

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MAURICE FRÉCHET

Définitions de la somme et du produit par scalaire en termes de distance

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 75, n° 3 (1958), p. 223-255

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1958_3_75_3_223_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉFINITIONS DE LA SOMME

ET DU

PRODUIT PAR SCALAIRE EN TERMES DE DISTANCE

PAR M. MAURICE FRÉCHET

(Paris).

RÉSUMÉ.

L'auteur montre que pour déterminer un espace de Banach et, plus généralement, un espace vectoriel distancié, il n'est pas nécessaire de poser *a priori* les définitions de θ , $\|x\|$, $x + y$, $\lambda.x$. Au moins quand il s'agit d'un espace vectoriel distancié « *tendu* » (défini plus loin, p. 227), on peut formuler ces définitions uniquement en termes de distances. D'ailleurs, ces définitions gardent un sens pour un espace distancié quelconque, mais elles peuvent conduire à 0, 1 ou plusieurs déterminations de $x + y$ et de $\lambda.x$. Pourtant, elles donnent une détermination unique de $x + y$ et aussi de $\lambda.x$ pour des catégories d'espaces distanciés très générales, comprenant des espaces vectoriels distanciés non tendus et même d'autres espaces distanciés pour lesquels aucune structure vectorielle n'est donnée d'avance. On pourra, alors, en appliquant nos définitions à ces espaces, les considérer comme de « quasi-espaces vectoriels distanciés ».

Ces extensions seront données par l'intermédiaire des « centres de gravité » et, s'il est nécessaire, des « moyennes T » de Shafik Doss.

Des exemples suivront.

Enfin un Complément montrera à ceux qui s'intéressent au Calcul des probabilités, l'origine de ce Mémoire dans cette science et plus particulièrement dans notre théorie des « éléments aléatoires, de nature quelconque ».

PREMIÈRE PARTIE.

MOYENNES EXTENSIVES ET CENTRES DE GRAVITÉ.

INTRODUCTION. — Le présent Mémoire trouve son origine dans notre étude des éléments aléatoires de nature quelconque. Cependant, il peut être *exposé indépendamment du Calcul des probabilités* et c'est ce que nous ferons par la suite. Nous renverrons à un Complément, qu'on pourra négliger (p. 255), l'explica-

tion du lien de ce Mémoire avec le Calcul des probabilités et de l'origine des définitions que nous allons poser ici *a priori*.

MOYENNES ET MILIEUX. — Nous appellerons système Z , un système composé de deux éléments (ou points) x, y d'un espace distancié \mathcal{O} ⁽¹⁾ auxquels sont affectés deux coefficients numériques ou « poids », p et q ($p \geq 0, q \geq 0, p + q = 1$).

Nous appellerons système U tout système Z particulier pour lequel $p = q$ ($= \frac{1}{2}$).

Nous appellerons « moyenne extensive » de Z tout élément γ de \mathcal{O} pour lequel la quantité numérique

$$(1) \quad \sigma^2(a) = p(x, a)^2 + q(y, a)^2$$

atteint sa borne inférieure, quand $a \equiv \gamma$.

Quand $q = 0$, on a $\sigma^2(a) = (x, a)^2$ et il devient clair qu'alors, il y a une moyenne extensive et une seule de Z , à savoir $\gamma \equiv x$. De même pour $p = 0$, on a $\gamma \equiv y$.

Quand p et q sont $\neq 0$, on voit que plus $\sigma^2(a)$ est petit, plus a sera voisin à la fois de x et de y . Une moyenne extensive de Z est donc plus représentative du système Z qu'un point z pris au hasard. Nous allons chercher dans quelles conditions on peut obtenir une moyenne la plus représentative possible. Un premier pas dans cette voie consiste à partir de l'égalité

$$(2) \quad \sigma^2(a) = pq[(x, a) + (y, a)]^2 + [p(x, a) - q(y, a)]^2$$

et de l'inégalité qui en résulte

$$(3) \quad \sigma^2(a) \geq pq(x, y)^2.$$

Ainsi la borne inférieure de $\sigma^2(a)$ est au moins égale à la quantité $pq(x, y)^2$ (qui est indépendante de a). Il est clair qu'on aura une moyenne, γ , de Z d'autant plus représentative que $\sigma^2(\gamma)$ se rapprochera de $pq(x, y)^2$.

La plus représentative sera celle pour laquelle $\sigma^2(\gamma) = pq(x, y)^2$. D'ailleurs

$$(4) \quad \sigma^2(a) - pq(x, y)^2 = pq\{[(x, a) + (y, a)]^2 - (x, y)^2\} + \{p(x, a) - q(y, a)\}^2.$$

Les deux crochets sont ≥ 0 . Donc, pour qu'il existe un élément δ de \mathcal{O} tel que le premier membre soit nul, il faut et il suffit qu'il existe un élément δ tel que les deux accolades s'annulent pour $a \equiv \delta$.

(1) Nous rappellerons (pour pouvoir nous référer aux détails par la suite) qu'un espace distancié \mathcal{O} (souvent appelé espace métrique) est un ensemble E d'éléments quelconques sur lequel on a défini pour tout couple a, b d'éléments de \mathcal{O} , une « distance », c'est-à-dire un nombre réel (a, b) tel que :

1° $(a, b) = (b, a) \geq 0$;

2° $(a, b) = 0$ équivaut à dire que a et b ne sont pas distincts;

3° on a l'« inégalité triangulaire »

$$(a, b) \leq (a, c) + (c, b).$$

Si δ existe, ce sera une moyenne extensive d'un type particulier. Pour cette raison, nous lui donnerons une appellation particulière. A cet effet, observons que δ devra vérifier le système

$$(5) \quad (x, \gamma) = (x, \delta) + (y, \delta); \quad p(x, \delta) = q(y, \delta).$$

Et réciproquement, si un élément δ vérifie ce système, on aura

$$\sigma^2(\delta) = pq(x, y)^2.$$

Dans un langage généralisant celui de la géométrie euclidienne, on pourra dire que la première relation (5) exprime que δ est situé sur le « segment » xy , « entre » x et y . D'ailleurs, (5) est équivalent à

$$(6) \quad (x, \delta) = q(x, y); \quad (y, \delta) = p(x, y).$$

On peut, de même, exprimer d'après (6), une autre propriété de δ , en disant que δ « partage le segment xy en segments proportionnels à q et p ».

L'ensemble de ces propriétés conduit naturellement à l'exprimer en disant que δ est un « centre de gravité » du système Z .

Dans le cas où $p = q$, nous dirons que δ est un « milieu du segment xy »

On observera que si Z a plusieurs moyennes extensives, dont, au moins, une centre de gravité, toutes ces moyennes extensives sont des centres de gravité de Z . Car, s'il y a au moins un centre de gravité de Z , c'est que la borne inférieure de $\sigma^2(a)$ est égale à $pq(x, y)^2$ et alors toute moyenne extensive γ de Z devant faire atteindre à $\sigma^2(a)$ cette borne inférieure, sera aussi un centre de gravité de Z .

Mais un système Z peut avoir une (ou plus d'une) moyenne extensive, sans avoir de « centre de gravité ».

Tel est le cas où \mathcal{O} se réduirait à une droite $\xi'\xi$ dont on aurait supprimé l'intervalle $-1 < \xi < +1$. En prenant $p = q = \frac{1}{2}$, et $x = -1$, $y = +1$, on aura

$$\sigma^2(a) = \frac{1}{2}(1+a)^2 + \frac{1}{2}(1-a)^2 = 1 + a^2, \quad \text{avec } |a| \geq 1.$$

Le minimum de $\sigma(a)$ est atteint pour $a = \pm 1$; il y a donc deux moyennes extensives de Z . Par contre, il n'y a pas de solution en δ , pour $|\delta| \geq 1$, des relations (6) qui sont ici

$$|1 + \delta| = |1 - \delta| = 1.$$

Il n'y a donc pas de « centre de gravité » de Z .

Un système Z peut avoir zéro centre de gravité comme dans cet exemple ou un tel centre, comme sur la droite complète, ou plus d'un tel centre comme dans l'exemple de la page 240.

CENTRES DE GRAVITÉ GÉNÉRALISÉS. — Revenons à un espace distancié \mathcal{O} quel-

conque. Un « centre de gravité » δ de Z a été défini comme une solution en γ du système (6), qu'on peut écrire sous la forme

$$(x, \delta) = |1 - p|(x, y), \quad (y, \delta) = |p|(x, y).$$

Nous généraliserons, *en vue de la suite*, la notion de centre de gravité en remplaçant, dans ces relations, p , qui était supposé compris entre 0 et 1, par un nombre réel quelconque λ .

Nous appellerons d'abord, Z' un système composé de deux points x, y de \mathcal{O} , affectés respectivement des « poids » λ et $1 - \lambda$. Et nous dirons que g est un « centre de gravité généralisé » du système Z' , si c'est un élément de l'espace \mathcal{O} tel que

$$(7) \quad (x, g) = |1 - \lambda|(x, y), \quad (y, g) = |\lambda|(x, y).$$

On peut d'ailleurs exprimer cette définition en la ramenant à la définition primitive du centre de gravité δ .

Quand $0 \leq \lambda \leq 1$, le centre de gravité généralisé devient un centre de gravité tout court.

Quand $\lambda > 1$, on peut écrire (7) ainsi

$$(x, g) = (\lambda - 1)(x, y), \quad (y, g) = \lambda(x, y)$$

d'où

$$(x, g) = \frac{\lambda - 1}{\lambda}(y, g), \quad (x, y) = \frac{1}{\lambda}(y, g),$$

c'est-à-dire que x est sur le « segment » yg « entre » y et g et que x divise ce segment dans le rapport de $\frac{1}{\lambda}$ à $\frac{\lambda - 1}{\lambda}$ ou de 1 à $\lambda - 1$; x est le centre de gravité tout court du système composé de g et y affectés des poids $\frac{1}{\lambda}$ et $1 - \frac{1}{\lambda}$.

Quand $\lambda < 0$, (7) devient, en posant $\lambda' = -\lambda$,

$$(x, g) = (1 + \lambda')(x, y), \quad (y, g) = \lambda'(x, y)$$

ou

$$(x, y) = \frac{1}{1 + \lambda'}(x, g), \quad (y, g) = \frac{\lambda'}{1 + \lambda'}(x, g)$$

et l'on voit que y est sur le « segment » xg « entre » x et g et divise ce segment dans le rapport de $\frac{-\lambda}{1 - \lambda}$ à $\frac{1}{1 - \lambda}$ ou encore de $-\lambda$ à 1. Autrement dit, y est un centre de gravité tout court du système des points x et g affectés des poids $\frac{-\lambda}{1 - \lambda}$ et $\frac{1}{1 - \lambda}$ [$= 1 - \left(\frac{-\lambda}{1 - \lambda}\right)$].

Remarque. — Si \mathcal{O} est un espace vectoriel distancié⁽²⁾, tout système Z' y a au

(2) A. Michal appelle un tel espace, espace *linéaire normé*.

moins un centre de gravité généralisé qui est

$$g_1 = \lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y.$$

En effet

$$(x, g_1) = \|(1 - \lambda)(y - x)\| = |1 - \lambda|(x, y)$$

et de même

$$(y, g_1) = |\lambda|(x, y).$$

Dès lors, les relations (7) sont bien vérifiées pour $g = g_1$.

EXEMPLES D'UN SEUL CENTRE DE GRAVITÉ GÉNÉRALISÉ. — Il est bien connu qu'un système Z' a toujours un centre de gravité généralisé et *un seul* dans les espaces euclidiens à un nombre fini de dimensions et même dans l'espace de Hilbert. Sans avoir à en rappeler la démonstration, il nous suffira d'établir cette propriété pour les « espaces vectoriels distanciés tendus », dont les espaces en question sont des cas particuliers.

ESPACES TENDUS. — Il y a déjà longtemps, nous avons appelé espace vectoriel distancié *tendu*, tout espace vectoriel distancié ⁽³⁾ (dont la définition est rappelée page 229) qui jouit de la propriété suivante ⁽⁴⁾ : pour tout système de trois de ses points x, y, z , la relation

$$\|x - y\| = \|x - z\| + \|z - y\|$$

équivalait à dire que z est sur le vecteur x, y , entre x et y , c'est-à-dire qu'il existe deux nombres α, β ($\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$) tels que

$$z = \alpha x + \beta y.$$

Ceci étant, si l'espace distancié \mathcal{O} est un espace vectoriel distancié tendu :

1° *Tout système Z a un centre de gravité et un seul.*

En effet, pour que δ soit un tel centre, il faut et il suffit qu'on ait, à la fois

$$(8) \quad \|x - \delta\| + \|y - \delta\| = \|x - y\|,$$

$$(9) \quad p \|x - \delta\| = q \|y - \delta\|.$$

Puisque \mathcal{O} est tendu, l'égalité (8) implique que δ est de la forme $\alpha x + \beta y$ indiquée ci-dessus. Alors (9) devient

$$(10) \quad p\beta \|y - x\| = q\alpha \|y - x\|.$$

Pour $x = y$, nous voyons d'après (8) qu'il y a un centre de gravité et un seul : $\delta = x = y$.

⁽³⁾ Nous aurons à nous référer plusieurs fois par la suite aux numéros des axiomes à la base de la définition des espaces vectoriels distanciés. Ceux-ci sont rappelés à la fin de cet article, p. 229.

⁽⁴⁾ Voir p. 142 de notre Ouvrage : *Les espaces abstraits*, Gauthier-Villars, Paris.

Pour $x \neq y$, on doit avoir

$$p\beta = q\alpha \quad \text{ou} \quad p(1 - \alpha) = q\alpha, \quad \text{d'où} \quad \alpha = p,$$

et de même $\beta = q$. Il y a bien un centre de gravité de Z et un seul

$$\delta = px + qy.$$

2° Mais de même, *il y a un centre de gravité généralisé de Z' et un seul.*

Le cas où $0 \leq \lambda \leq 1$ vient d'être examiné, en prenant $p = \lambda$, d'où $\delta = \lambda.x + (1 - \lambda)y$.

Pour $\lambda > 1$, on a vu que x doit être le centre de gravité tout court de y et g , de sorte que si g existe, on doit pouvoir écrire

$$(11) \quad x = \alpha y + \beta g;$$

alors en posant $p = \frac{1}{\lambda}$, on doit avoir, d'après (11)

$$\beta \|g - y\| = p \|g - y\|,$$

d'où, pour $g \neq y$,

$$\beta = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \alpha = 1 - \frac{1}{\lambda}$$

et par suite

$$x = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)y + \frac{1}{\lambda}g,$$

d'où, encore

$$(11 \text{ bis}) \quad g = \lambda.x + (1 - \lambda)y.$$

Pour $g = y$, on aurait d'après (11), $x = y = g$.

Si g existe, il est donc unique. D'ailleurs, en portant cette expression (11) de g dans (7), on vérifie que ces équations sont satisfaites. Ainsi pour $\lambda > 1$, il y a un centre de gravité généralisé de Z' et un seul.

On verrait, de même que ce résultat subsiste pour $\lambda < 0$.

Inversement, si dans un espace vectoriel distancié, tout système Z' a un centre de gravité et un seul, *un tel espace est un espace tendu*. En effet, supposons qu'on ait

$$(12) \quad (x, z) + (z, y) = (x, y).$$

Alors, on peut trouver λ tel que

$$(13) \quad \lambda(x, z) = (1 - \lambda)(z, y);$$

il suffit de prendre

$$(14) \quad \lambda = \frac{(z, y)}{(x, z) + (z, y)} = \frac{(z, y)}{(x, y)}.$$

[Si (x, y) était nul, on aurait d'après (12), $(x, z) = (y, z) = 0$ et toute valeur de λ vérifierait (13)].

Et, d'après (12) et (14), on aurait $0 \leq \lambda \leq 1$. Mais d'après (12) et (13) z serait le centre de gravité, g de Z' et l'on aurait d'après la remarque de la page 227 :

$$g = \lambda.x + (1 - \lambda)y :$$

l'espace considéré est bien tendu.

En résumé, *pour un espace vectoriel distancié, il est équivalent d'ajouter qu'il est tendu ou que dans cet espace, tout système Z' a un centre de gravité généralisé et un seul.*

CAS DES ESPACES DISTANCIÉS. — La seconde forme de la condition précédente a un sens (et nous sera utile) pour tout espace distancié; nous la répéterons donc à part pour ce cas général.

CONDITION H. — *Un espace distancié quelconque, \mathcal{O} , réalise cette condition H, si, dans cet espace, tout système Z' admet un centre de gravité généralisé (défini p. 226) et un seul.*

Nous dirons qu'un tel espace est un espace \mathcal{O}' . Nous donnerons plus loin, dans la troisième partie, plusieurs exemples et, entre autres, deux exemples d'espaces distanciés formés des mêmes éléments mais où les définitions de la distance sont différentes, l'une vérifiant la condition H, l'autre, non.

LES ESPACES VECTORIELS DISTANCIÉS. — Nous allons avoir à nous référer aux numéros des axiomes qui servent à définir les espaces vectoriels distanciés (appelés aussi espaces linéaires normés). Nous aurions pu renvoyer à ces numéros tels qu'ils figurent dans notre Ouvrage, *Les espaces abstraits*, aux pages 125, 126 et 140. Il sera plus commode pour le lecteur de les retrouver ici. Nous en avons supprimé les n^{os} 4, 7 et 8, qui d'après Flamant, sont des conséquences des autres.

Soient x, y, z trois éléments quelconques de l'espace considéré, a, b deux nombres réels quelconques :

- 1° $x + y$ est un élément bien déterminé de cet espace;
- 2° $x + y \equiv y + x$;
- 3° $(x + y) + z \equiv x + (y + z)$;
- 5° Il existe un élément θ de cet espace tel que $x + \theta \equiv x$;
- 6° $a.x$ existe et est un élément de l'espace considéré;
- 9° $a.(x + y) \equiv a.x + a.y$;
- 10° $(a + b).x = a.x + b.x$;
- 11° $1.x = x$;
- 12° $(ab).x = a.(b.x)$;
- 13° $\|x\| \geq 0$;
- 14° $\|x\| = 0$ équivaut à $x \equiv \theta$;

$$15^{\circ} \|a \cdot x\| = |a| \cdot \|x\|;$$

$$16^{\circ} \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

DEUXIÈME PARTIE.

DÉFINITIONS, POUR UN ESPACE DISTANCIÉ \mathcal{O}' , D'UN ÉLÉMENT NEUTRE, D'UNE NORME, D'UNE SOMME ET D'UN PRODUIT PAR SCALAIRE.

ÉLÉMENT NEUTRE. — Dans un espace distancié \mathcal{O}' défini p. 229, on peut prendre pour élément neutre n'importe quel élément de \mathcal{O}' , sans avoir à modifier les définitions annoncées qui vont suivre.

Cependant, dans l'application de ces définitions à un espace distancié déterminé, il peut arriver qu'on simplifie cette application en choisissant convenablement l'élément neutre, (comme on le voit dans l'exemple de la page 247).

Nous représenterons par θ l'élément neutre choisi.

NORME. — On définit nécessairement comme norme d'un élément a de \mathcal{O}' , la distance de a à l'élément neutre θ :

$$\|a\| = (\theta, a).$$

SOMME. — Nous définirons d'abord le « milieu », z de deux éléments x, y , de \mathcal{O}' , comme leur centre de gravité quand on les affecte de poids égaux $p = q = \frac{1}{2}$. On a alors

$$(15) \quad (x, z) = (y, z) = \frac{1}{2} (x, y).$$

Ceci étant, la somme $x + y$ de x et de y , sera un élément s de \mathcal{O} tel que la demi-somme de θ et s soit précisément z . On aura alors

$$(16) \quad (\theta, z) = (s, z) = \frac{1}{2} (\theta, s).$$

On peut aussi définir s comme un centre de gravité généralisé du système θ, z affecté des poids respectifs 1 et 2, puisque (16) peut s'écrire sous une forme analogue à (7).

$$(z, s) = |1 - \lambda| (\theta, z),$$

$$(\theta, s) = |\lambda| (\theta, z), \quad \text{avec ici } \lambda = 2.$$

Dès lors, en vertu de la condition H de la page 229, quels que soient x, y de \mathcal{O}' , z puis s , qui sont des centres de gravité généralisés, existent et sont chacun uniques une fois donnés y et x ; *chaque couple* x, y de points de \mathcal{O}' a ainsi « une somme » et une seule.

PRODUIT PAR SCALAIRE. — Nous définirons le « produit par scalaire », $y = \lambda \cdot x$, de chaque élément x de \mathcal{O}' par un nombre réel λ , comme le centre de gravité

généralisé du système composé des points θ, x affectés des coefficients $1 - \lambda, \lambda$. Autrement dit, d'après (7) et par définition, ce produit scalaire y devra être un élément de \mathcal{O}' vérifiant les relations

$$(17) \quad \begin{cases} (x, y) = |1 - \lambda|(\theta, x); \\ (\theta, y) = |\lambda|(\theta, x). \end{cases}$$

En vertu de la condition H, nous savons qu'étant donnés θ, x et λ , il existe un élément y et un seul vérifiant ces relations. Ce sera $y = \lambda \cdot x$.

Remarque. — Il est clair, que, comme il le fallait, ces définitions sont équivalentes aux définitions classiques dans les cas les plus simples comme ceux où \mathcal{O}' est un espace euclidien à un nombre fini de dimensions.

On le voit aussi, indirectement, en considérant ces espaces comme des cas particuliers des espaces vectoriels distanciés tendus, pour lesquels la démonstration suit.

Si l'on a soin, en effet, d'appliquer nos définitions des pages 230 à 231, en prenant pour élément neutre, l'élément neutre choisi *a priori* pour un espace vectoriel distancié tendu déterminé G, on a vu que tout produit par scalaire, w , de l'élément x par un nombre réel λ , est, par notre définition de la page 231, un centre de gravité du système Z' constitué de θ et x , affectés des coefficients $1 - \lambda$ et λ . Or, d'autre part, on a vu, (page 228) que, pour un espace tel que G, tout système Z' a un centre de gravité généralisé et un seul, soit l'élément

$$(18) \quad \lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y.$$

On aura donc, dans le cas actuel,

$$w = \lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot \theta, \quad \text{d'où} \quad w = \lambda \cdot x.$$

Quant à la somme s de x et y , on sait que, par notre définition de la page 230, c'est le centre de gravité généralisé du système θ, m affecté des coefficients 1 et 2, m étant le centre de gravité du système x, y affecté des coefficients $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$. D'après (18), on aura d'abord

$$m = \frac{1}{2}(x + y),$$

puis

$$s = |2|m + |1 - 2|\theta = 2m, \quad \text{d'où} \quad s = x + y.$$

Enfin, on a défini la norme, n (p. 230), de x , comme

$$n = (x; \theta) = ||x - \theta|| = ||x||.$$

Ainsi se trouve établi *dans le cas des espaces vectoriels distanciés tendus*, que si l'on ignore volontairement, d'abord, la structure d'un tel espace G pour n'en

retenir que la définition de la distance

$$(x, y) = \|x - y\|,$$

nos définitions des pages 230 à 231 permettent si l'on garde le même élément neutre, de retrouver la structure initiale caractérisée par $\|x\|$, $x + y$ et $\lambda \cdot x$.

Remarque. — En appliquant les quatre définitions précédentes à un espace distancié simple, il arrivera fréquemment qu'on aboutisse ainsi par un long détour à une ou plusieurs définitions connues d'avance ou auxquelles l'intuition aurait pu nous conduire directement. Mais, il est évidemment intéressant et utile de savoir qu'on a pu retrouver des définitions relatives à des espaces particuliers connus en partant de définitions beaucoup plus générales.

En outre, au lieu de chercher à tâtons à imposer à un espace distancié \mathcal{O}' particulier une structure d'espace vectoriel distancié, nos définitions permettent d'y arriver directement.

En revenant à des espaces distanciés quelconques, nous avons vu, p. 230, que, quand ils vérifient la condition H, on peut déduire de la seule notion de distance les définitions d'un élément neutre θ , d'une norme $\|x\|$, d'une somme $x + y$ et d'un produit scalaire $\lambda \cdot x$.

Nous vérifierons ci-après que ces définitions satisfont à plusieurs des propriétés qui sont attribuées à ces notions, dans la définition d'un espace vectoriel distancié. De sorte que les espaces \mathcal{O}' apparaîtront comme de « quasi-espaces vectoriels distanciés ».

PROPRIÉTÉS. — Abandonnons maintenant les espaces vectoriels distanciés tendus pour considérer les espaces distanciés \mathcal{O}' vérifiant H et comparons les propriétés de la nouvelle structure qui vient d'être définie page 230 pour \mathcal{O}' avec celle d'un espace vectoriel distancié.

Recourons pour cela à la liste de ces dernières propriétés, telle qu'elle figure à la page 229.

Les conditions 2°, 10°, 13°, 14° résultent des définitions mêmes de la somme, du produit par scalaire et de la norme.

Les conditions 1° et 6° résultent de ces définitions et de la condition H.

La condition 5° résulte de l'hypothèse H. Car si l'on appelle m le milieu de θ et s la somme $x + \theta$, on aura

$$(\theta, m) = (x, m) = \frac{(\theta, x)}{2},$$

$$(\theta, m) = (s, m) = \frac{(\theta, s)}{2}.$$

Or, d'après (17), ceci entraîne

$$x = 2m, \quad s = 2m$$

et d'après H,

$$s = x \quad \text{ou} \quad 5^\circ \quad x + \theta = x.$$

De même, en posant $y = \lambda \cdot x$, on a d'après (17)

$$(\theta, y) = |\lambda|(\theta, x) \quad \text{ou} \quad ||\lambda \cdot x|| = |\lambda| \cdot ||x||,$$

c'est-à-dire 15°.

Nous laisserons ouverte la question de savoir si, parmi les conditions restantes : 3°, 9°, 10°, 12°, 16°, il en est encore qui sont satisfaites (et lesquelles), pour un espace \mathcal{O}' quelconque ?

Extension aux moyennes (T).

UNE OBJECTION. — Les définitions précédentes ont été données dans le cas où l'espace considéré est un espace \mathcal{O}' , c'est-à-dire un espace distancié où tout système Z a un centre de gravité et un seul.

Mais les exemples des pages 238 et 248 montrent qu'il existe des espaces distanciés très simples où il y a plus d'un centre de gravité. Dans un tel cas, il peut y avoir plusieurs déterminations de $x + y$ et de $\lambda \cdot x$, ce qui est gênant.

UN REMÈDE. — Il peut donc y avoir intérêt à essayer de choisir parmi les centres de gravité de Z , l'un d'eux qui soit le plus représentatif (en un certain sens à définir) du système Z .

Si l'on y réussit, on remplacera dans la définition de la structure cherchée, en particulier dans les définitions données plus haut de $x + y$ et de $\lambda \cdot x$, le centre de gravité par cet élément plus représentatif.

Le choix devra, en particulier, être tel qu'il coïncide avec la moyenne classique dans le cas des espaces vectoriels distanciés où cette moyenne est l'élément $px + qy$ (même dans le cas où l'espace n'est pas tendu) et où il peut y avoir plusieurs centres de gravité (exemples des pages 240 et 251).

PREMIER CHOIX D'ÉLÉMENT PLUS REPRÉSENTATIF. — Nous avons d'abord pensé à fixer notre choix sur un centre de gravité de Z , soit γ' , jouissant, de la propriété suivante : appelons Σ_γ un sphéroïde (de l'espace distancié considéré), ayant pour centre, un centre de gravité, soit γ de Z et comprenant tous les centres de gravité γ_1 de Z . Si, quand on fait varier γ et le rayon de Σ_γ , la borne inférieure de ce rayon est atteinte pour $\gamma \equiv \gamma'$, γ' sera le centre choisi, qu'on appellera moyenne (C),

Un tel choix donne de bons résultats quand il s'agit du cas où $p = q$ ($= \frac{1}{2}$) et, par suite, permettrait de définir la somme $x + y$ de façon satisfaisante. Mais il n'en est plus de même pour $p \neq q$ comme le lecteur pourra s'en assurer sur les exemples des pages 240 et 251 (Note ⁴).

DEUXIÈME CHOIX D'ÉLÉMENT PLUS REPRÉSENTATIF. — Nous avons ensuite pensé à la « moyenne (T) » définie par Shafik Doss (⁵). Nous avons constaté, en effet, que,

(⁵) Voir la Note, p. 255.

comme on va le voir, *la moyenne (T) du système Z est toujours en même temps, un « centre de gravité » de Z* (mais non réciproquement) :

Par définition, un élément δ de l'espace distancié \mathcal{O} considéré, sera une moyenne (T) de Z, si l'on a

$$(18) \quad (\delta, a) \leq p(x, a) + q(y, a)$$

quel que soit l'élément a de \mathcal{O} . On devra donc avoir, en particulier, en prenant pour a , soit x , soit y :

$$(19) \quad (\delta, x) \leq q(x, y), \quad (\delta, y) \leq p(x, y).$$

D'où

$$(x, y) \leq (\delta, x) + (\delta, y) \leq (x, y)$$

et par suite

$$(x, y) = (\delta, x) + (\delta, y).$$

Donc

$$[q(x, y) - (\delta, x)] + [p(x, y) - (\delta, y)] = 0$$

et comme les deux crochets sont ≥ 0 , d'après (19), chacun d'eux est nul, c'est-à-dire que

$$(20) \quad (\delta, x) = q(x, y), \quad (\delta, y) = p(x, y).$$

Autrement dit, d'après la définition par (6), δ est bien un centre de gravité de Z.

Nous verrons sur les exemples des pages 243, 251 et 253 qu'on peut citer un espace distancié et un système Z, pour lesquels il y a une infinité de centres de gravité et seulement un moyenne (T). Ainsi, un centre de gravité n'est pas nécessairement une moyenne (T) et, d'autre part, il peut arriver que l'objection de la page 235 se trouve levée quand on remplace comme élément représentatif de Z, le centre de gravité par la moyenne (T).

Remarque. — Dans un espace vectoriel distancié, qu'il soit « tendu » ou non, tout système Z a au moins une moyenne (T) qui se confond avec la moyenne classique. En effet, si dans l'inégalité de définition (18) de la moyenne (T) de Z, nous prenons $\delta \equiv px + qy$, l'inégalité prend la forme

$$\|p(x - a) + q(y - a)\| \leq \|p(x - a)\| + \|q(y - a)\|$$

vérifiée quel que soit a en vertu de l'inégalité triangulaire. Z a donc au moins une moyenne (T) : $\delta \equiv px + qy$.

La moyenne (T) étant définie à partir d'une inégalité sera en général plus difficile et plus longue à calculer que le centre de gravité. On aura donc intérêt à chercher d'abord s'il y a un centre de gravité unique. Même dans le cas contraire, ce calcul n'aura pas été inutile pour chercher s'il y a une moyenne (T) puisque celle-ci doit se trouver parmi les centres de gravité.

Remarque. — Nous venons de voir (p. 236) que dans un espace distancié vectoriel tendu, tout système Z (p. 224) a, au moins, une moyenne (T) — qui est nécessairement un centre de gravité — et, $p =$ qu'il n'a qu'un centre de gravité. Donc, dans un tel espace a une moyenne (T) et une seule — qui coïncide avec la moyenne classique. Nous ajouterons maintenant que : si l'on néglige l'unicité, ce résultat reste valide quand on ne suppose pas que l'espace est tendu. Car il devient évident quand on écrit cette inégalité sous la forme

$$\|p(x - a) + q(y - a)\| \leq \|p(x - a)\| + \|q(y - a)\|.$$

En particulier : dans un espace vectoriel distancié, tout système Z a au moins un centre de gravité. Ce dernier résultat a été démontré, il y a longtemps, par Karl Menger ⁽¹⁾ dans le cas beaucoup plus général où l'on suppose seulement sur l'espace considéré, qu'il est *distancié, convexe* ⁽²⁾ et *compact*, ou qu'il est *distancié, convexe et complet*.

Ce double résultat est important, particulièrement ici, où il suffit, pour vérifier si les hypothèses en italiques sont satisfaites, de connaître les éléments de l'espace et leurs distances mutuelles.

Cas d'un système à n éléments pondérés Bien que le cas d'un système à deux éléments pondérés soit le seul qui nous soit utile pour la deuxième et la troisième partie, il est loisible et intéressant de considérer en passant, comme nous allons le faire, le cas d'un système à un nombre fini, n , d'éléments pondérés.

Notre définition du centre de gravité d'un système Z d'éléments pondérés ne s'appliquait qu'au cas d'un système de deux éléments. Il y aurait intérêt à voir ce qui peut être généralisé dans les considérations [basées sur l'étude de $\sigma^2(a)$] qui ont conduit à cette définition.

Toutefois, on peut être conduit à une définition assez naturelle pour le cas général, en passant par l'intermédiaire de la moyenne (T).

MOYENNE (T). — En effet, la définition de Shafik Doss (s'appliquant quel que soit le nombre fini ou infini de positions possibles), prend la forme suivante dans le cas d'un nombre fini de positions possibles.

Soit X un élément aléatoire qui ne peut prendre que n positions x_1, \dots, x_n dans un espace distancié \mathcal{O} , avec les probabilités p_1, \dots, p_n . On dira que l'élément δ de \mathcal{O} est une moyenne (T) de X (ou du système U défini par $x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n$), si l'on a

$$(\delta, a) \leq p_1(x_1, a) + \dots + p_n(x_n, a)$$

quel que soit l'élément certain, a , de \mathcal{O} .

(Il n'est pas sûr *a priori* qu'il existe un tel élément.)

⁽¹⁾ *Untersuchungen ueber allgemeine Metrik (Math. Ann., Bd 100, 1928, p. 85-87).*

⁽²⁾ Dans un espace distancié \mathcal{O} un ensemble est *convexe* selon Karl Menger, si, pour tout couple de points x, y de \mathcal{O} , il existe au moins un point z de \mathcal{O} , distinct de x et de y et tel que

$$(x, z) + (z, y) = (x, y).$$

Considérons, alors, un espace distancié \mathcal{O}' , satisfaisant à la condition suivante :

CONDITION H'' . — Tout système $Z(x, y; p, q)$ a au moins une moyenne (T). On peut alors montrer : 1° que dans un tel espace \mathcal{O}' , tout système $U(x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n)$ a au moins une moyenne (T); 2° comment obtenir cette dernière par une application répétée de la condition (H'').

On a $\sum p_k = 1$, donc l'un au moins des p_k est $\neq 0$. Supposons, par exemple, $p_1 > 0$. On détermine d'abord une moyenne (T) du système

$$U_2\left(x_1, x_2; \frac{p_1}{p_1 + p_2}, \frac{p_2}{p_1 + p_2}\right), \text{ soit } \delta_2.$$

On détermine ensuite une moyenne (T), soit δ_3 , du système

$$U_3\left(\delta_2, x_3; \frac{p_1 + p_2}{p_1 + p_2 + p_3}, \frac{p_3}{p_1 + p_2 + p_3}\right), \dots$$

On arrivera enfin à une moyenne (T), soit δ du système

$$U_n(\delta_{n-1}, x_n; p_1 + \dots + p_{n-1}, p_n).$$

Et δ sera (comme on le voit immédiatement) une moyenne (T) du système U.

CENTRE DE GRAVITÉ. — D'ailleurs, nous savons que $\delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \delta$ sont des centres de gravité des systèmes à deux éléments correspondants. Nous sommes donc amené à la définition suivante.

Soit un espace distancié \mathcal{O}_1 vérifiant la condition H_1 suivante (plus faible que les conditions H et H'').

CONDITION H_1 . — Dans \mathcal{O}_1 , tout système $Z(x, y; p, q)$ a, au moins, un centre de gravité.

Alors dans un tel espace \mathcal{O}_1 , un centre de gravité d'un système $U(x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n)$ (ordonné comme dans ces parenthèses) est, par définition, un élément de \mathcal{O}_1 , obtenu comme ci-dessus, mais en remplaçant dans U_3, \dots, U_n les éléments $\delta_2, \dots, \delta_{n-1}$ par $\gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$: on détermine un centre de gravité γ_2 du système U_2 , un centre de gravité γ_3 du système U_3, \dots , enfin un centre de gravité γ du système U_n ; par définition, γ sera un centre de gravité de U.

On voit en résumé que :

1° Dans tout espace distancié \mathcal{O}_1 vérifiant la condition H_1 , tout système $U(x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n)$ a au moins un centre de gravité;

2° Dans tout espace distancié H'' vérifiant la condition \mathcal{O}' , chaque système $U(x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n)$ a au moins une moyenne (T) qui est en même temps un centre de gravité de U.

MOYENNE (T) GÉNÉRALISÉE. — Pour la définition du produit scalaire $y \equiv \lambda \cdot x$, on doit pouvoir prendre pour λ un nombre réel quelconque. Si λ était entre 0 et 1, y serait un centre de gravité de x , θ avec les coefficients λ et $1 - \lambda$, et ce pourrait être une moyenne (T). Mais quand $\lambda \leq 0$ ou $\lambda > 1$, il faut qu'on choisisse parmi les centres de gravité généralisés. Par exemple, si $\lambda > 1$, un centre de gravité généralisé, γ , de Z' est tel que x soit le centre de gravité tout court du système des éléments y et γ affectés des coefficients $1 - \frac{1}{\lambda}$ et $\frac{1}{\lambda}$. Alors, on prendra pour moyenne (T) généralisée de Z' , un élément δ de l'espace \mathcal{O} tel que x soit la moyenne (T) du système formé de y et δ affectés de coefficients $1 - \frac{1}{\lambda}$ et $\frac{1}{\lambda}$. Autrement dit, δ doit être tel que

$$(x, a) \leq \frac{1}{\lambda} (\delta, a) + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) (y, a),$$

ou

$$(18 \text{ bis}) \quad (\delta, a) \geq \lambda(x, a) + (1 - \lambda)(y, a)$$

quel que soit l'élément a de \mathcal{O} .

De même, quand $\lambda < 0$, δ sera moyenne (T) généralisée de Z' quand y sera moyenne (T) de x et δ affectés des coefficients $\frac{-\lambda}{1-\lambda}$ et $\frac{1}{1-\lambda}$. Autrement dit quand on aura encore l'inégalité (18 bis).

PRODUIT PAR SCALAIRE ET SOMME. — Dans les cas où l'espace distancié considéré ne vérifie pas la condition H de la page 23, on pourra encore définir $\lambda \cdot x$ et $x + y$ sous une forme généralisée, quand cet espace vérifie la condition suivante :

CONDITION L. — Elle est réalisée quand, dans cet espace, tout système Z' a une moyenne (T) généralisée. On désignera alors par $\lambda \cdot x$ un élément δ de cet espace qui soit moyenne (T) généralisée du système formé par les éléments x et θ affectés des coefficients λ et $1 - \lambda$. Pour définir $x + y$, on prendra la moyenne (T), soit m , de x et y affectés des coefficients $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$, puis la moyenne (T) généralisée, $x + y$, de θ et m affectés des coefficients -1 et 2 .

MÉTHODE PRATIQUE. — Quand on voudra appliquer à un espace distancié nos définitions de $x + y$ et $\lambda \cdot x$, on commencera par chercher s'il existe un centre de gravité généralisé de Z' . S'il y en a un, mais un seul, quel que soit Z' , c'est qu'on aura affaire à un espace \mathcal{O}' et l'on appliquera nos définitions des pages 232 et 233. S'il y en a plusieurs, on cherchera si Z' a une moyenne (T) généralisée. Si, quel que soit Z' , il y en a une, mais une seule, on appliquera nos définitions des pages 235 et 236.

Il n'aura pas été inutile de chercher d'abord les centres de gravité, puisque toute moyenne (T) est un centre de gravité. Et de plus, la solution générale de

l'inégalité qui définit une moyenne (T) se trouve simplifiée si l'on y limite le choix de l'élément inconnu en y supposant dès le début que c'est un des centres de gravité *déjà trouvés*.

C'est ce que nous ferons dans les exemples qui vont suivre.

TROISIÈME PARTIE,

EXEMPLES D'APPLICATION DE NOS DÉFINITIONS GÉNÉRALES DE $x + y$ ET DE $\lambda \cdot x$ A QUELQUES ESPACES DISTANCIÉS.

ESPACES DES POINTS D'UN PLAN. — Nous examinerons successivement deux espaces distanciés R_2 et \mathcal{X} dont les éléments sont les points d'un plan P, mais où ont été adoptées respectivement deux définitions de la distance. L'un, R_2 , réalise la condition (H) de la page 231, l'autre non.

ESPACE R_2 . — C'est l'espace plan de la Géométrie élémentaire. On peut voir directement que dans R_2 , tout système Z' (défini p. 226) a un centre de gravité généralisé et un seul et que nos définitions de $x + y$ et $\lambda \cdot x$ données page 232, y conduisent aux définitions classiques.

ESPACE \mathcal{X} DES POINTS D'UN PLAN. — *Définition.* — Appelons \mathcal{X} l'espace distancié dont les éléments sont les points d'un plan P, rapporté à deux axes rectangulaires $O\xi, O\eta$, mais où la « distance » de deux points x, y de coordonnées (ξ, η) (ν, ρ) est, par définition,

$$(37) \quad (x, y) = |\xi - \nu| + |\eta - \rho|. \quad (1)$$

UN « SEGMENT ». — Soit R le rectangle parallèle aux axes dont les points x, y sont deux sommets opposés. On voit facilement que le « segment » x, y , c'est-à-dire le lieu des points z tels que

$$(38) \quad (x, z) + (z, y) = (x, y),$$

non seulement existe, mais est constitué par tous les points de l'aire rectangulaire R,

On a, par exemple, sur la figure 1 :

$$(x, z) = xc + cz, \quad (z, y) = zd + dy, \quad (x, y) = x\beta + \beta y,$$

d'où (38). Et l'égalité (38) cesse quand z est en dehors de R.

MOYENNES EXTENSIVES. CENTRES DE GRAVITÉ. — Toute moyenne extensive de Z

(1) C'est pour ne pas compliquer une modification de texte à la dernière heure que les numéros des équations passent brusquement de (20) à (37).

seront sur une parallèle à la seconde bissectrice passant par le point δ , de coordonnées

$$\alpha_1 = p\xi + q\nu, \quad \beta_1 = p\eta + q\rho.$$

L'ensemble de ces moyennes sera le segment uv intercepté sur cette droite

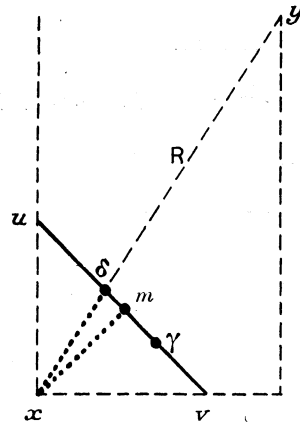


Fig. 2

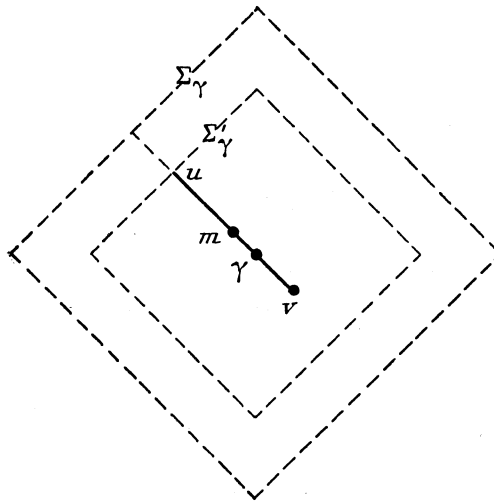


Fig. 3.

par le rectangle R (*fig. 2*). Il ne sera réduit à un point que si R se réduit à un segment, c'est-à-dire si x et y sont sur une même parallèle à l'un des axes, ou sont confondus.

Ainsi, sauf ces cas exceptionnels, *les centres de gravité de Z sont en nombre infini*.

MOYENNE (C). — Cherchons alors s'il y a une moyenne (C) de Z (définie p. 233).

Dans l'espace \mathcal{X} , un sphéroïde Σ_γ de rayon A, de centre γ , est un carré de centre γ dont les diagonales, de longueur $2A$ sont parallèles aux axes (*fig. 3*).

Si Σ_γ comprend tous les centres de gravité de Z , il comprend le segment uv ; si, en outre, son centre, γ , est un des centres de gravité de Z , γ est sur uv .

Nous voyons sur la figure 3 que Σ_γ comprend le « sphéroïde » Σ'_γ de même centre γ mais qui est le plus petit des sphéroïdes de centre γ comprenant uv . Le contour de Σ'_γ passera par celui des points u, v qui est le plus loin de γ (par u dans la figure 3).

La « moyenne (C) » de Z sera la position de γ où le rayon de Σ'_γ est le plus petit : c'est évidemment le milieu de uv , soit m . Pour $p \neq q$, et si le vecteur $y - x$ n'est pas à 45° sur les axes, m sera différent de $\delta = px + qy$. Or, dans les définitions classiques de la moyenne dans un espace de Banach, la moyenne est précisément δ . Nous vérifions donc que, pour $p \neq q$, la définition de la moyenne (C) n'est pas satisfaisante.

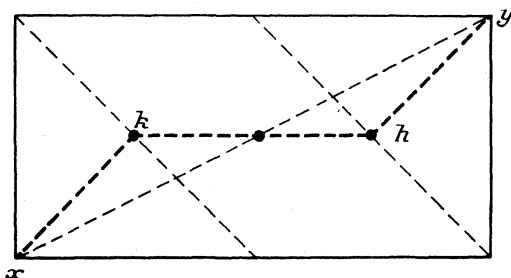


Fig. 4.

On peut s'en rendre encore mieux compte, en observant que si l'on substitue au lieu des centres de gravité de x, y quand p varie, le lieu des moyennes (C), on a bien substitué à l'aire rectangulaire R , une région plus étroite, ici une ligne. Mais au lieu que cette ligne soit le segment rectiligne joignant x, y , c'est la ligne brisée $xkhy$ (fig. 4).

On a bien simplifié le premier lieu, R , mais on a encore un résultat moins simple que celui de la théorie classique.

Mais, si $p = q$, alors uv passe par le centre de R avec lequel viennent se confondre δ et m . Alors la demi-somme (C) de x et y se confond avec la demi-somme classique des vecteurs x et y définie dans le plan euclidien P : c'est-à-dire le milieu de xy . La « somme » définie page 230 sera s tel que δ soit le milieu de Os . Ce sera donc la résultante de Ox et de Oy . C'est-à-dire que la « somme de x et y » définie page 230, coïncidera bien avec la somme géométrique des vecteurs Ox et Oy (fig. 5).

Ainsi, quand, dans la définition ordinaire du plan euclidien P comme un espace de Banach, on substitue à la définition ordinaire de la distance la définition de la page 238, on obtient encore la même définition de la somme.

Au contraire, si l'on voulait définir le produit par scalaire $\lambda \cdot x$ comme à la page 233 [c'est-à-dire comme la moyenne (C) du système Z' des points O et x

affectés des coefficients $1 - \lambda$ et λ], on aurait un produit par scalaire distinct du produit classique et qui se trouverait bien sur le « segment » joignant θ et x , mais celui-ci est un rectangle et $\lambda \cdot x$ ne serait pas sur le segment rectiligne euclidien θx .

Il vaut donc mieux n'appliquer la définition de la page 233 du produit par scalaire que dans le cas de $\lambda = \frac{1}{2}$, qui conduit à la définition de la somme qu'on vient d'obtenir.

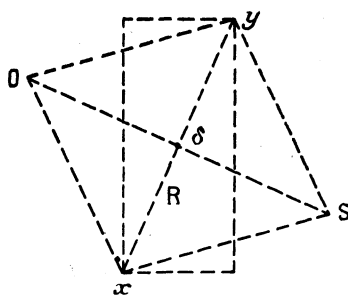


Fig. 5.

MOYENNE (T). — On aura, au contraire un résultat satisfaisant, même pour $p \neq q$, si l'on applique la définition de S. Doss à l'espace \mathcal{E} . On doit avoir, si la moyenne (T) existe, à savoir, γ

$$(40) \quad \|a - \gamma\| \leq p \|a - x\| + q \|a - y\|.$$

Prenons pour coordonnées de x, y : ξ, η ; ν, ρ ; pour coordonnées de a, γ : α, β et δ, ε . D'où

$$(40 \text{ bis}) \quad |\alpha - \delta| + |\beta - \varepsilon| \leq p[|\alpha - \xi| + |\beta - \eta|] + q[|\alpha - \nu| + |\beta - \rho|].$$

(40 bis) peut s'écrire

$$(41) \quad \{p|\alpha - \xi| + q|\alpha - \nu| - |\alpha - \delta|\} + \{p|\beta - \eta| + q|\beta - \rho| - |\beta - \varepsilon|\} \geq 0.$$

Supposons, par exemple, $\xi \leq \nu$ et $\eta \leq \rho$. On sait déjà qu'alors γ est dans le rectangle

$$\xi \leq \delta \leq \nu, \quad \eta \leq \varepsilon \leq \rho.$$

Prenons d'abord, pour a , les coordonnées

$$\alpha = \theta A, \quad \beta = \theta' B.$$

avec

$$\theta = \pm 1, \quad \theta' = \pm 1, \quad A \geq 0, \quad B \geq 0,$$

alors

$$\{p|\theta(A - \theta\xi)| + q|\theta(A - \theta\nu)| - |\theta(A - \theta\delta)|\} + \dots \geq 0$$

ou

$$\{p|A - \theta\xi| + q|A - \theta\nu| - |A - \theta\delta|\} + \dots \geq 0.$$

Et si A, B sont très grands :

$$\theta[\delta - p\xi - q\nu] + \theta'[\varepsilon - p\eta - q\rho] \geq 0.$$

Prenons $\theta' = 1$, puis $\theta = -1$ et ajoutons; on aura, puisque $\theta = \pm 1$:

$$\delta - p\xi - q\nu = 0 \quad \text{et de même} \quad \varepsilon - p\eta - q\rho = 0,$$

c'est-à-dire en vecteurs :

$$(42) \quad \gamma = px + qy.$$

Réciproquement, si dans (40), on prend $\gamma = px + qy$, (40) devient

$$\|p(x - a) + q(y - b)\| \leq p\|x - a\| + q\|y - a\|$$

et est donc bien vérifié.

Ainsi, il y a dans l'espace \mathfrak{E} et pour tout système Z une moyenne au sens de S. Doss et une seule et elle est identique à la moyenne classique, bien que l'espace \mathfrak{E} ne soit pas tendu, et qu'il y ait en général une infinité de centres de gravité de Z.

MOYENNE (T) GÉNÉRALISÉE. — Pour le système Z' de la page 226, on a défini p. 237 la moyenne (T) généralisée correspondant à $\lambda > 1$ comme un point δ tel que x soit la moyenne (T) du couple y et δ affectés des coefficients $1 - \frac{1}{\lambda}$ et $\frac{1}{\lambda}$. Si δ existe, on doit donc avoir, d'après (42)

$$(43) \quad \begin{aligned} x &= \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)y + \frac{1}{\lambda}\delta, \\ \delta &= \lambda.x + (1 - \lambda)y \end{aligned}$$

ce qui est possible. On obtiendrait la même formule pour $\lambda < 0$.

Non seulement, il y a une moyenne (T) généralisée et une seule dans l'espace \mathfrak{E} mais elle coïncide avec le centre classique des moyennes proportionnelles.

SOMME ET PRODUIT PAR SCALAIRE. — Il résulte de ce qui précède que si l'on appliquait à l'espace \mathfrak{E} les définitions de la somme et du produit par scalaire exprimées, (p. 230) en termes de centres de gravité généralisés, il pourrait y avoir plusieurs déterminations de $x + y$ et de $\lambda.x$.

Au contraire, on retrouvera une détermination unique et coïncidant avec la détermination classique pour $x + y$, comme pour $\lambda.x$ si l'on emploie leurs définitions en termes de moyennes (T) généralisées données page 237.

L'ESPACE E_ω A UNE INFINITÉ DE DIMENSIONS. — Considérons l'espace distancié E_ω , défini dans ma Thèse, dont chaque élément x , est une suite infinie de nombres réels $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ et où la distance de deux éléments x et y (la suite $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$) est

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}.$$

Cherchons à déterminer le « segment » xy , c'est-à-dire le lieu des points z de E_ω , tels que

$$(x, z) + (y, z) = (x, y)$$

ou

$$(44) \quad \sum_n \frac{1}{n!} C_n = 0,$$

avec

$$(44 \text{ bis}) \quad C_n = \frac{|x_n - z_n|}{1 + |x_n - z_n|} + \frac{|z_n - y_n|}{1 + |z_n - y_n|} - \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}.$$

On sait, et l'on voit plus loin, que si a, b, c sont ≥ 0 et tels que $c \leq a + b$, on a aussi

$$\frac{c}{1+c} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}.$$

Or

$$|x_n - y_n| \leq |x_n - z_n| + |z_n - y_n|, \quad \text{donc } C_n \geq 0.$$

Alors (44) ne peut avoir lieu que si chaque C_n est nul. Or, avec les notations précédentes, la quantité

$$\begin{aligned} Q &= (1+a)(1+b)(1+c) \left[\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} - \frac{c}{1+c} \right] \\ &= (a+b+2ab)(1+c) - c(1+a+b+ab) = c(ab-1) + a+b+2ab. \end{aligned}$$

Si $ab - 1 > 0$, le crochet est ≥ 0 .

Si $ab - 1 \leq 0$:

$$Q \geq (a+b)(ab-1) + a+b+2ab = ab(a+b+2) \geq 0.$$

On a donc bien $C_n \geq 0$. Pour que Q soit nul, il faut, ou bien que

$$ab > 1 \quad \text{et alors } c = a = b = 0$$

ou

$$ab \leq 1 \quad \text{et alors } ab = 0.$$

Dans tous les cas, on doit avoir $ab = 0$. Et alors si $a = 0$ et $c \leq a + b = b$:

$$Q = b - c,$$

il faut que $c = b$. Si $b = 0$, $c = a$.

En se reportant à (44 bis), on voit que, pour que C_n soit nul, il faut que

$$z_n = x_n \quad \text{ou} \quad y_n$$

et alors, si $z_n = x_n$,

$$b = |y_n - z_n| = |x_n - y_n| = c.$$

En résumé pour que z soit sur le « segment » xy , il faut et il suffit, quel que soit n , que

$$z_n = x_n \quad \text{ou} \quad y_n.$$

Cherchons maintenant s'il y a un centre de gravité, γ , du système Z . Celui-ci doit d'abord, être un « segment » x, y . En outre, il doit vérifier la condition

$$(45) \quad (y, \gamma) = p(x, y).$$

Or γ doit être tel que ses coordonnées soient

$$(46) \quad \gamma_n = x_n \text{ ou } y_n.$$

Il n'est pas évident que, pour p donné, il existe de tels γ_n pour lesquels (45) soit vérifié. Mais puisque nous cherchons seulement un exemple, nous pouvons procéder à l'inverse. Prenant des γ_n quelconques vérifiant (46); (y, γ) et (x, y) sont donnés et en nous plaçant dans le cas général où $(x, y) \neq 0$, cette relation (45) détermine p .

Ainsi, étant donnés x et y , ($x \neq y$) de E_ω , il existe toujours un élément γ de \mathcal{O} et un nombre p ($0 \leq p \leq 1$), tels que γ soit un centre de gravité du système Z constitué des éléments x et y affectées des coefficients p et $q = 1 - p$.

Pour simplifier les calculs ultérieurs et puisqu'il s'agit, ici, seulement, d'un exemple, nous pouvons supposer

$$x_1 = x_2 = 0, \quad y_1 = y_2 = 1, \quad x_n = y_n = 0 \quad \text{pour } n > 2.$$

Pour toute suite z de E_ω située sur le « segment » xy , on aura, d'après (46)

$$z_1 = 0 \text{ ou } 1, \quad z_2 = 0 \text{ ou } 1, \quad z_n = 0 \quad \text{pour } n > 2.$$

Ainsi, dans cet exemple, le « segment » xy est constitué de quatre points.

Pour $z_1 = z_2 = 0$, on aurait $z = x$; pour $z_1 \equiv z_2 \equiv 1$ on aurait $z \equiv y$. Prenons pour centre de gravité γ , la suite, du type (46)

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 1, \quad \gamma_n = 0 \quad \text{pour } n > 2.$$

Il faudra que

$$(y, \gamma) = p(x, y)$$

ou

$$\frac{1}{1+1} + \frac{1}{2} \times 0 + 0 = p \left(\frac{1}{1+1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+1} + 0 \right)$$

ou

$$\frac{1}{2} = p \frac{3}{4}, \quad \text{d'où } p = \frac{2}{3}.$$

Peut-il y avoir d'autre centre de gravité de Z que γ , soit γ' , pour $p = \frac{1}{3}$?

γ' doit vérifier

$$(y, \gamma') = p(x, y) = (y, \gamma) = \frac{1}{2}.$$

Or γ' doit aussi appartenir au « segment » x, y , c'est-à-dire que :

$$\text{ou bien } \gamma' = x \text{ et alors } (y, \gamma') = (x, y) = \frac{3}{4} \neq \frac{1}{2};$$

ou bien $\gamma' \equiv \gamma$ et alors $(\gamma, \gamma') = 0 \neq \frac{1}{2}$;

ou bien $\gamma' \equiv \gamma$;

ou bien γ' a pour coordonnées $1, 0, 0, \dots, 0, \dots$, d'où

$$(\gamma, \gamma') = \frac{0}{1+1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+1} + 0 = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2}.$$

Donc $\gamma' \equiv \gamma$, il y a, pour $p = \frac{2}{3}$, un centre de gravité, γ , de X et un seul,

Cherchons maintenant s'il y a une moyenne (T) de Z . S'il y en avait une, ce serait un centre de gravité de Z , ce serait donc γ :

$$0, 1, 0, \dots$$

Il s'agit donc de savoir si

$$(47) \quad (\gamma, a) \leq p(x, a) + q(y, a)$$

quelle que soit la suite a :

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

On devrait avoir

$$(48) \quad \frac{|a_1|}{1+|a_1|} + \frac{1}{2} \frac{|a_2-1|}{1+|a_2-1|} + \sum_{n>2} \frac{1}{n!} \frac{|a_n|}{1+|a_n|} \leq \frac{2}{3} \sum_n \frac{1}{n!} \frac{|a_n|}{1+|a_n|} + \frac{1}{3} \left\{ \frac{|a_1-1|}{1+|a_1-1|} + \frac{1}{2} \frac{|a_2-1|}{1+|a_2-1|} + \sum_{n>2} \frac{1}{n!} \frac{|a_n|}{1+|a_n|} \right\}.$$

Les termes correspondant à $n > 2$ s'équilibrent et peuvent être supprimés. Si l'on prend alors $a_1 = 1, a_2 = 0$, l'inégalité (48) devient

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+1} \leq \frac{2}{3} \left(\frac{1}{1+1} + 0 \right) + \frac{1}{3} \left(0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+1} \right)$$

ou

$$\frac{3}{4} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{12} \quad \text{ou} \quad 9 \leq 5.$$

Ainsi (47) n'est pas vérifié ; on a bien un exemple où Z a un centre de gravité (et un seul) sans avoir de moyenne (T).

ESPACES DES SEGMENTS ORIENTÉS. — Dans les raisonnements qui précèdent, nous avons été aidé par la structure classique des espaces de Banach.

C'est pourquoi nous voulons donner un exemple d'un espace distancié où chaque système Z' a un centre de gravité généralisé et un seul, sans connaître autre chose sur cet espace que l'ensemble de ses éléments et leurs distances mutuelles.

C'est un espace dont les éléments sont les segments rectilignes orientés (ou vecteurs). On peut y définir les distances de plusieurs façons assez naturelles, dont nous retiendrons deux.

Pour l'une, tout système Z' a un « centre de gravité généralisé » et un seul. Pour l'autre, il en a généralement une infinité. Nous étudierons plus loin (p. 248), cette seconde définition.

PREMIÈRE FORME DE LA DISTANCE : ESPACE \mathfrak{R} . — La première définition, que nous allons examiner, donne pour « distance » de deux segments orientés $x = \overline{AB}$, $y = \overline{A'B'}$,

$$(49) \quad (x, y) \equiv (\overline{AB}, \overline{A'B'}) = \sqrt{AA'^2 + BB'^2}.$$

Désignons par \mathfrak{R} l'espace distancié correspondant à cette définition.

ISOMÉTRIE. — Soient ξ, η, φ les coordonnées de $A, \dots, \mu', \nu', \rho'$ celles de B' . On a

$$(x, y) = \sqrt{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\varphi - \varphi')^2 + (\mu - \mu')^2 + (\nu - \nu')^2 + (\rho - \rho')^2}.$$

Si l'on fait correspondre aux segments orientés $\overline{AB}, \overline{A'B'}$, les deux points de l'espace cartésien R_6 à six dimensions, de coordonnées rectangulaires respectives $\xi, \eta, \varphi, \mu, \nu, \rho$ et $\xi', \eta', \varphi', \mu', \nu', \rho'$, on voit qu'on réalisera une correspondance isométrique (c'est-à-dire conservant les distances) entre les éléments de l'espace \mathfrak{R} et les points de l'espace cartésien R_6 .

CONSÉQUENCES. — Le centre de gravité généralisé, la norme, la somme, le produit par scalaire, dont les définitions dans R_6 sont bien connues, correspondront exactement aux éléments de même nom mais relevant de nos propres définitions dans l'espace \mathfrak{R} .

Il y aura donc un centre de gravité généralisé et un seul d'un système Z' dans \mathfrak{R} .

Ce sera, pour R_6 , le point de coordonnées

$$\lambda \xi + (1 - \lambda) \xi', \quad \dots, \quad \lambda \rho + (1 - \lambda) \rho', \quad \dots$$

Ce sera, par suite, pour \mathfrak{R} , le segment orienté $\gamma \equiv \overline{A''B''}$ où A'' est sur AA' , B'' sur BB' , où x, y, γ sont parallèles à un même plan et où

$$|\lambda| AA'' = |\lambda - 1| A'A'', \quad |\lambda| BB'' = |\lambda - 1| B'B''.$$

Appliquons nos définitions de la page 230. En utilisant l'isométrie entre \mathfrak{R} et R_6 , on a immédiatement les résultats suivants :

En prenant pour θ un vecteur orienté *réduit à l'origine* O , on aura pour la *norme*

$$\|AB\| = \sqrt{OA^2 + OB^2}$$

Le *produit par scalaire* $\lambda \cdot x \equiv \lambda \cdot \overline{AB}$ sera l'homothétique de \overline{AB} par rapport à O dans le rapport λ .

Enfin la somme de $x \equiv \overline{AB'}$ et $y \equiv \overline{A'B'}$ sera le vecteur $s \equiv \overline{A_1 B_1}$, où $\overline{OA_1}$ est la résultante de \overline{OA} et $\overline{OA'}$ et où $\overline{OB_1}$ est la résultante de \overline{OB} et de $\overline{OB'}$.

L'espace R_6 est évidemment un espace vectoriel distancié (et même un espace de Banach). On en conclut facilement que l'espace \mathfrak{R} est aussi un espace de Banach.

Grâce à l'isométrie mentionnée ci-dessus, ces résultats sont si évidents qu'il vaudrait à peine de les énoncer si ce n'est qu'ils mettront mieux en évidence l'altération apportée quand on modifie la définition de la distance (49) dans \mathfrak{R} pour arriver à l'espace \mathfrak{T} que nous allons étudier.

DEUXIÈME FORME DE LA DISTANCE : ESPACE \mathfrak{T} . — Considérons, comme à la page 246, un espace \mathfrak{T} dont les éléments sont les segments orientés ($x \equiv \overline{AB}$, $y \equiv \overline{A'B'}$, ...) appartenant à l'espace euclidien R_3 . Mais adoptons-y une définition de la distance différente de celle de la page 247.

Ce sera une définition qui sera l'application au cas particulier des segments orientés, de la définition générale de la distance de deux courbes de Jordan, que nous avons indiquée, il y a plus de cinquante ans (*).

On prend pour distance (x, y) , la plus grande des longueurs des segments AA' , BB' . Il est facile de s'assurer que cette définition vérifie bien les conditions 1°, 2°, 3° de la note de la page 224.

Bien qu'elle soit distincte, comme on va le voir, de la définition de la page 247 et qu'elle conduise à certains résultats différents, on notera qu'elle définit un espace distancié \mathfrak{T} , qui a évidemment la même topologie que celle de l'espace \mathfrak{R} de la page 247. On obtiendra même (p. 253) un résultat plus précis.

Soit maintenant Z le système formé de ces deux segments orientés \overline{AB} , $\overline{A'B'}$ affectés respectivement des « poids » p et q ($p \geq 0$, $q \geq 0$, $p + q = 1$).

Cherchons d'abord à déterminer le « segment » x, y , c'est-à-dire le lieu des vecteurs $\gamma \equiv A_1 B''$ tels que

$$(x, \gamma) + (\gamma, y) = (x, y),$$

(x, y) est la plus grande des longueurs AA' , BB' . Supposons, par exemple, $AA' \leq BB'$. On a

$$(50) \quad BB'' \leq (x, \gamma), \quad B'B'' \leq (y, \gamma),$$

d'où

$$(x, y) = BB' \leq BB'' + B'B'' \leq (x, \gamma) + (\gamma, y) = (x, y).$$

D'où

$$BB'' + B'B'' = (x, y) = BB'.$$

Ainsi B'' est sur le segment BB' , entre B et B' . D'autre part

$$0 = (x, y) - BB'' - B'B'' = [(x, \gamma) - BB''] + [(y, \gamma) - B'B''].$$

(*) Voir, par exemple, notre Ouvrage, *Les espaces abstraits*, p. 154.

Les deux crochets, d'après (50) sont ≥ 0 , ils sont donc nuls. Ainsi

$$(51) \quad BB'' = (x, \gamma), \quad B'B'' = (y, \gamma),$$

avec

$$(51 \text{ bis}) \quad AA'' \leq (x, \gamma), \quad A'A'' \leq (y, \gamma).$$

Inversement, x, y étant donnés, choisissons deux nombres a, a' tels que

$$(52) \quad a \geq 0, a' \geq 0, \quad a + a' = (x, y),$$

Il y aura sur BB' un point B_1 et un seul, tel que

$$BB_1 = a, \quad B'B_1 = a'.$$

Puisque $AA' \leq BB'$, il y aura au moins un point A_2 commun aux deux sphères de centres A, A' et de rayons respectifs a, a' .

Ou bien $|a - a'| \leq AA' (\leq a + a')$ et A_2 sera n'importe quel point de la lentille L , intersection de ces deux sphères.

Ou bien $a - a' > AA'$ et A_2 sera n'importe quel point de la sphère de centre A' , rayon a' , ou bien $a' - a > AA'$ et le lieu de A_2 sera la sphère de centre A , rayon a .

Tous les vecteurs A_2B , appartiendront quels que soient a, a' vérifiant (52) au « segment » xy et réciproquement.

Cherchons maintenant s'il y a un centre de gravité γ de Z . γ sera d'abord un, $A''B''$, des éléments A_1B'' du « segment » xy . Il sera tel, ensuite, que

$$(52) \quad p(x, \gamma) = q(y, \gamma).$$

D'où, d'après (51)

$$pBB'' = qB'B''.$$

Ainsi B'' est alors déterminé. C'est le point du vecteur donné BB' qui divise ce vecteur dans le rapport de q à p . On a ainsi

$$(x, \gamma) = BB'' = q(x, y), \quad (y, \gamma) = B'B'' = p(x, y),$$

B'' étant ainsi fixé, A_1 sera l'un des points vérifiant (51 bis).

Il y aura donc, en général, une infinité de centres de gravité de Z . Les cas exceptionnels où Z n'a qu'un centre de gravité sont les suivants :

Quand $AA' \geq |BB'' - B'B''| \doteq |q - p|(x, y)$, la lentille L devra se réduire à un point A'' (appartenant à AA') tel que

$$AA'' = BB_1, \quad A'A'' = B'B_1,$$

d'où

$$AA' = BB'.$$

Quand $AA' < (q - p)(x, y)$, les éléments A_1 sont ceux de la sphère de centre A' , rayon $p(x, y)$ avec $(x, y) \neq 0$. S'ils se réduisent à un seul point, on

a $p = 0$ et alors d'après (45), $\overline{A''B''} \equiv \overline{A'B'}$. Reste enfin le cas où $AA < (p - q)(x, y)$ et où $q = 0$ et alors $\overline{A''B''} \equiv \overline{AB}$.

Passons au cas des centres de gravité généralisés.

Pour $\lambda > 1$, on a vu que x doit être centre de gravité tout court du système des points y, γ affectés des coefficients $1 - \frac{1}{\lambda}$ et $\frac{1}{\lambda}$.

Si $BB'' \geq AA''$, alors B' sera sur le segment BB'' entre B et B' . Et l'on aura (p. 249)

$$AA' \leq BB' \quad \text{et} \quad A''A' \leq B''B'.$$

Si l'on avait $BB'' < AA''$, on aurait $AA' > BB'$.

Donc, si, comme précédemment, on suppose

$$AA' \leq BB',$$

on aura

$$BB'' \geq AA''$$

et B'' sera sur la droite donnée BB' . B'' sera bien déterminé, car

$$BB'' = (x, \gamma), \quad B'B'' = (y, \gamma), \quad BB' = (x, y),$$

d'où

$$BB'' = |\lambda - 1| BB', \quad B'B'' = |\lambda| BB'.$$

Alors

$$B'B'' = BB'' + BB',$$

B'' sera en dehors de BB' du côté de B .

Quant à A'' il sera tel que

$$AA'' \leq BB'', \quad AA' \leq BB'.$$

On aurait des résultats correspondants pour $\lambda < 0$: B'' serait encore sur la droite BB' en dehors du segment BB' , mais cette fois du côté de B' , avec

$$BB'' = (1 - \lambda)BB', \quad B'B'' = (-\lambda)BB'.$$

On voit alors que quel que soit λ , B'' sera sur la droite illimitée BB' en un point bien déterminé tel que

$$BB'' = |\lambda - 1| BB', \quad B'B'' = |\lambda| BB'.$$

Le point A'' sera un point arbitraire dans la région commune aux deux sphères de centres A et A' et de rayons BB'' et $B'B''$.

Il y aura en général une infinité de points A'' , donc de segments $\overline{A''B''}$; les cas exceptionnels sont ceux où $\lambda = 0$ ou 1 ou celui où $x \equiv y$.

Dans le cas particulier où $\lambda = \frac{1}{2}$, $\overline{A''B''}$ est un « milieu extensif » du couple $x = \overline{AB}$, $y = A'B'$. D'après ce qui précède, si $BB'' \geq AA''$, B'' sera le milieu du

segment rectiligne BB' et A'' sera un point quelconque de AA' tel que

$$AA'' \leq BB' \left[= \frac{BB'}{2} = \frac{(x, y)}{2} \right],$$

$$A'A'' \leq B'B'' \left[= \frac{BB'}{2} = \frac{(x, y)}{2} \right].$$

Il y aura, en général, une infinité de positions possibles de A'' et par conséquent une infinité de « milieux extensifs » du couple x, y . Il n'y a exception que si $AA' = BB'$, cas où A'' est le milieu de AA' , comme B'' est le milieu de BB' .

MILIEUX (C). — Appliquons maintenant la définition de la page 235 pour chercher s'il existe un (ou plusieurs) « milieux (C) » du couple x, y (7).

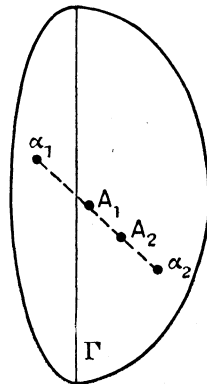


Fig. 6.

Pour cela, considérons deux des « milieux restreints » de x, y , savoir les segments orientés $\gamma_1 \equiv \overline{A_1 B''}$, $\gamma_2 \equiv \overline{A_2 B''}$, où B'' est le milieu de BB' et où A_1 et A_2 sont seulement assujettis aux conditions

$$\left. \begin{matrix} AA_1 \\ A'A_1 \end{matrix} \right\} \leq \frac{(x, y)}{2}, \quad \left. \begin{matrix} AA_2 \\ A'A_2 \end{matrix} \right\} \leq \frac{(x, y)}{2};$$

A_1, A_2 appartiennent à une lentille, L , formée de deux portions de surfaces sphériques égales, limitées à un cercle Γ ayant pour centre le milieu A'' de AA' et pour axe AA' .

Soit maintenant, Σ_{γ_2} , le sphéroïde de l'espace \mathfrak{E} ayant pour centre γ_2 , pour rayon, ρ , et contenant tous les « milieux restreints » de x, y tels que γ_1 . On devra avoir

$$(\gamma_1, \gamma_2) \leq \rho$$

ou, puisque B'' est extrémité de γ_1 et γ_2 :

$$A_1 A_2 \leq \rho.$$

(7) Nous laissons au lecteur le soin de voir que dans l'espace \mathfrak{E} comme dans l'espace \mathfrak{X} de la page 240, la définition de la moyenne (C) n'est pas satisfaisante pour $p \neq q$.

On peut prendre pour φ , le maximum de A_1A_2 quand A_1 parcourt L . Soient α_1, α_2 les intersections de la droite A_1A_2 avec la surface de L (*fig. 6*). A_1A_2 est au plus égal au plus grand des segments α_1A_2, α_2A_2 . On peut donc se borner au cas où A_1 est sur la surface de L . Quand A_1 se déplace sur cette surface, le maximum de A_1A_2 a lieu quand A_1 est sur le cercle Γ . Soient β_1, β_2 (*fig. 7*), les

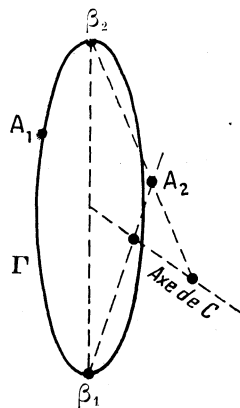


Fig. 7.

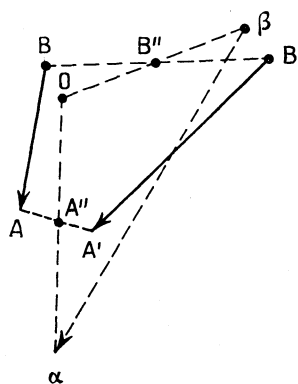


Fig. 8.

intersections de ce cercle avec le plan passant par l'axe de Γ et par A_2 . Le maximum de A_1A_2 , quand A_1 varie sur Γ , est au moins égal au plus grand des segments $A_2\beta_1, A_2\beta_2$. Soit R le rayon de Γ . On a

$$A_2\beta_1 + A_2\beta_2 \geq 2R.$$

Donc $A_2\beta_1$ et $A_2\beta_2$ ne peuvent être tous deux $< R$. Dès lors le maximum de A_1A_2 est $\geq R$. D'où $\varphi \geq R$. Or, quand A_2 est au centre A'' de Γ , le maximum de A_1A_2 est évidemment R . Et quand A_2 n'est pas en A'' , le plus grand des segments $A_2\beta_1, A_2\beta_2$ est, d'après ce qui précède, supérieur et non égal à R . Donc le minimum de φ n'est atteint que quand A_2 est en A'' , milieu de AA' . Finalement, *il y a un milieu (C) de x, y et un seul, à savoir le segment orienté $\overline{A''B''}$ qui joint les milieux de AA' et de BB' .*

Appliquons maintenant les définitions de la page 232 à l'espace distancié \mathfrak{E} mais en y remplaçant les centres de gravité par les milieux (C).

Au lieu de prendre pour élément neutre un élément quelconque de \mathfrak{E} , il sera plus commode de prendre comme élément neutre θ , un vecteur de \mathfrak{E} réduit à un point O quelconque que nous appellerons l'origine.

Alors la norme $\|x\|$ de $x \equiv \overline{AB}$ sera

$$\|x\| = (\theta, \overline{AB}) = \text{Max} \begin{cases} \text{OA} \\ \text{OB} \end{cases}.$$

Si $A''B''$ est le milieu (C) de x et $y \equiv \overline{A'B'}$, la somme $s \equiv \alpha\beta$, si elle existe doit être telle que $\overline{A''B''}$ soit le milieu (C) de θ et de s . Donc A'' , milieu de AA' , doit être aussi le milieu de $O\alpha$ (*fig. 8*), c'est-à-dire que $\overline{O\alpha}$ doit être la résultante de \overline{OA} et de $\overline{OA'}$. De même $\overline{O\beta}$ doit être la résultante de \overline{OB} et $\overline{OB'}$.

(Au moment de corriger les épreuves, nous venons de démontrer que, dans l'espace \mathfrak{E} , tout système Z, a une moyenne (T) et une seule, la même que dans l'espace \mathfrak{R}^2 , p. 247).

COMPLÈMENT.

DIFFÉRENTES SORTES DE MOYENNE DANS UN ESPACE DISTANCIÉ.

RÉSUMÉ.

Pour les probabilistes, nous allons répéter, en langage des probabilités, une partie de ce qui précède.

On rappelle notre définition de la moyenne d'un élément aléatoire dans un espace distancié quelconque. On opère ensuite deux sélections successives parmi les moyennes possibles (qu'on qualifie, dans la suite, de moyenne extensive). On définit ainsi d'abord les « centres de gravité » puis on rappelle et étudie ensuite les « moyennes (T) » de Shafik Doss.

Le tout est fait en se restreignant au seul cas utile pour ce qui précède où l'élément aléatoire n'a que deux positions possibles.

RAPPEL. — Nous avons précédemment défini (*) comme la moyenne $\beta \equiv \overline{X}$ d'un élément aléatoire X appartenant à un espace distancié, \mathcal{O} (appelé souvent espace métrique) tout élément β de \mathcal{O} — s'il en existe — tel que la moyenne $\mathfrak{M}(X, a)^2$ du carré de la distance de X à un élément certain a de \mathcal{O} , atteigne son minimum pour $a \equiv \beta$ (9).

(8) Les éléments aléatoires de nature quelconque (*Ann. Inst. H. Poincaré*, vol. 14, 1948, p. 215-310).

(9) Nous avons dans le même Mémoire, donné une définition de \overline{X} quand $\mathfrak{M}(X, a)^2$ est infini. Cette définition était un peu plus générale, dans le cas où \mathcal{O} est la droite, que la définition classique. On trouvera une modification de cette définition (qui la rend un peu moins simple, mais qui se réduit à la définition classique dans le cas où \mathcal{O} est une droite, dans la Note B, p. 18, de notre Mémoire : *Sur diverses définitions de la moyenne d'un élément aléatoire de nature quelconque* (*Giorn. Istituto Ital. degli Attuari*, 1^{re} partie, anno IX, 1956, p. 1-15; II^e et III^e parties, anno X, 1957, p. 1-37).

CAS DE DEUX POSITIONS DE X. — Afin de pouvoir dans ce qui précède utiliser ce Complément pour définir la somme $x + y$ et le produit scalaire $\lambda \cdot x$, en termes de distance, il nous suffira de nous limiter au cas où X n'a dans \mathcal{O} que deux positions possibles x et y (avec les probabilités p et q). On a

$$\sigma^2(a) \equiv \mathfrak{N}(X, a)^2 = p(x, a)^2 + q(y, a)^2$$

ou

$$(1) \quad \sigma^2(a) = pq[(x, a) + (y, a)]^2 + [p(x, a) - q(y, a)]^2,$$

d'où

$$(2) \quad \sigma^2(a) \geq pq(x, y)^2.$$

CENTRE DE GRAVITÉ. — S'il existe un élément γ de \mathcal{O} , tel que

$$(3) \quad \sigma^2(\gamma) = pq(x, y)^2$$

il sera, d'après (2), le plus représentatif possible.

Si un tel élément existe, on aura comme on l'a vu, p. 225

$$(4) \quad \begin{cases} (x, y) = (x, \gamma) + (\gamma, y), \\ p(x, \gamma) = q(\gamma, y). \end{cases}$$

Réciproquement, s'il existe un élément γ vérifiant (4), il vérifiera (3). D'ailleurs, le système (4) est équivalent au système

$$(5) \quad \begin{cases} (x, \gamma) = q(x, y), \\ (y, \gamma) = p(x, y). \end{cases}$$

On voit que dans le cas où \mathcal{O} est une droite, γ serait le centre de gravité du système Z constitué des éléments x, y affectés des poids p, q . Pour rappeler ce cas, nous continuerons à dire, dans le cas où \mathcal{O} est un espace distancié quelconque, que s'il existe un élément γ de \mathcal{O} vérifiant (3) [ou (4) ou (5) qui sont des systèmes équivalents à (3)], γ est un centre de gravité du système Z.

Une moyenne β de X peut exister sans que X ait un centre de gravité, (p. 225).

Pour cette raison, nous préciserons la dénomination de β que nous appellerons à partir de maintenant, *moyenne extensive* de X.

Tout centre de gravité de X, est une moyenne extensive de X, mais nous avons vu, p. 225 que l'inverse n'a pas nécessairement lieu.

Ajoutons que si X a au moins un centre de gravité γ , toute moyenne extensive de X sera aussi un centre de gravité (distinct ou non de γ). Bien entendu si X n'a qu'un centre de gravité, soit, γ , il n'a aussi qu'une moyenne extensive, qui sera γ .

NOUVELLE RESTRICTION. — Il existe des espaces distanciés assez simples tels l'espace \mathcal{X} de la page 238 pour lesquels Z a une infinité de centres de gravité, ce qui est gênant.

Dans le même esprit que ci-dessus, on peut introduire une nouvelle restric-

tion en remplaçant le centre de gravité de X par la moyenne (T) de X définie par Shafik Doss ⁽¹⁰⁾. Dans le cas particulier actuel, où X n'a que deux positions possibles, x et y dans \mathcal{O} , sa définition s'exprime ainsi :

S'il existe un élément δ de \mathcal{O} tel que

$$(\delta, a) \leq p(x, a) + q(y, a)$$

quel que soit l'élément certain a de \mathcal{O} , δ sera une moyenne (T) de X .

Or, on peut prouver (p. 225) que s'il existe une telle moyenne (T) de X , c'est aussi un centre de gravité de X .

Mais la réciproque n'est pas vraie, un centre de gravité de Z n'est pas nécessairement une moyenne (T) de Z , comme le montre l'exemple de l'espace E_ω de la page 243.

⁽¹⁰⁾ Sur la moyenne d'un élément aléatoire « dans un espace distancié » (Bull. Sc. Math., 2^e série, t. 73, 1949, p. 1-26).