, \tau, u_0({\rm B}, \tau), u_1({\rm B}, \tau), \ldots, u_n({\rm B}, \tau)]\, d{\rm B}\, d\tau \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_0^t \iint_{{\rm S}({\rm Q})} \Gamma({\rm A}, t; {\rm Q}, \tau)\, \varphi({\rm Q}, \tau)\, d{\rm Q}\, d\tau, \\ u_\nu({\rm A}, t) = \displaystyle\int_0^t \iiint_{\Omega({\rm B})} \Gamma_{x_\nu}({\rm A}, t; {\rm B}, \tau) {\rm F}_1[{\rm B}, \tau, u_0({\rm B}, \tau), \ldots, u_n({\rm B}, \tau)]\, d{\rm B}\, d\tau \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_0^t \iint_{{\rm S}({\rm Q})} \Gamma_{x_\nu}({\rm A}, t; {\rm Q}, \tau)\, \varphi({\rm Q}, \tau)\, d{\rm Q}\, d\tau \\ \qquad\qquad\qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n); \end{cases}$$

$$(44)\quad -\frac{(2\sqrt{\pi})^n}{2\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}({\rm P}, t)|}}\, \varphi({\rm P}, t)$$
$$+ \int_0^t \iint_{{\rm S}({\rm Q})} \left\{ \frac{d}{d{\rm T_P}}[\Gamma({\rm P}, t; {\rm Q}, \tau)] + g({\rm P}, t)\Gamma({\rm P}, t; {\rm Q}, \tau) \right\} \varphi({\rm Q}, \tau)\, d{\rm Q}\, d\tau$$
$$+ \int_0^t \iiint_{\Omega({\rm B})} \left\{ \frac{d}{d{\rm T_P}}[\Gamma({\rm P}, t; {\rm B}, \tau)] \right.$$
$$\left. + g({\rm P}, t)\Gamma({\rm P}, t; {\rm B}, \tau) \right\} {\rm F}_1[{\rm B}, \tau, u_0({\rm B}, \tau), \ldots, u_n({\rm B}, \tau)]\, d{\rm B}\, d\tau$$
$$= {\rm G}\left[{\rm P}, t, u_0({\rm P}, t), \overline{u}_{s_{\rm P}^{(1)}}({\rm P}, t), \ldots, \overline{u}_{s_{\rm P}^{(q)}}({\rm P}, t)\right]$$

aux $n+2$ fonctions inconnues

$$u_0({\rm A}, t), \quad u_1({\rm A}, t), \quad \ldots, \quad u_n({\rm A}, t), \quad \varphi({\rm P}, t).$$

On a

$$(45)\quad \overline{u}_{s_{\rm P}^{(\alpha)}}({\rm P}, t)$$
$$= \int_0^t \iiint_{\Omega({\rm B})} \Gamma_{s_{\rm P}^{(\alpha)}}({\rm P}, t; {\rm B}, \tau) {\rm F}_1[{\rm B}, \tau, u_0({\rm B}, \tau), u_1({\rm B}, \tau), \ldots, u_n({\rm B}, \tau)]\, d{\rm B}\, d\tau$$
$$+ \int_0^t \iint_{{\rm S}({\rm Q})} \Gamma_{s_{\rm P}^{(\alpha)}}({\rm P}, t; {\rm Q}, \tau)\, \varphi({\rm Q}, \tau)\, d{\rm Q}\, d\tau \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, q).$$

Le système d'équations intégrales (43), (44), aux fortes singularités, étant irrésoluble par les méthodes d'analyse classique, nous démontrerons l'existence de la solution par l'application du théorème topologique suivant de J. Schauder [8] sur le point invariant d'une transformation dans l'espace de Banach :

Toute transformation continue d'un ensemble de points, convexe, borné et fermé dans un espace linéaire, normé et complet, en un sous-ensemble compact, admet au moins un point invariant.

Soit donc un espace fonctionnel Λ composé de tous les systèmes

$$[u_0(A, t), u_1(A, t), \ldots, u_n(A, t), \varphi(P, t)]$$

de fonctions *continues réelles*, définies soit dans la région fermée $[A \in \Omega + S; 0 \leqq t \leqq T]$, soit dans la région fermée $[P \in S; 0 \leqq t \leqq T]$.

On définit, comme d'habitude, la somme de deux points et le produit d'un point par le nombre réel, par les formules

$$[u_0, u_1, \ldots, u_n, \varphi] + [u'_0, u'_1, \ldots, u'_n, \varphi'] = [u_0 + u'_0, u_1 + u'_1, \ldots, u_n + u'_n, \varphi + \varphi'],$$
$$\gamma[u_0, u_1, \ldots, u_n, \varphi] = [\gamma u_0, \gamma u_1, \ldots, \gamma u_n, \gamma\varphi], \tag{46}$$

la norme d'un point $U[u_0, u_1, \ldots, u_n, \varphi]$ par la formule

$$\| U \| = \sum_{\nu=0}^{n} \sup | u_\nu(A, t) | + \sup | \varphi(P, t) | \tag{47}$$

et la distance des deux points, par la formule

$$\delta(U, V) = \| U - V \|. \tag{48}$$

Il est facile de conclure, que l'espace Λ est linéaire, normé et complet, donc un espace de Banach.

Considérons maintenant dans l'espace Λ l'ensemble E de tous les points $U[u_0(A, t), u_1(A, t), \ldots, u_n(A, t), \varphi(P, t)]$ vérifiant les conditions suivantes :

$$\left\{\begin{array}{ll} | u_\nu(A, t) | \leqq R & (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n), \\ | \varphi(P, t) | \leqq \rho, & \varphi(P, 0) = 0, \\ | \varphi(P, t) - \varphi(P_1, t) | \leqq k_\varphi r_{PP_1}^{h_\varphi}, & \end{array}\right. \tag{49}$$

R étant un nombre positif donné, figurant dans les conditions concernant les fonctions F et G, ρ et k_φ étant deux constantes positives arbitraires, non fixées pour le moment, l'exposant h_φ est un nombre positif fixé *arbitrairement*, mais sous la condition que les inégalités suivantes soient satisfaites :

$$0 < h_\varphi \left\{\begin{array}{l} \leqq \min(h_G, h_g) < 1, \\ < h'_G \leqq 1, \\ < h_s \leqq 1, \\ < \varkappa_1 = \min(h, 2h', \varkappa). \end{array}\right. \tag{50}$$

L'ensemble E est évidemment *fermé*, en outre il est *convexe*, puisque tout point

$$(1-\gamma)\mathrm{U}+\gamma\mathrm{V} \qquad (0 \leqq \gamma \leqq 1)]$$

du segment, joignant les deux points arbitraires U et V de l'ensemble E, appartient à cet ensemble.

Remarque faite de la forme des équations intégrales (43) et (44), transformons l'ensemble E par les relations suivantes :

$$(51)\quad \left\{\begin{aligned} v_0(\mathrm{A},t) &= \int_0^t \iiint_{\Omega(\mathrm{B})} \Gamma(\mathrm{A},t;\mathrm{B},\tau)\mathrm{F}_1[\mathrm{B},\tau,u_0(\mathrm{B},\tau),u_1(\mathrm{B},\tau),\ldots,u_n(\mathrm{B},\tau)]\,d\mathrm{B}\,d\tau \\ &\quad + \int_0^t \iint_{\mathrm{S}(\mathrm{Q})} \Gamma(\mathrm{A},t;\mathrm{Q},\tau)\varphi(\mathrm{Q},\tau)\,d\mathrm{Q}\,d\tau; \\ v_\nu(\mathrm{A},t) &= \int_0^t \iiint_{\Omega(\mathrm{B})} \Gamma_{x_\nu}(\mathrm{A},t;\mathrm{B},\tau)\mathrm{F}_1[\mathrm{B},\tau,u_0(\mathrm{B},\tau),u_1(\mathrm{B},\tau),\ldots,u_n(\mathrm{B},\tau)]\,d\mathrm{B}\,d\tau \\ &\quad + \int_0^t \iint_{\mathrm{S}(\mathrm{Q})} \Gamma_{x_\nu}(\mathrm{A},t;\mathrm{Q},\tau)\varphi(\mathrm{Q},\tau)\,d\mathrm{Q}\,d\tau \qquad (\nu=1,2,\ldots,n); \end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned}(51')\quad & -\frac{(2\sqrt{\pi})^n}{2\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(\mathrm{P},t)|}}\psi(\mathrm{P},t) \\ & + \int_0^t \iint_{\mathrm{S}(\mathrm{Q})} \left\{\frac{d}{d\mathrm{T_P}}[\Gamma(\mathrm{P},t;\mathrm{Q},\tau)] + g(\mathrm{P},t)\Gamma(\mathrm{P},t;\mathrm{Q},\tau)\right\}\psi(\mathrm{Q},\tau)\,d\mathrm{Q}\,d\tau \\ & + \int_0^t \iiint_{\Omega(\mathrm{B})} \left\{\frac{d}{d\mathrm{T_P}}[\Gamma(\mathrm{P},t;\mathrm{B},\tau)] + g(\mathrm{P},t)\Gamma(\mathrm{P},t;\mathrm{B},\tau)\right\} \\ & \qquad \times \mathrm{F}_1[\mathrm{B},\tau,u_0(\mathrm{B},\tau),\ldots,u_n(\mathrm{B},\tau]\,d\mathrm{B}\,d\tau \\ & = \mathrm{G}\Big[\mathrm{P},t,v_0(\mathrm{P},t),\bar{u}_{s_\mathrm{P}^{(1)}}(\mathrm{P},t),\ldots,\bar{u}_{s_\mathrm{P}^{(q)}}(\mathrm{P},t)\Big].\end{aligned}$$

Cherchons les conditions pour que ces relations fassent correspondre à tout point $\mathrm{U}(u_0, u_1, \ldots, u_n, \varphi)$ de l'ensemble E un point déterminé $\mathrm{V}(v_0, v_1, \ldots, v_n, \psi)$ du même ensemble.

D'abord faisons l'analyse des relations (51). En s'appuyant sur les limitations

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned} |\Gamma(\mathrm{A},t;\mathrm{B},\tau)| &< \frac{\mathrm{Cte}}{(t-\tau)^\mu}\,\frac{1}{r_{\mathrm{AB}}^{n-2\mu}}, \\ |\Gamma_{x_\nu}(\mathrm{A},t;\mathrm{B},\tau)| &< \frac{\mathrm{Cte}}{(t-\tau)^\mu}\,\frac{1}{r_{\mathrm{AB}}^{n+1-2\mu}} \end{aligned}\right.$$

et sur la décomposition

$$\begin{aligned}(53)\quad \int_0^t \iint_\mathrm{S} \Gamma_{x_\nu}(\mathrm{A},t;\mathrm{Q},\tau)\varphi(\mathrm{Q},\tau)\,d\mathrm{Q}\,d\tau &= \int_0^t \varphi(\mathrm{P},\tau)\left[\iint_\mathrm{S} \Gamma_{x_\nu}(\mathrm{A},t;\mathrm{Q},\tau)\,d\mathrm{Q}\right]d\tau \\ &\quad + \int_0^t \iint_\mathrm{S} \Gamma_{x_\nu}(\mathrm{A},t;\mathrm{Q},\tau)[\varphi(\mathrm{Q},\tau)-\varphi(\mathrm{P},\tau)]\,d\mathrm{Q}\,d\tau,\end{aligned}$$

P étant le point de la surface S le plus rapproché du point intérieur $\mathrm{A} \in \Omega$, nous concluons que les fonctions (51) vérifient les inégalités

$$(54)\qquad \begin{cases} |v_0(A, t)| < c_1 t^{1-\mu} \sup|F| + c_2 t^{1-\mu} \sup|\varphi|, \\ |v_\nu(A, t)| < c'_1 t^{1-\mu} \sup|F| + c'_2 \sup\limits_{0,t} |\varphi| + c'_3 t^{1-\mu} k_\varphi \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

μ étant fixé à l'intérieur de l'intervalle $\left(1 - \frac{1}{2} h_\varphi, 1\right)$, c_1, c_2, c'_1, c'_2, c'_3 sont des constantes positives, indépendantes des fonctions F et φ, et de T. D'après le théorème 1, la fonction $v_0(A, t)$ vérifie une condition de Hölder sous la forme

$$(55)\qquad |v_0(A, t) - v_0(A_1, t_1)| < [\bar{c}_1 \sup|F| + \bar{c}_2 \sup|\varphi|]\left[r^{\theta}_{AA_1} + |t - t_1|^{\frac{1}{2}\theta'}\right];$$

$\bar{c}_1$, $\bar{c}_2$ sont des constantes positives indépendantes des fonctions F et φ.

En outre, grâce à la condition $\varphi(P, 0) = 0$, et en admettant les valeurs limites des fonctions v_0, v_ν comme les *valeurs* de ces fonctions à la surface S, nous concluons que les fonctions $v_0(A, t)$, $v_\nu(A, t)$ sont *continues* dans l'ensemble fermé $[A \in \Omega + S, 0 \leqq t \leqq T]$.

Remarquons encore qu'on peut fixer les constantes c'_1, c'_2, c'_3, pour que les inégalités de la même forme (54) soient vérifiées par les fonctions (45)

$$(56)\qquad \left|\bar{u}_{s^{(\alpha)}_P}(P, t)\right| < c'_1 t^{1-\mu} \sup|F| + c'_2 \sup|\varphi| + c'_3 t^{1-\mu} k_\varphi.$$

Passons maintenant à l'analyse de la relation (51'). Tout d'abord nous voyons, d'après (56), que le membre droit G aura un sens et sera continu, si les constantes positives arbitraires ρ et k_φ vérifient les inégalités

$$(57)\qquad \begin{cases} c_1 T^{1-\mu} \sup|F| + c_2 T^{1-\mu} \rho \leqq R, \\ c'_1 T^{1-\mu} \sup|F| + c'_2 \rho + c'_3 T^{1-\mu} k_\varphi \leqq R. \end{cases}$$

D'après les théorèmes (24), (29) et les inégalités (36), (50), (55), le membre droit de la relation (51') vérifie une inégalité de Hölder de la forme

$$(58)\qquad \begin{aligned} &\Big| G\left[P, t, v_0(P, t), \bar{u}_{s^{(1)}_P}(P, t), \ldots, \bar{u}_{s^{(q)}_R}(P, t)\right] \\ &\qquad - G\left[P_1, t, v_0(P_1, t), \bar{u}_{s^{(1)}_{P_1}}(P_1, t), \ldots, \bar{u}_{s^{(q)}_{P_1}}(P_1, t)\right]\Big| \\ &\leqq k_G\left[r^{h_G}_{PP_1} + (\bar{c}_1 M_F + \bar{c}_2 \rho)^{h'_G} r^{\theta h'_G}_{PP_1} + c_0 M_F r^{\theta}_{PP_1} + q\,(C_1 \rho + C_2 k_\varphi) r^{h_\varphi}_{PP_1}\right] \\ &\leqq k_G\left[a_1 + a_2 (M_F + \rho)^{h'_G} + a_3 M_F + a_4 \rho + a_5 k_\varphi\right] r^{h_\varphi}_{PP_1}, \end{aligned}$$

on désigne par a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 des constantes positives, indépendantes des fonctions F, G et $M_F = \sup|F|$.

La relation (51) définit la fonction $\psi(P, t)$ comme une solution de l'équation de Volterra,

$$(59)\qquad -\frac{(2\sqrt{\pi})^n}{2\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(P, t)|}}\psi(P, t) + \int_0^t \iint_{S(Q)} \left\{\frac{d}{dT_P}[\Gamma(P, t; Q, \tau)] + g(P, t)\Gamma(P, t; Q, \tau)\right\}\psi(Q, \tau)\, dQ\, d\tau = f(P, t),$$

où $f(P, t)$ est une fonction continue déterminée.

D'après la limitation (17), l'équation (59) admet une solution, déterminée par la formule

$$\psi(\mathrm{P}, t) = -\frac{2\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(\mathrm{P}, t)|}}{(2\sqrt{\pi})^n} f(\mathrm{P}, t) - 2(2\sqrt{\pi})^n \int_0^t \iint_{\mathrm{S}(\mathrm{Q})} \mathcal{N}(\mathrm{P}, t;\ \mathrm{Q}(t)\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(\mathrm{P}, \tau)|} f(\mathrm{Q}, \tau)\, d\mathrm{Q}\, d\tau, \tag{60}$$

où $\mathcal{N}$ désigne le noyau résolvant du noyau de l'équation (59).

La fonction ψ vérifie donc l'inégalité

$$|\psi(\mathrm{P}, t)| < (1 + \mathrm{K}_{\mathcal{N}})\mathrm{K}_a \sup|f(\mathrm{P}, t)|, \tag{61}$$

où $\mathrm{K}_{\mathcal{N}}$, K_a désignent les bornes supérieures des fonctions

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{K}_{\mathcal{N}} &= \sup \int_0^t \iint_{\mathrm{S}(\mathrm{Q})} |\mathcal{N}(\mathrm{P}, t;\ \mathrm{Q}, \tau)|\, d\mathrm{Q}\, d\tau, \\ \mathrm{K}_a &= \sup\left[2(2\sqrt{\pi})^{-n}\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(\mathrm{P}, \tau)|}\right]. \end{aligned}\right. \tag{62}$$

Or, nous avons la limitation

$$\left|\frac{d}{d\mathrm{T_P}}[\Gamma(\mathrm{P}, t;\ \mathrm{B}, \tau)] + g(\mathrm{P}, t)\Gamma(\mathrm{P}, t;\ \mathrm{B}, \tau)\right| < \frac{\mathrm{C}}{(t-\tau)^{\mu}} \frac{1}{r_{\mathrm{PB}}^{n+1-2\mu}}.$$

Il en résulte qu'au point $\mathrm{U}(u_0, u_1, \ldots, u_n, \varphi)$ de l'ensemble E correspond la solution unique continue $\psi(\mathrm{P}, t)$ de l'équation (51′) vérifiant l'inégalité

$$|\psi(\mathrm{P}, t)| < (1 + \mathrm{K}_{\mathcal{N}})\mathrm{K}_a\left[\frac{\mathrm{C}\bar{\mathrm{C}}\mathrm{K}_a}{1-\mu}\mathrm{T}^{1-\mu}\mathrm{M}_{\mathrm{F}} + \sup|\mathrm{G}|\right], \tag{63}$$

où

$$\bar{\mathrm{C}} = \sup\left[\iiint_{\Omega(\mathrm{B})} \frac{d\mathrm{B}}{r_{\mathrm{PB}}^{n+1-2\mu}}\right].$$

Nous signalons que, d'après la propriété admise (37) de la fonction G, on a

$$\psi(\mathrm{P}, 0) = \lim_{t \to 0} \psi(\mathrm{P}, t) = 0. \tag{64}$$

Cherchons une condition de Hölder pour la fonction $\psi(\mathrm{P}, t)$. Dans ce but remarquons, en nous appuyant sur la *continuité* de la fonction ψ et sur les théorèmes 1 et 3, que la première, $\mathrm{I}_1(\mathrm{P}, t)$, des intégrales dans le membre gauche de l'équation (51′), vérifie l'inégalité de Hölder

$$|\mathrm{I}_1(\mathrm{P}, t) - \mathrm{I}_1(\mathrm{P}_1, t)| < \mathrm{Cte.}\sup|\psi|\, r_{\mathrm{PP}_1}^{h_\varphi} \tag{65}$$

[en tenant compte des inégalités admises (50)] et que la seconde, $\mathrm{I}_2(\mathrm{P}, t)$, d'après le théorème 6, vérifie l'inégalité de Hölder de la même forme

$$|\mathrm{I}_2(\mathrm{P}, t) - \mathrm{I}_2(\mathrm{P}_1, t)| < \mathrm{Cte.}\sup|\psi|\, r_{\mathrm{PP}_1}^{h_\varphi}. \tag{65′}$$

Mais nous avons vu, que le membre droit vérifie aussi une condition de

Hölder (58) avec l'exposant h_φ, nous en concluons que la solution $\psi(P, t)$ de l'équation (51′) vérifie une condition de Hölder sous la forme

$$(66) \qquad \begin{aligned} |\psi(P, t) - \psi(P_1, t)| < \{ & D_1 \sup|\psi| \\ & + D_2 k_G [a_1 + a_2 (M_F + \rho)^{h'_G} + a_3 M_F + a_4 \rho + a_5 k_\varphi]\} r_{PP_1}^{h_\varphi}. \end{aligned}$$

D_1, D_2 étant des constantes positives, indépendantes des fonctions F et G.

En rapprochant les inégalités obtenues (54), (63), (66), nous pouvons affirmer que l'ensemble transformé E′ de l'ensemble E par les relations (51) et (51′) ferait partie de l'ensemble E [c'est-à-dire vérifierait les conditions (49)], si les constantes du problème vérifient les inégalités suivantes :

$$(67) \qquad \begin{cases} c_1 T^{1-\mu} M_F + c_2 T^{1-\mu} \rho \leqq R, \\ c'_1 T^{1-\mu} M_F + c'_2 \rho + c'_3 T^{1-\mu} k_\varphi \leqq R, \\ (1 + K_{\mathfrak{N}}) K_a \left(\dfrac{C \bar{C} K_a}{1-\mu} T^{1-\mu} M_F + \sup|G| \right) \leqq \rho, \\ D_1 \rho + D_2 k_G [a_1 + a_2 (M_F + \rho)^{h'_G} + a_3 M_F + a_4 \rho + a_5 k_\varphi] \leqq k_\varphi. \end{cases}$$

Avant d'appliquer le théorème de Schauder, nous démontrerons encore les deux théorèmes suivants :

Théorème 8. — *La transformation de l'ensemble* E, *définie par les relations* (51) *et* (51′), *est* continue *dans l'espace fonctionnel* Λ, *les conditions* (57) *étant vérifiées.*

Démonstration. — Soit une suite arbitraire de points $U_m[u_0^{(m)}, u_1^{(m)}, \ldots, u_n^{(m)}, \varphi^{(m)}]$ de l'ensemble E tendant vers le point limite $U[u_0, u_1, \ldots, u_n, \varphi]$ du même ensemble

$$\delta(U_m, U) = \| U_m - U \| \to 0 \qquad \text{si} \quad m \to \infty.$$

Cela veut dire que les suites fonctionnelles $\{u_\nu^{(m)}(A, t)\}$ et $\{\varphi^{(m)}(P, t)\}$ tendent *uniformément* vers les fonctions $u_\nu(A, t)$ resp. $\varphi(P, t)$. Soit la suite

$$V_m[v_0^{(m)}, v_1^{(m)}, \ldots, v_n^{(m)}, \psi^{(m)}]$$

de points de l'espace Λ correspondant aux points U_m par les relations (51) et (51′). Le théorème sera démontré, si nous prouvons que le point limite

$$\lim_{m \to \infty} V_m = V[v_0, v_1, \ldots, v_n, \psi]$$

de la suite transformée correspond par les relations (51) et (51′) au point limite $U[u_0, u_1, \ldots, u_n, \varphi]$ de la suite $\{u_\nu^{(m)}\}$. Dans ce but il suffit de démontrer que toutes les intégrales, dans les expressions (51) et (51′), contenant les fonctions $u_0^{(m)}, u_1^{(m)}, \ldots, u_n^{(m)}, \varphi^{(m)}$, tendent uniformément vers les mêmes intégrales, contenant les fonctions limites $u_0, u_1, \ldots, u_n, \varphi$. Cette propriété est évidente pour les intégrales aux singularités faibles, d'après le théorème classique sur la convergence des intégrales. Il suffit donc d'étudier les intégrales à singularité forte

$$(68)\qquad J^{(m)}(P, t)=\int_0^t \iint_{S(Q)} \Gamma_{s_P^{(\alpha)}}(P, t;\, Q, \tau)\,\varphi^{(m)}(Q, \tau)\, dQ\, d\tau$$

étant les « sommandes » des fonctions (45). Nous démontrerons que les intégrales singulières (68) tendent uniformément vers l'intégrale singulière

$$(69)\qquad J(P, t)=\int_0^t \iint_{S(Q)} \Gamma_{s_P^{(\alpha)}}(P, t;\, Q, \tau)\,\varphi(Q, \tau)\, dQ\, d\tau \qquad \text{si} \quad \varphi^{(m)}\to\varphi.$$

Écrivons donc

$$(70)\qquad \begin{aligned} J^{(m)}(P, t)&=\int_0^t \varphi^{(m)}(P, \tau)\left[\iint_S \Gamma_{s_P^{(\alpha)}}(P, t;\, Q, \tau)\, dQ\right] d\tau \\ &+\int_0^t \iint_S \Gamma_{s_P^{(\alpha)}}(P, t;\, Q, \tau)\,[\varphi^{(m)}(Q, \tau)-\varphi^{(m)}(P, \tau)]\, dQ\, d\tau, \end{aligned}$$

$$(70')\qquad \begin{aligned} J(P, t)&=\int_0^t \varphi(P, \tau)\left[\iint_S \Gamma_{s_P^{(\alpha)}}(P, t;\, Q, \tau)\, dQ\right] d\tau \\ &+\int_0^t \iint_S \Gamma_{s_P^{(\alpha)}}(P, t;\, Q, \tau)\,[\varphi(Q, \tau)-\varphi(P, \tau)]\, dQ\, d\tau. \end{aligned}$$

La différence des premières sommandes des sommes (70) et (70′) a pour expression

$$(71)\qquad J_1^{(m)}(P, t)-J_1(P, t)=\int_0^t [\varphi^{(m)}(P, \tau)-\varphi(P, \tau)]\left[\iint_S \Gamma_{s_P^{(\alpha)}}(P, t;\, Q, \tau)\, dQ\right] d\tau,$$

d'où, remarque faite de la limitation (21), nous concluons immédiatement que cette différence tend uniformément vers zéro, si $m\to\infty$. Pour étudier la différence des secondes sommandes des sommes (70) et (70′), décomposons ces intégrales en sommes des intégrales

$$(72)\qquad \left\{\begin{aligned} J_2^{(m)}(P, t)&=J_2^{(m)\sigma}(P, t)+J_2^{(m)S-\sigma}(P, t), \\ J_2(P, t)&=J_2^{\sigma}(P, t)+J_2^{S-\sigma}(P, t), \end{aligned}\right.$$

étendues à une portion σ de surface S, contenant à son intérieur le point P, et à la partie restante $S-\sigma$. D'après les inégalités (20′) et (49), nous avons la limitation aux faibles singularités

$$(73)\qquad \left|\Gamma_{s_P^{(\alpha)}}(P, t;\, Q, \tau)[\varphi(Q, \tau)-\varphi(P, \tau)]\right|<\frac{\text{Cte}}{(t-\tau)^{\mu}}\,\frac{1}{r_{PQ}^{n+1-2\mu-h_\varphi}}$$

où $1-\frac{h_\varphi}{2}<\mu<1$, donc les secondes intégrales dans les formules (70) et (70′) sont absolument convergentes et nous pouvons à tout nombre positif ε faire correspondre une portion σ de la surface S de diamètre assez petit pour qu'on ait

$$(74)\qquad |J_2^{(m)\sigma}|<\frac{\varepsilon}{3}; \qquad |J_2^{\sigma}|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

La portion σ étant fixée et le point P étant extérieur à la surface $S-\sigma$, les sommandes (72) étendues à la surface $S-\sigma$, sont des intégrales régulières, par conséquent nous pouvons ensuite faire correspondre au nombre ε un indice m_ε, tel qu'on ait

(75) $$|J_2^{(m)S-\sigma}(P, t) - J_2^{S-\sigma}(P, t)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{si} \quad m > m_\varepsilon.$$

En somme, nous concluons avec la propriété limite

(76) $$\lim_{m \to \infty} J^{(m)}(P, t) = J(P, t).$$

D'une façon analogue, on peut étudier la seconde intégrale dans l'expression [formule (51)] pour $v_\nu(A, t)$. Il en résulte la thèse du théorème 8.

THÉORÈME 9. — *L'ensemble transformé* E' *de l'ensemble* E *est* compact.

Démonstration. — D'après les théorèmes 1, 2, 3, 4, 5, 6, toutes les intégrales, qui figurent dans les relations (51) et (51') [excepté la dernière dans (51)], vérifient des conditions de Hölder par rapport aux variables spatiales et par rapport à la variable t. Quant à la dernière intégrale dans les relations (51), on sait que ses valeurs limites à la surface S vérifient une condition de Hölder et que la tendance vers les valeurs limites est uniforme. Il est facile d'en déduire que l'estimation de la continuité de la dernière intégrale dans (51) ne dépend que des constantes k_φ, h_φ, caractérisant les fonctions φ. Nous en concluons que les fonctions $v_0, v_1, \ldots, v_n, \psi$ concernant l'ensemble transformé E' forment une famille de fonctions *également continues* et *également bornées*. Il en résulte, d'après un théorème connu d'Arzelà, que l'ensemble de points E' dans l'espace Λ est *compact*. C. Q. F. D.

En s'appuyant sur les propriétés démontrées de l'ensemble E', nous en concluons, d'après le théorème de Schauder, l'existence d'un point $U^\star(u_0^\star, u_1^\star, \ldots, u_n^\star, \varphi^\star)$ de l'ensemble E invariant relativement à la transformation (51), (51'). Ce système $[u_0^\star(A, t), u_1^\star(A, t), \ldots, u_n^\star(A, t), \varphi^\star(P, t)]$ de fonctions présente donc une solution du système d'équations (43) et (44'). Or, d'après les propriétés du potentiel de simple couche et de charge spatiale, nous avons

$$u_\nu^\star(A, t) = \frac{\partial u_0^\star(A, t)}{\partial x_\nu} \qquad (A \in \Omega;\ 0 < t < T),$$

donc les fonctions $u_0^\star(A, t)$, $\varphi^\star(P, t)$ forment une solution du système d'équations intégrodifférentielles (39) et (41). Nous allons montrer que la fonction $u_0^\star(A, t)$ est une solution du problème aux limites proposé. En effet, d'après le théorème 6, les dérivées

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\nu}[u_0^\star(B, \tau)]$$

vérifient une condition de Hölder par rapport à la variable B, dans tout domaine fermé $\Omega^\star \subset \Omega$, donc la fonction

$$F\left[B, \tau, u_0^\star(B, \tau) \frac{\partial u_0^\star}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial u_0^\star}{\partial \xi_n}\right]$$

vérifie une condition de Hölder par rapport à la variable B. Il en résulte, en vertu du théorème 7, que la fonction $u_0^\star(A, t)$ admet les secondes dérivées vérifiant l'équation donnée (1) en tout point intérieur A du domaine Ω, pour $0 < t < T$. Cette fonction vérifie la condition limite (33) en tout point P de la surface S, d'après l'équation (42). En outre, elle vérifie évidemment la condition initiale (34), donc la fonction $u_0^\star(A, t)$ est une solution du problème proposé. Nous pouvons par conséquent énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 10. — *Si les coefficients de l'équation différentielle* (1), *les fonctions* F, G, *g et la surface* S, *limitant le domaine* Ω, *vérifient les conditions* I, II, III, IV, V, (36), (37), (38), *si en outre les q champs de directions* $\{s_P^{(\alpha)}\}$ *sur la surface* S *vérifient les conditions* (32) *et si enfin les constantes du problème vérifient les conditions* (67), *alors il existe au moins une fonction* $u(A, t)$ *dans la région* $[A \in \Omega;\ 0 \leqq t \leqq T]$, *vérifiant en tout point intérieur de cette région l'équation* (1) *et les conditions : limite* (33) *et initiale* (34).

A la fin de ce travail nous allons discuter encore les conditions (67) d'existence de la solution. Le choix des constantes positives ρ et k_φ étant arbitraires, les inégalités (67) seront satisfaites, si les bornes supérieures M_F, $\sup|G|$ et le coefficient de Hölder k_G sont suffisamment petites. Si la borne supérieure M_F est un nombre positif, donné *a priori*, alors les inégalités (67) seront satisfaites, si la longueur T de l'intervalle de la variable t et le coefficient k_G sont suffisamment petits, puisque $\sup|G| \to 0$, si $T \to 0$. Il est bien naturel de profiter de cette circonstance, que les constantes ρ, k_φ sont arbitraires et de choisir ces valeurs, pour que les longueurs des intervalles de variation permise soient les plus grandes possible.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] H. POINCARÉ, *Mécanique céleste*, vol. III, Paris, 1910.

[2] B. HVÉDÉLIDZÉ, *Sur le problème aux limites de Poincaré* (en russe) (*C. R. Acad. S. S. S. R.*, 1941, p. 195-198).

[3] I. N. VÉCOUA, *Problèmes aux limites dans la théorie des équations elliptiques* (en russe) (*C. R. Acad. Sc. S. S. S. R.*, 1940).

[4] W. POGORZELSKI), *Problème aux limites de Poincaré généralisé* (*Annales Polonici Mathematici*, vol. 2, 1955).

[5] W. POGORZELSKI, *Étude de la solution fondamentale de l'équation parabolique* (*Ricerche di Matematica*, vol. 5, Napoli, 1956).

[6] W. POGORZELSKI, *Propriétés des intégrales de l'équation parabolique* (*Annales Polonici Mathematici*, vol. 5, 1957).

[7] W. POGORZELSKI, *Propriétés des dérivées tangentielles d'une intégrale de l'équation parabolique* (*Ricerche di Matematica*, vol. 7, Napoli, 1957).

[8] J. SCHAUDER, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen* (*Studia Mathematica*, vol. 2, 1930).