

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MAURICE ROSEAU

## **Diffusion dans un sol perméable d'ondes liquides entretenues par la marée**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 77, n° 1 (1960), p. 1-40

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1960\\_3\\_77\\_1\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1960_3_77_1_1_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**ANNALES**  
SCIENTIFIQUES  
DE  
**L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE**

---

*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*,  
3<sup>e</sup> série, t. 77, 1960, p. 1 à 40.

**DIFFUSION**  
**DANS UN SOL PERMÉABLE D'ONDES LIQUIDES**  
**ENTRETENUES PAR LA MARÉE.**

PAR M. MAURICE ROSEAU.

---

I. — Introduction.

Les variations du niveau de l'océan au voisinage des côtes, effets visibles de la marée, ont pour conséquence des variations corrélatives de la pression en tous les points de la partie immergée de la grève.

Celle-ci qu'on supposera plane, inclinée de l'angle  $\alpha$  sous l'horizon, et représentée sur la figure 1 par la droite BOC, limite supérieurement un milieu solide, par hypothèse perméable.

Les fluctuations de pression exercées le long de OB sont à l'origine du mécanisme d'entretien des ondes hydrodynamiques dans le milieu poreux; c'est là un fait expérimental, observé en particulier dans certaines îles formées de terrains volcaniques, où il se produit dans les puits d'irrigation des oscillations du niveau de l'eau, de même période que la marée.

Dans un Mémoire récent, G. F. Carrier et W. H. Munk [1] ont fait une étude théorique de ces ondes, donnant la mise en équations du problème et sa solution dans les seuls cas où  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

Comme il sera expliqué plus loin, le problème consiste essentiellement à construire des fonctions  $\varphi(x, y)$ , à valeurs complexes, satisfaisant à l'équation réduite des ondes

$$\Delta\varphi - i\varepsilon\varphi = 0 \quad (\varepsilon > 0), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (i^2 = -1)$$

dans le secteur  $BOx$ , d'angle  $\beta = \pi - \alpha \geq \frac{\pi}{2}$ , et aux conditions aux limites

$$\begin{aligned} \varphi &= 1 \quad \text{sur } OB, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, 0) + i\varphi(x, 0) &= 0 \quad (x > 0), \end{aligned}$$

$\varphi$  borné dans le secteur  $BOx$ .

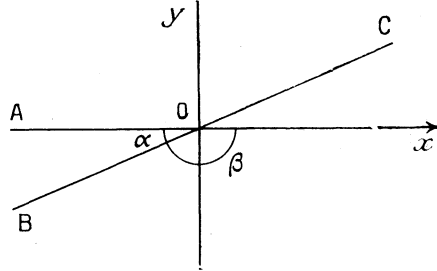


Fig. 1.

On trouvera dans les pages qui suivent, la solution de ce problème pour toute valeur de  $\beta$ ,  $\frac{\pi}{2} \leq \beta < \pi$ , ainsi qu'un théorème d'unicité.

Au surplus, des représentations explicites des solutions ayant une singularité à l'origine ont été mises en évidence. Plus précisément on a construit une suite infinie de fonctions  $\psi^{(q)}(x, y)$  ( $q$  entier  $\geq 0$ ) satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta\psi^{(q)} - i\varepsilon\psi^{(q)} &= 0 \quad \text{dans le secteur } BOx, \\ \psi^{(q)} &= 0 \quad \text{sur } OB, \\ \frac{\partial\psi^{(q)}}{\partial y}(x, 0) + i\psi^{(q)}(x, 0) &= 0 \quad (x > 0), \\ \psi^{(q)} &\sim r^{-(2q+1)\frac{\pi}{2\beta}} \quad \text{quand } r \rightarrow 0, \quad -\beta \leq \omega \leq 0, \\ &\text{avec } x + iy = r e^{i\omega}; \\ \psi^{(q)} &\rightarrow 0 \quad \text{quand } r \rightarrow \infty, \quad -\beta \leq \omega \leq 0. \end{aligned}$$

On obtiendra simplement par combinaison linéaire  $\varphi + \sum_{s=0}^q a_s \psi^{(s)}$  des solutions du

premier problème aux limites ayant à l'origine une singularité d'ordre  $\frac{1}{r^{\frac{q}{\beta} + \frac{\pi}{2\beta}}}$ .

Des problèmes aux limites plus généraux, en particulier ceux obtenus en substituant à la condition  $\varphi = 1$  sur OB, une condition du type  $\varphi = f(r)$  sur OB,  $f(r)$  polynome en  $r$  de degré quelconque, ou produit d'un polynome par un facteur exponentiel, ou encore polynome trigonométrique, seront résolus explicitement et précisés par des résultats d'unicité.

Pour mener à bien ces calculs, on a fait usage d'une méthode imaginée et développée pour résoudre certains problèmes de la théorie des ondes liquides de gravité [2], [3].

Il apparaît très clairement que l'emploi de ce procédé n'est pas limité à la mécanique des fluides : il peut trouver d'utiles applications à d'autres problèmes de physique mathématique impliquant la résolution de l'équation réduite des ondes dans un secteur, avec des données aux limites portées par les côtés du secteur.

Les résultats de cette étude ont été énoncés dans deux notes parues dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. 249, p. 1453 et 1611, 1959).

## II. — Équations du problème.

En l'absence de la marée, on peut admettre que se trouve réalisé un état d'équilibre, la surface libre de l'eau étant un plan horizontal fixe, représenté dans le plan de figure, vertical et perpendiculaire au fond, par sa trace, OA pour l'océan, Ox pour le liquide contenu dans le sol perméable. La distribution des pressions y serait alors de nature hydrostatique, c'est-à-dire

$$p_0 = -\rho_0 g y$$

l'axe des  $y$  étant dirigé suivant la verticale ascendante,  $\rho_0$  masse spécifique moyenne du fluide,  $g$  accélération de la pesanteur.

Mais, conséquence de la marée, le plan d'eau de l'océan subit des oscillations au voisinage de sa position moyenne, ce qui a pour effet de modifier la répartition des pressions le long du fond immergé OB.

Désignant la période de la marée par  $\frac{2\pi}{\sigma}$ , on peut représenter la pression  $p$  au point de OB, d'ordonnée  $y$  par

$$(1) \quad p = p_0(y) + q_1 e^{i\sigma t},$$

$q_1$ , coefficient constant,  $t$  le temps.

On suppose que la dynamique du fluide à l'intérieur du milieu poreux obéit à la loi de Darcy : plus précisément, si  $\vec{m}$  est le flux de masse à l'instant  $t$ ,

au point  $x, y, p(x, y, t)$  la pression on a

$$(2) \quad \frac{\vec{m}}{\rho_0} = - \frac{k}{\mu} \text{grad}(p - p_0)$$

où  $k$  désigne la perméabilité du milieu solide,  $\mu$  la viscosité du fluide.

Il est superflu d'introduire un troisième axe  $Oz$  perpendiculaire au plan de figure, car on se limite dans ce qui suit à l'étude du problème plan, où toutes les grandeurs ne dépendent que des variables  $x, y, t$ .

On notera que le vecteur  $\frac{\vec{m}}{\rho_0}$  a la dimension d'une vitesse; c'est la vitesse fictive  $\vec{v}$  du fluide dans le milieu perméable.

D'autre part, la loi de conservation des masses s'exprime par l'équation

$$(3) \quad \text{div} \vec{m} = - \frac{\partial}{\partial t} (A \rho),$$

où  $A$  est la fraction de volume remplie par le fluide, c'est-à-dire la porosité,  $\rho$  la masse spécifique du fluide. Suivant G. F. Carrier et W. H. Munk [1], on adoptera la loi de compressibilité

$$(4) \quad \rho A = \rho_0 A_0 (1 + \gamma(p - p_0)),$$

où  $\gamma$  est essentiellement  $(\rho_0 c^2)^{-1}$ ,  $c$  vitesse du son dans le fluide.

Des équations (2), (3), (4) on déduit, en posant  $q = p - p_0$ ,

$$(5) \quad \Delta q = \frac{\mu \gamma A_0}{k} \frac{\partial q}{\partial t}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

On voit ainsi que le phénomène est régi par l'équation de la diffusion.

Il convient maintenant d'interpréter les conditions aux limites :

Sur  $OB$ , on a  $q = q_1 e^{i\sigma t}$ ;

Sur la surface libre en milieu poreux, représentée par l'équation  $y = \eta(x, t)$ , on a par l'équation (2)

$$(6) \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{v}}{A_0} = - \frac{k}{\mu A_0} \frac{\partial q}{\partial y}.$$

Sur cette surface libre on a  $p = 0$ ; on peut donc écrire

$$(7) \quad q(x, \eta(x, t), t) = -p_0 = \rho_0 g \eta$$

et combinant (6) et (7), il vient  $\frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial t} = - \frac{k \rho_0 g}{\mu A_0} \frac{\partial q}{\partial y}$ .

On fera ici l'approximation usuelle de la théorie linéaire : admettant que  $q, \eta$  et leurs dérivées sont des quantités de faible amplitude, on négligera leurs produits et, au surplus, on appliquera la condition précédente, non sur la surface libre réelle  $y = \eta(x, t)$ , mais sur le plan  $y = 0$  qui en diffère peu.

On est ainsi conduit à

$$(8) \quad \frac{\partial q}{\partial t}(x, 0, t) = -\frac{k\rho_0 g}{\mu\Lambda_0} \frac{\partial q}{\partial y}(x, 0, t).$$

D'autre part, on se limite dans tout ce qui suit à la réponse périodique du système, de sorte qu'on peut poser

$$q(x, y, t) = \varphi(x, y) e^{i\sigma t},$$

d'où il suit que la fonction  $\varphi(x, y)$  doit être solution de

$$\begin{aligned} \Delta\varphi - \frac{i\mu\gamma\Lambda_0\sigma}{k}\varphi &= 0 \quad \text{dans le secteur } BOx, \\ \varphi &= q_1 \quad \text{sur } OB, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, 0) + i\frac{\mu\Lambda_0\sigma}{\rho_0 kg}\varphi(x, 0) &= 0 \quad (x > 0). \end{aligned}$$

Par le changement d'échelles  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu\Lambda_0\sigma \\ \rho_0 kg \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , on obtient, après retour à la notation  $x, y$ , le système suivant :

$$(9) \quad \Delta\varphi - i\varepsilon\varphi = 0 \quad \text{dans le secteur } BOx,$$

$$(10) \quad \varphi = q_1 \quad \text{sur } OB,$$

$$(11) \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, 0) + i\varphi(x, 0) = 0 \quad (x > 0),$$

avec

$$\varepsilon = \frac{k\gamma\rho_0^2 g^2}{\mu\sigma\Lambda_0} > 0.$$

Le problème dépend des deux paramètres sans dimension  $\varepsilon$  et  $\beta$ .

### III. — Représentation de la solution.

Il importe d'abord de remarquer que la valeur de la constante  $q_1$ , dans la condition aux limites  $\varphi = q_1$  sur  $OB$  est sans importance réelle, puisque le problème posé est linéaire. En fait, la condition portée par  $OB$  est  $\varphi = \text{Cte}$ , cette constante étant non nulle.

Posant <sup>(1)</sup>

$$k = \sqrt{\varepsilon} e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{2}(1+i), \quad k^2 = i\varepsilon,$$

---

<sup>(1)</sup> La lettre  $k$  reçoit ici une signification nouvelle, permanente dans tout ce qui suit; ce changement de notation ne peut prêter à confusion car il ne sera plus question de la perméabilité du solide.

on se propose de rechercher les solutions du problème sous la forme

$$(12) \quad \varphi = \int_C \exp \left\{ \frac{k}{2} \left[ x \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) + iy \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \right] \right\} g(\zeta) d\zeta \\ + \int_\Gamma \exp \left\{ \frac{k}{2} \left[ x \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) - iy \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \right] \right\} h(\zeta) d\zeta,$$

où  $g(\zeta)$ ,  $h(\zeta)$  sont des fonctions analytiques de la variable complexe  $\zeta$ , C et  $\Gamma$  des contours dans le plan de cette variable. Ces éléments, inconnus *a priori*, seront déterminés par la condition que les équations (9), (10), (11) soient vérifiées et quelques conditions additionnelles, ayant trait principalement au comportement de la solution au voisinage de 0 et à l'infini dans le secteur.

Les contours C et  $\Gamma$  sont des courbes joignant les points  $\zeta = 0$ ,  $\zeta = \infty$ . Pour que les intégrales qui définissent  $\varphi$  aient un sens quel que soit le point  $x + iy = r e^{i\omega}$ , dans le secteur  $-\beta \leq \omega \leq 0$ , il apparaît nécessaire que les parties réelles des exposants figurant dans les facteurs exponentiels sous les signes  $\int$ , soient négatives respectivement sur C et sur  $\Gamma$ , au voisinage des points  $\zeta = 0$ ,  $\zeta = \infty$ , quel que soit  $\omega$  avec  $-\beta \leq \omega \leq 0$ .

Plus encore, et ceci apparaîtra très clairement lorsqu'on étudiera le comportement des solutions pour  $r \rightarrow \infty$ , afin que celles-ci demeurent bornées dans ces conditions, il est souhaitable que la propriété citée plus haut demeure valable non seulement à l'approche des points  $\zeta = 0$ ,  $\zeta = \infty$ , mais partout sur C et sur  $\Gamma$ . Examinant d'abord le cas de C on va montrer que cette condition détermine en quelque sorte le contour qu'il convient d'utiliser.

Soient

$$\zeta = i\rho e^{i\theta} \quad (\rho > 0), \quad x + iy = r e^{i\omega} \quad (-\beta \leq \omega \leq 0),$$

on a

$$\frac{k}{2} \left\{ (x + iy)\zeta + (x - iy)\frac{1}{\zeta} \right\} \\ = \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{4} (1 + i) \left[ -r \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right) \sin(\theta + \omega) + ir \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right) \cos(\theta + \omega) \right]$$

et

$$\operatorname{Re} \frac{k}{2} \left\{ (x + iy)\zeta + (x - iy)\frac{1}{\zeta} \right\} = -\frac{r\sqrt{2\varepsilon}}{4} \left[ \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right) \cos(\theta + \omega) + \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right) \sin(\theta + \omega) \right].$$

Il convient d'écrire

$$\left( \rho - \frac{1}{\rho} \right) \cos(\theta + \omega) + \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right) \sin(\theta + \omega) > 0.$$

Le point de coordonnées

$$\zeta = \cos(\theta + \omega), \quad \eta = \sin(\theta + \omega)$$

doit donc appartenir au demi-cercle unité, passant par le point  $(0, 1)$ , dont les extrémités sont portées par le diamètre  $\delta$

$$\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\xi + \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\eta = 0.$$

Quand  $\rho$  varie de  $0$  à  $+\infty$ , la pente de  $\delta$  varie toujours dans le même sens de  $+1$  à  $-1$ , et les extrémités  $m_1$  et  $m_2$  du diamètre porté par  $\delta$  décrivent, chacune dans le sens inverse, un quart de cercle limité aux bissectrices  $\xi = \pm \eta$ , l'un décrit par  $m_1$  dans le demi-plan  $\xi > 0$ , l'autre décrit par  $m_2$  dans le demi-plan  $\xi < 0$ .

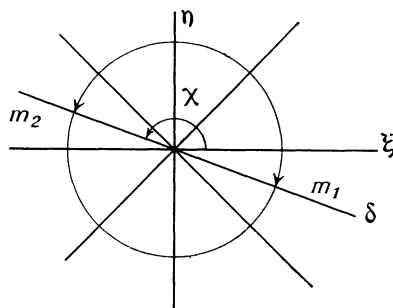


Fig. 2.

Si  $\chi$  désigne l'angle polaire compris entre  $\frac{3\pi}{4}$  et  $\frac{5\pi}{4}$  de  $m_2$  [ $\chi = (O\xi, Om_2)$ ], on voit que la condition précitée sera satisfaite quel que soit  $\omega$ ,  $-\beta \leq \omega \leq 0$  si

$$\chi - \alpha < \theta < \chi \quad (\alpha = \pi - \beta).$$

Si, par exemple,  $\theta = \chi - \frac{\alpha}{2}$ , on peut même ajouter

$$(13) \quad \begin{aligned} & \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) \cos(\theta + \omega) + \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \sin(\theta + \omega) \\ & > \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)^2 + \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2} = \sqrt{2} \cos \frac{\beta}{2} \sqrt{\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}} \end{aligned}$$

pour tout  $\omega : -\beta \leq \omega \leq 0$ .

Soit  $\mathcal{L}$  la courbe décrite par le point  $\zeta = i\rho e^{i\chi}$  ( $\rho > 0$ ), avec

$$\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) \cos \chi + \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \sin \chi = 0, \quad \frac{3\pi}{4} \leq \chi \leq \frac{5\pi}{4}$$

et soit  $\mathcal{L}_{-\alpha}$  celle qui s'en déduit par la rotation de centre origine, d'angle  $-\alpha$ , D désignant le domaine ouvert balayé par  $\mathcal{L}$  durant cette rotation.

On appellera courbe du type  $C_1$  toute courbe joignant les points  $\zeta = 0$ ,  $\zeta = \infty$  et appartenant à D.



Plus précisément, on définira  $C_1$  la courbe  $\mathcal{L}_{-\frac{\alpha}{2}}$  (déduite de  $\mathcal{L}$  par la rotation  $0, -\frac{\alpha}{2}$ ), en tous les points de laquelle est valable l'inégalité (13), c'est-à-dire

$$(14) \quad \operatorname{Re} \frac{k}{2} \left\{ (x + iy) \zeta + (x - iy) \frac{1}{\zeta} \right\} < -r \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sqrt{\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}}, \quad -\beta \leq \omega \leq 0.$$

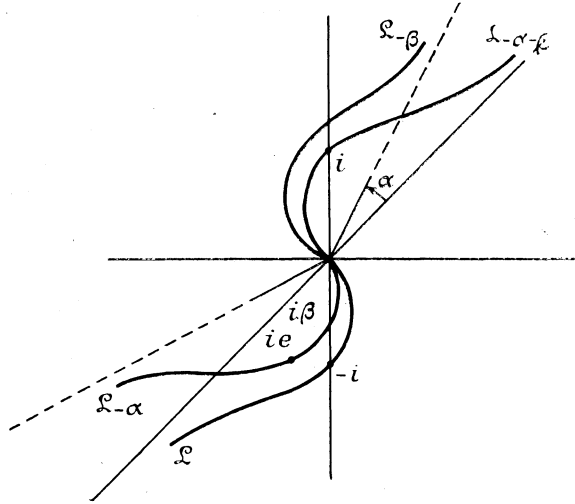


Fig. 3.

Les courbes  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}_{-\alpha}$  passent respectivement par les points  $-i$  et  $ie^{i\beta}$ , et la courbe  $C_1$  rencontre le cercle unité  $\rho = 1$  au point

$$\zeta = i e^{i\theta_1}, \quad \theta_1 = \pi - \frac{\alpha}{2}.$$

Supposons qu'on déforme quelque peu  $C_1$  au voisinage du cercle unité de telle sorte que  $\theta_1$  devienne légèrement inférieur à  $\pi - \frac{\alpha}{2}$ . La courbe ainsi obtenue sera le contour  $C$  utilisé dans la représentation (12).

On pourra définir les contours  $\Gamma_1$  et  $\Gamma$  de façon analogue. Observant que

$$\operatorname{Re} \frac{k}{2} \left\{ (x - iy) \zeta + (x + iy) \frac{1}{\zeta} \right\} = -\frac{r\sqrt{\varepsilon}}{4} \left[ \left( \rho - \frac{1}{\rho} \right) \cos(\theta - \omega) + \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right) \sin(\theta - \omega) \right]$$

et que si  $\zeta = i\rho e^{i\theta}$  appartient à une courbe de type  $C_1$ , on a pour tout  $\omega$  tel que  $-\beta \leq \omega \leq 0$

$$\left( \rho - \frac{1}{\rho} \right) \cos(\theta + \omega) + \left( \rho + \frac{1}{\rho} \right) \sin(\theta + \omega) > 0,$$

on voit que pour  $\zeta' = i\rho e^{i\theta'}$ , avec  $\theta' = \theta - \beta$ , on aura

$$\begin{aligned} & \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) \cos(\theta' - \omega) + \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \sin(\theta' - \omega) \\ &= \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) \cos(\theta + (-\beta - \omega)) + \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) \sin(\theta + (-\beta - \omega)), \end{aligned}$$

le second membre étant positif puisque

$$-\beta \leq -\beta - \omega \leq 0.$$

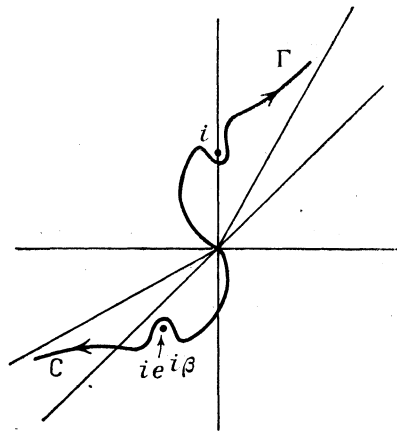


Fig. 4.

Il suffira donc de prendre pour  $\Gamma_1$  une courbe joignant les points  $\zeta = 0$ ,  $\zeta = \infty$ , contenue dans la région  $D_{-\beta}$  déduite de  $D$  par la rotation  $0, -\beta$ .

On définira en réalité et, par commodité,  $\Gamma_1$  et  $\Gamma$  respectivement transformées de  $C_1$  et  $C$  par la rotation  $0, -\beta$ .

On supposera ainsi dans tout ce qui suit que  $C_1$  et  $\Gamma_1$  sont respectivement les courbes  $\mathcal{L}_{-\frac{\alpha}{2}}$  et  $\mathcal{L}_{-\frac{\alpha}{2}-\beta}$ ; elles sont toutes entières l'une dans  $\text{Im}\zeta < 0$ , l'autre dans  $\text{Im}\zeta > 0$ .

Il y a lieu d'observer que, par un tel choix des contours  $C$  et  $\Gamma$ , l'expression (12) définit une fonction  $\varphi$  en tout point du secteur  $BOx$ , sous réserve que les fonctions  $g$  et  $h$  soient d'ordre fini aux points  $\zeta = 0$ ,  $\zeta = \infty$ ; au surplus cette fonction vérifie de toute évidence l'équation (9).

L'étude des conditions aux limites va maintenant permettre de préciser les fonctions  $g(\zeta)$  et  $h(\zeta)$ .

## IV. — Étude des conditions aux limites.

De la représentation (12) on déduit pour  $y = 0, x > 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i\varphi = & i \int_C \exp\left[\frac{k}{2}x\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\right] \cdot \left[\frac{k}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) + 1\right] g(\zeta) d\zeta \\ & - i \int_\Gamma \exp\left[\frac{k}{2}x\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\right] \cdot \left[\frac{k}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) - 1\right] h(\zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

La condition aux limites

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + i\varphi = 0, \quad y = 0, \quad x > 0$$

sera satisfaite si l'on a l'identité

$$\left[\frac{k}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) + 1\right] g(\zeta) = \left[\frac{k}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) - 1\right] h(\zeta)$$

et si, en outre, nulle singularité de la fonction  $m(\zeta)$ , valeur commune des deux membres de la relation qui précède, n'est rencontrée au cours de la rotation  $(0, -\beta)$  qui amène C sur  $\Gamma$  (condition I).

Pour justifier pleinement ce résultat il faut s'assurer que les intégrales de la fonction  $\exp\left[\frac{k}{2}x\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\right] \cdot m(\zeta)$ , prises sur les arcs de cercle

$$iA e^{i\theta}, \quad -\frac{\pi}{4} + \eta < \theta < \frac{3\pi}{4} - \eta \quad \left(\text{avec } 0 < \eta < \frac{\alpha}{2}\right)$$

et

$$ia e^{i\theta}, \quad \frac{\pi}{4} + \eta < \theta < \frac{5\pi}{4} - \eta$$

tendent vers zéro respectivement quand  $A \rightarrow +\infty$  et  $a \rightarrow 0$ . Or ceci résulte très simplement du fait que dans les conditions indiquées on a :

$$\text{Si } A = |\zeta| \rightarrow \infty, \quad \exp\left[\frac{k}{2}x\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\right] \sim \exp\left(\frac{k}{2}x\zeta\right),$$

$$\text{Re}\left(\frac{k}{2}x\zeta\right) = -\frac{\sqrt{2\varepsilon}}{4}xA(\cos\theta + \sin\theta) < -\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}xA\sin\eta < 0;$$

$$\text{Si } a = |\zeta| \rightarrow 0, \quad \exp\left[\frac{k}{2}x\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\right] \sim \exp\left(\frac{k}{2}\frac{x}{\zeta}\right),$$

$$\text{Re}\left(\frac{k}{2}\frac{x}{\zeta}\right) = \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{4}\frac{x}{a}(\cos\theta - \sin\theta) < -\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}\frac{x}{a}\sin\eta < 0.$$

Pour faire l'étude de la deuxième condition aux limites, on déforme C et  $\Gamma$  de façon à revenir aux contours  $C_1$  et  $\Gamma_1$  introduits antérieurement. On fait

l'hypothèse que  $i e^{i\beta}$  est un pôle simple de  $g(\zeta)$ , tandis que  $i$  n'est pas un pôle de  $h(\zeta)$  (condition II).

De la sorte, le passage du contour  $\Gamma$  au contour  $\Gamma_1$  n'introduit pas de modification dans l'expression de  $\varphi$ ; par contre,  $i e^{i\beta}$  étant pôle simple de  $g(\zeta)$ , on aura

$$\varphi = \varphi_1 + \tau \exp[-k(x \sin \beta + y \cos \beta)],$$

avec

$$(15) \quad \varphi_1 = \int_{C_1} \exp\left\{\frac{k}{2}\left[x\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) + iy\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\right]\right\} g(\zeta) d\zeta \\ + \int_{\Gamma_1} \exp\left\{\frac{k}{2}\left[x\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) - iy\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\right]\right\} h(\zeta) d\zeta$$

et

$$\tau = 2\pi i \lim_{\zeta \rightarrow i e^{i\beta}} (\zeta - i e^{i\beta}) g(\zeta) \neq 0.$$

Le terme exponentiel

$$\varphi_0 = \tau \exp[-k(x \sin \beta + y \cos \beta)]$$

prend la valeur constante  $\tau$  sur OB ( $x = r \cos \beta$ ,  $y = -r \sin \beta$ ), et tend vers zéro quand le point  $(x, y)$  s'éloigne à l'infini dans le secteur dans toute direction autre que OB.

On voit ainsi que la condition aux limites  $\varphi = \tau = \text{Cte}$  sur OB sera satisfaite si  $\varphi_1 = 0$  sur OB.

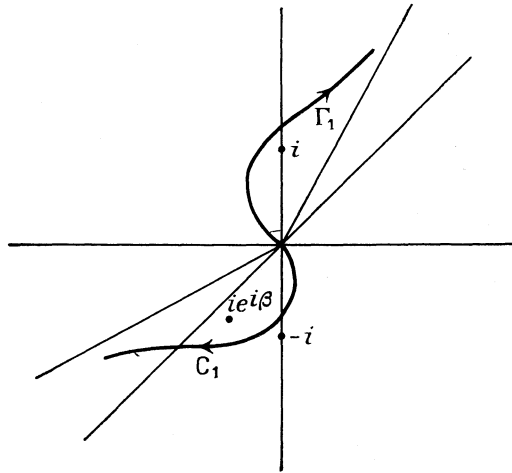


Fig. 5.

Calculons  $\varphi_1$  pour  $x + iy = r e^{-i\beta}$

$$\varphi_1 = \int_{C_1} \exp\left[\frac{k}{2} r \left(\zeta e^{-i\beta} + \frac{1}{\zeta} e^{-i\beta}\right)\right] g(\zeta) d\zeta + \int_{\Gamma_1} \exp\left[\frac{k}{2} r \left(\zeta e^{i\beta} + \frac{1}{\zeta} e^{i\beta}\right)\right] h(\zeta) d\zeta.$$

Faisant les changements de variable  $\zeta e^{-i\beta} = u$  dans la première intégrale,  $\zeta e^{i\beta} = u$  dans la seconde, les contours  $C_1$  et  $\Gamma_1$  s'échangent (puisqu'on a défini  $\Gamma_1$

comme transformé de  $C_1$  par la rotation  $(o, -\beta)$  et l'on a

$$\varphi_1 = \int_{\Gamma_1} \exp\left[\frac{k}{2}r\left(u + \frac{1}{u}\right)\right] \cdot g(u e^{i\beta}) e^{i\beta} du + \int_{C_1} \exp\left[\frac{k}{2}r\left(u + \frac{1}{u}\right)\right] \cdot h(u e^{-i\beta}) e^{-i\beta} du.$$

L'expression de  $\varphi_1$  sera donc nulle sur OB si l'on a l'identité

$$(16) \quad g(\zeta e^{i\beta}) e^{i\beta} = -h(\zeta e^{-i\beta}) e^{-i\beta}$$

et si nulle singularité de  $g(\zeta e^{i\beta})$  n'est rencontrée au cours de la rotation  $(o, -\beta)$  qui amène  $C_1$  sur  $\Gamma_1$  (condition III).

En résumé, les fonctions analytiques  $g(\zeta)$  et  $h(\zeta)$  doivent satisfaire, outre les conditions I, II, III énumérées plus haut aux équations fonctionnelles

$$(17) \quad \left[\frac{k}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) + 1\right] g(\zeta) = \left[\frac{k}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) - 1\right] h(\zeta),$$

$$(18) \quad g(\zeta e^{2i\beta}) e^{2i\beta} = -h(\zeta).$$

#### V. — Un exemple.

Il est intéressant d'éclairer les considérations qui précèdent par l'étude du cas  $\beta = \frac{\pi}{2}$ . Les contours adoptés sont ceux indiqués sur la figure 6.

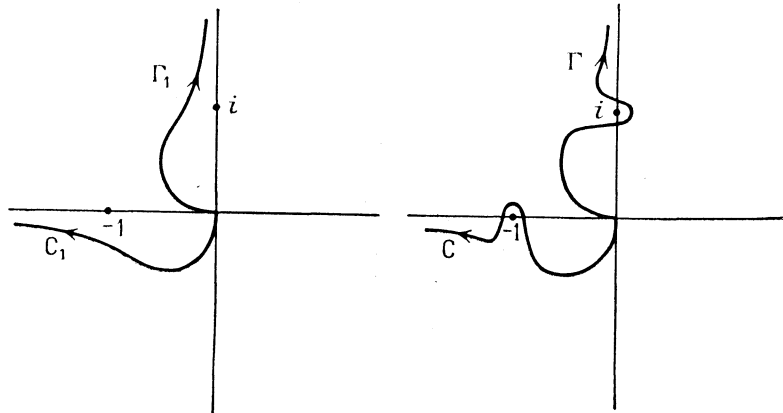


Fig. 6.

On satisfait aux équations (17) et (18) en prenant

$$g(\zeta) = \frac{\zeta}{\left[\frac{k}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) + 1\right](\zeta^2 - 1)}, \quad h(\zeta) = \frac{\zeta}{\left[\frac{k}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) - 1\right](\zeta^2 - 1)}.$$

Les conditions I  $\left[m(\zeta) = \frac{\zeta}{\zeta^2 - 1}\right]$  n'a pas de pôle dans la région comprise entre C

et  $\Gamma$ ] et II [ $i e^{i\beta} = -1$  est pôle de  $g(\zeta)$ ,  $h(\zeta)$  est régulière en  $i$ ] sont satisfaites.

D'autre part, on s'assure aisément que les pôles de  $g(i\zeta)$  sont outre  $\pm i$ , les zéros de  $\zeta^2 - \frac{2i\zeta}{k} + 1$ , tous deux contenus dans le demi-plan  $\text{Re}\zeta > 0$ . Aucun d'eux n'est donc rencontré au cours de la rotation  $0, -\frac{\pi}{2}$  qui amène  $C_1$  sur  $\Gamma_1$  : c'est la condition III.

Il convient d'ajouter une remarque concernant le contour C au voisinage de  $-1$ . Il faut, en effet, pour être sûr de la validité de la formule (15), qu'au cours de la déformation qui amène C sur  $C_1$ ,  $-1$  soit le seul pôle de  $g(\zeta)$  franchi; puisque  $-1$  n'est pas zéro de  $\frac{k}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) + 1$ , on pourra toujours faire en sorte qu'il en soit ainsi.

On observera que les fonctions  $g(\zeta)$  et  $h(\zeta)$  sont intégrables sur C et sur  $\Gamma$ . Il en résulte que la fonction  $\varphi$  est bornée au voisinage de 0, et il peut être montré que  $\varphi \rightarrow \tau$  quand  $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$ , le point  $x, y$  demeurant dans le secteur. Cette propriété, ainsi que l'étude à l'infini seront précisées plus loin dans le cas général.

VI. — Calcul des fonctions  $g(\zeta)$  et  $h(\zeta)$  dans le cas général.

On peut encore écrire le système (17), (18) sous la forme équivalente

$$h(\zeta) = -e^{2i\beta} g(\zeta e^{2i\beta}),$$

$$\left[ \frac{k}{2} \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) + 1 \right] g(\zeta) = -e^{2i\beta} \left[ \frac{k}{2} \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) - 1 \right] g(\zeta e^{2i\beta}).$$

Il apparaîtra que les fonctions  $g(\zeta)$  et  $h(\zeta)$  sont des fonctions multiformes définies sur la surface de Riemann associée à la fonction logarithmique.

Les contours C et  $\Gamma$  discutés plus haut appartiennent au feuillet 0 formé du plan complexe muni d'une coupure suivant le demi-axe positif  $O\xi$ ; on notera  $+1, +2, \dots$  les feuillets sur lesquels on passe par des rotations positives, par  $-1, -2, \dots$  ceux sur lesquels on passe par des rotations négatives.

En fait, la partie utile de la surface sur laquelle seront définies  $g(\zeta)$  et  $h(\zeta)$  sera le feuillet 0, qu'on peut encore définir par la condition :  $0 < \text{Arg}\zeta < 2\pi$ .

Posons maintenant :

$$(19) \quad g(\zeta) = \zeta^{\frac{\pi}{2\beta} - 1} g^*(\zeta)$$

(la fonction  $\zeta^{\frac{\pi}{2\beta} - 1}$  est bien définie par les conventions qui précèdent).

Il vient

$$\frac{g^*(\zeta e^{2i\beta})}{g^*(\zeta)} = \frac{\frac{k}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) + 1}{\frac{k}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) - 1} = \frac{(\zeta - \lambda)(\zeta - \mu)}{(\zeta + \lambda)(\zeta + \mu)},$$

$\lambda, \mu$  désignant les racines de

$$\zeta^2 + \frac{2}{k}\zeta - 1 = 0.$$

Introduisant

$$(20) \quad G(\zeta) = g^*(\zeta) \frac{(\zeta - \lambda)(\zeta - \mu)}{\zeta^2},$$

on obtient l'équation fonctionnelle

$$(21) \quad \frac{G(\zeta e^{2i\beta})}{G(\zeta)} = \frac{\zeta - \lambda e^{-2i\beta}}{\zeta + \lambda} \frac{\zeta - \mu e^{-2i\beta}}{\zeta + \mu}.$$

On peut résoudre cette équation en faisant appel à des résultats antérieurs; on a, en effet, rencontré dans l'étude de certains problèmes d'ondes liquides de gravité ([2], [3]) l'équation fonctionnelle

$$(22) \quad \frac{f(\zeta e^{2i\beta})}{f(\zeta)} = \frac{\zeta + i e^{-2i\beta}}{\zeta - i} \quad (0 < \beta < \pi),$$

dont on a défini une solution de la manière suivante :  $f(\zeta)$  est une fonction multiforme définie sur la surface de Riemann associée à la fonction logarithmique.

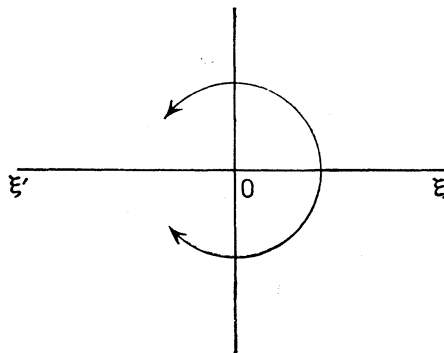


Fig. 7.

Posant

$$l(\rho) = \frac{1}{2} \log \left\{ \frac{\rho^{\frac{\pi}{\beta}}}{\rho^{\frac{\pi}{\beta}} - 1} \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2} \right\}$$

et  $f_+(\zeta), (f_-(\zeta))$  égal à

$$\exp \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_{i\infty}^{-i\infty} \frac{l(|z|)}{z - \zeta} dz \right\};$$

si  $\text{Re } \zeta > 0$ , ( $\text{Re } \zeta < 0$ ), on a

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(\zeta) = f_+(\zeta) \quad \text{dans} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \text{Arg } \zeta \leq \frac{\pi}{2}, \\ f(\zeta) = \frac{e^{-i\frac{\pi^2}{2\beta}\zeta^\beta}}{e^{-i\frac{\pi^2}{2\beta}\zeta^\beta} - 1} \frac{\zeta^2 + 1}{\zeta^2} f_-(\zeta), \quad \frac{\pi}{2} \leq \text{Arg } \zeta \leq \frac{3\pi}{2}, \\ f(\zeta) = \frac{e^{i\frac{\pi^2}{2\beta}\zeta^\beta}}{e^{i\frac{\pi^2}{2\beta}\zeta^\beta} - 1} \frac{\zeta^2 + 1}{\zeta^2} f_-(\zeta), \quad -\frac{3\pi}{2} \leq \text{Arg } \zeta \leq -\frac{\pi}{2}. \end{array} \right.$$

Le prolongement analytique pour des valeurs de  $\text{Arg } \zeta$  non comprises dans l'intervalle  $-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$  s'effectue grâce à l'équation fonctionnelle (22).

Ajoutons que

$$f(\zeta) \rightarrow 1 \quad \text{quand } \zeta \rightarrow \infty, \quad f(\zeta) \sim \zeta^{\frac{\pi}{2\beta} - 1} \quad \text{quand } \zeta \rightarrow 0,$$

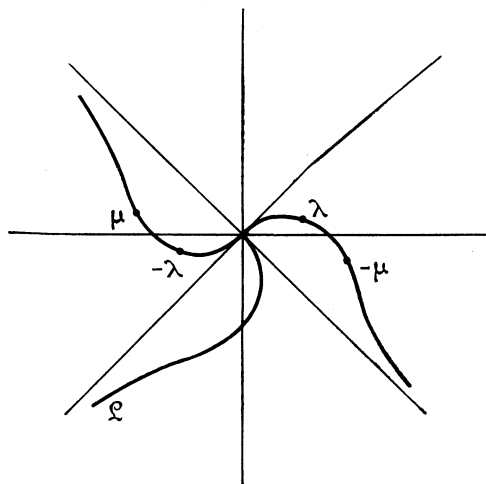


Fig. 8.

uniformément par rapport à  $\text{Arg } \zeta$  dans tout intervalle fini.

Les singularités de la fonction  $f(\zeta)$  sont des pôles simples définis par  $e^{i(\frac{\pi}{2} + 2q\beta)}$  et  $e^{-i(\frac{\pi}{2} + 2q\beta)}$ ,  $q$  entier positif non nul. Enfin il convient de signaler que dans l'intervalle

$$-\frac{3\pi}{2} \leq \text{Arg } \zeta \leq \frac{3\pi}{2}$$

les seuls zéros sont  $e^{\frac{3i\pi}{2}}$  et  $e^{-\frac{3i\pi}{2}}$ . Dans tout ce qui va suivre la notation  $f(\zeta)$  désignera la fonction définie par les formules (23).



On peut écrire

$$\lambda = |\lambda| e^{i\gamma}, \quad \mu = |\mu| e^{i(\pi-\gamma)}, \quad \text{avec } 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}, \quad |\lambda| < |\mu|$$

et il est intéressant d'observer, ce que montre un calcul facile, que les points d'affixe  $\lambda$  et  $\mu$  appartiennent respectivement aux courbes  $\mathcal{L}^2_{-\frac{3\pi}{2}}$  et  $\mathcal{L}^2_{-\frac{\pi}{2}}$ .

Soit

$$f_1(\zeta) = f\left(\frac{\zeta e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)}}{|\lambda|}\right)$$

(l'argument de  $\frac{\zeta e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)}}{|\lambda|}$  étant défini de manière naturelle, c'est-à-dire  $\text{Arg} \zeta - \frac{\pi}{2} - \gamma$ ).

Il est aisé de vérifier que

$$\frac{f_1(\zeta e^{2i\beta})}{f_1(\zeta)} = \frac{\zeta - \lambda e^{-2i\beta}}{\zeta + \lambda}.$$

En définissant :

$$f_2(\zeta) = f\left(\frac{\zeta e^{-i\left(\frac{3\pi}{2}-\gamma\right)}}{|\mu|}\right),$$

on aura, de façon analogue,

$$\frac{f_2(\zeta e^{2i\beta})}{f_2(\zeta)} = \frac{\zeta - \mu e^{-2i\beta}}{\zeta + \mu}.$$

On trouvera donc une solution particulière de l'équation (21) en posant

$$G^*(\zeta) = f_1(\zeta) f_2(\zeta)$$

et l'on voit bien qu'il y a intérêt à placer la coupure suivant le demi-axe  $O\xi$ , le feuillet 0 se trouvant alors défini comme il a été dit au début de cette section par

$$0 < \text{Arg} \zeta < 2\pi.$$

Les singularités de la fonction  $G^*(\zeta)$  sont des pôles simples, pôles de  $f_1(\zeta)$  et  $f_2(\zeta)$ . Ils sont définis par les formules

$$|\zeta| = |\lambda| \begin{cases} \text{Arg} \zeta - \frac{\pi}{2} - \gamma & = \frac{\pi}{2} + 2q\beta, & \text{Arg} \zeta = \gamma + \pi + 2q\beta, \\ & = -\frac{\pi}{2} - 2q\beta, & \text{Arg} \zeta = \gamma - 2q\beta, \end{cases}$$

$$|\zeta| = |\mu| \begin{cases} \text{Arg} \zeta - \frac{\pi}{2} - (\pi - \gamma) & = \frac{\pi}{2} + 2q\beta, & \text{Arg} \zeta = 2\pi - \gamma + 2q\beta, \\ & = -\frac{\pi}{2} - 2q\beta, & \text{Arg} \zeta = \pi - \gamma - 2q\beta, \end{cases}$$

$q$  entier positif non nul.

Notons aussi, ce qui sera utile plus loin, que  $|\lambda| e^{i(\gamma+2\pi)}$  et  $|\mu| e^{i(3\pi-\gamma)}$  sont zéros de la fonction  $G^*(\zeta)$ ; mais cette même fonction  $G^*(\zeta)$  n'a pas de zéro sur le feuillet 0. D'autre part, pour satisfaire à la condition II,  $e^{i(\frac{\pi}{2}+\beta)}$  doit être pôle de  $g(\zeta)$ , c'est-à-dire de  $G(\zeta)$ . On est ainsi conduit à définir

$$G(\zeta) = \frac{G^*(\zeta)}{\zeta^{\frac{\pi}{2}} + e^{i\frac{\pi}{2}\beta}} = \frac{f_1(\zeta)f_2(\zeta)}{\zeta^{\frac{\pi}{2}} + e^{i\frac{\pi}{2}\beta}}$$

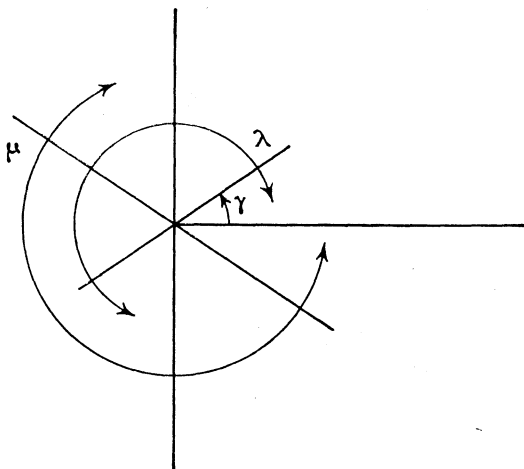


Fig. 9.

qui vérifie bien l'équation (21).

On obtiendra  $g(\zeta)$  par les formules (19) et (20), c'est-à-dire

$$(24) \quad g(\zeta) = \zeta^{\frac{\pi}{2}\beta+1} \frac{G(\zeta)}{(\zeta-\lambda)(\zeta-\mu)} = \zeta^{\frac{\pi}{2}\beta+1} \frac{f_1(\zeta)f_2(\zeta)}{\left(\zeta^{\frac{\pi}{2}} + e^{i\frac{\pi}{2}\beta}\right)(\zeta-\lambda)(\zeta-\mu)}$$

Les pôles de la fonction  $G(\zeta)$  comprennent, outre les pôles déjà recensés de  $G^*(\zeta)$ , les points  $e^{i(\frac{\pi}{2}+\beta\pm 2q\beta)}$  ( $q \geq 0$  entier). Pour obtenir ceux de  $g(\zeta)$ , il convient d'ajouter à cette liste  $|\lambda| e^{i\gamma}$  et  $|\mu| e^{i(\pi-\gamma)}$ ; par contre, il est bon d'observer pour la suite que  $|\lambda| e^{i(\gamma+2\pi)}$  et  $|\mu| e^{i(\pi-\gamma+2\pi)}$  ne sont pas pôles de  $g(\zeta)$ , malgré la présence du dénominateur  $(\zeta-\lambda)(\zeta-\mu)$  dans (24), puisqu'il a été reconnu plus haut que ces valeurs étaient zéros de  $G^*(\zeta)$  et  $G(\zeta)$ .

Nous allons maintenant vérifier que les conditions I, II, III sont satisfaites.

*Condition I.* — On a

$$\left[ \frac{k}{2} \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) + 1 \right] g(\zeta) = \frac{k}{2} \zeta^{\frac{\pi}{2}\beta} G(\zeta).$$

Or on a vu que  $G(\zeta)$  n'a pas de pôle sur la partie du feuillet 0 balayé par le

contour  $C$  au cours de la rotation  $(0, -\beta)$ , puisque le point  $e^{i(\frac{\pi}{2}+\beta)}$  n'y appartient pas et est, d'ailleurs, le seul pôle de  $G(\zeta)$  contenu dans le feuillet  $0$ .

*Condition II.* — Il est bien clair que  $e^{i(\frac{\pi}{2}+\beta)}$  est pôle simple de  $g(\zeta)$ ; par contre,  $e^{i\frac{\pi}{2}}$  n'est pas un pôle de  $g(\zeta)$ , pas plus que de  $h(\zeta)$  comme on le voit par la formule (17).

*Condition III.* — Il s'agit de montrer que  $g(\zeta e^{i\beta})$  n'a pas de pôle dans la partie  $S$  du feuillet  $0$  balayé par le contour  $C_1$  au cours de la rotation  $0, -\beta$ .

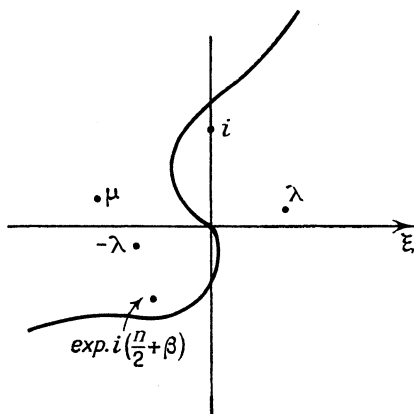


Fig. 10.

Il est d'abord tout à fait clair que lorsque  $\zeta \in S$ , il n'est pas possible que  $\zeta e^{i\beta} = e^{i[(\frac{\pi}{2}+\beta) \pm 2q\beta]}$ ,  $q$  entier.

Peut-être pourrait-il advenir que

$$\zeta e^{i\beta} = |\mu| e^{i(\pi-\gamma)} \quad \text{ou} \quad \zeta e^{i\beta} = |\lambda| e^{i(\gamma+\pi+2\beta)}.$$

Soient  $|\mu| e^{i\theta_1}$ ,  $|\mu| e^{i\theta_2}$  les points de  $\Gamma_1$  et  $C_1$  sur le cercle  $0, |\mu|$ .

On a

$$\theta_2 = \theta_1 + \beta \quad \text{et} \quad \theta_2 > \pi - \gamma.$$

Il est donc impossible de trouver  $\theta$  tel que

$$\theta_1 < \theta < \theta_2 \quad \text{et} \quad \theta + \beta = \pi - \gamma.$$

Un argument analogue peut être développé pour établir que la seconde éventualité est impossible. Il convient d'ajouter pour légitimer les calculs antérieurs, en particulier la formule (15), que le contour  $C$  doit être choisi de manière à ne pas franchir le point d'affixe  $\mu$ , pôle de  $g(\zeta)$ , au cours de la déformation qui l'amène sur  $C_1$ . Bien entendu cette condition pourra toujours être satisfaite puisque  $i e^{i\beta} \neq \mu$ .

En définitive, on peut conclure en affirmant que les conditions I, II, III sont satisfaites, de telle sorte que la formule (24) fournit une solution convenable du problème. Dans tout ce qui suit, la notation  $g(\zeta)$  désignera la fonction définie par la formule (24) et  $h(\zeta)$  celle qui lui est associée par la formule (17).

VII. — Étude de la solution au voisinage de l'origine et à l'infini.  
Un théorème d'unicité.

Commençons par l'étude de la solution  $\varphi$  au voisinage de O. On utilisera la représentation

$$(25) \quad \varphi = \varphi_1 + \tau \exp \{ -k(x \sin \beta + y \cos \beta) \}.$$

D'après la formule (24) on peut écrire

$$\begin{aligned} |g(\zeta)| &\sim |\zeta|^{\frac{3\pi}{2\beta}-1} & \text{si } |\zeta| \rightarrow 0, \\ |g(\zeta)| &\sim |\zeta|^{-\frac{\pi}{2\beta}-1} & \text{si } |\zeta| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Il en résulte que les intégrales

$$\int_{c_1} g(\zeta) d\zeta, \quad \int_{\Gamma_1} h(\zeta) d\zeta$$

existent et que, lorsque le point  $(x, y) \rightarrow 0$ , en demeurant dans le secteur  $BOx$ ,

$$\varphi_1 \rightarrow \int_{c_1} g(\zeta) d\zeta + \int_{\Gamma_1} h(\zeta) d\zeta.$$

La somme de ces intégrales est nulle, ce qu'on voit en utilisant la relation fonctionnelle (18) et le procédé qui a permis d'interpréter la deuxième condition aux limites.

Ainsi  $\varphi_1 \rightarrow 0$  et  $\varphi \rightarrow \tau$  quand  $(x, y) \rightarrow 0$ .

Il est intéressant pour ce qui va suivre de connaître le comportement des dérivées partielles du 1<sup>er</sup> ordre  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}$  au voisinage de O.

Il sera suffisant de montrer que ces dérivées ont au point O une singularité d'ordre au plus  $\frac{1}{r^{1-\frac{\pi}{2\beta}}}$  ( $\frac{\pi}{2\beta} < 1$ ).

Partant de la représentation (25), on voit qu'il suffit d'étudier  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}$ ; mais  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$ , par exemple, s'obtient à partir de la formule qui définit  $\varphi_1$  en remplaçant  $g(\zeta), h(\zeta)$  respectivement par

$$\frac{k}{2} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) g(\zeta), \quad \frac{k}{2} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) h(\zeta).$$

Or

$$\left| \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) g(\zeta) \right| \sim |\zeta|^{\frac{3\pi}{2\beta} - 2} \quad \text{si } |\zeta| \rightarrow 0 \quad \left( \frac{3\pi}{2\beta} - 2 > -\frac{1}{2} \right),$$

tandis que

$$\left| \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) g(\zeta) \right| \sim |\zeta|^{-\frac{\pi}{2\beta}} \quad \text{si } |\zeta| \rightarrow \infty \quad \left( \frac{\pi}{2\beta} \leq 1 \right).$$

La fonction  $\left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) g(\zeta)$  intégrable sur  $C_1$  au voisinage de 0 ne l'est pas sur la branche infinie, et une conclusion analogue vaut pour  $\left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) h(\zeta)$ .

En utilisant l'estimation fournie par la formule (14) on voit que la partie de l'intégrale prise sur  $C_1$  susceptible de devenir infinie quand  $(x, y) \rightarrow 0$  est en module inférieure à quelque expression du type

$$\int_{C'_1} \exp \left[ -r \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sqrt{\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}} \right] \frac{|d\zeta|}{\rho^{2\beta}} \quad (|\zeta| = \rho),$$

$C'_1$  désignant la partie de  $C_1$  extérieure à un cercle de centre 0, de rayon B. On peut montrer que, sur  $\mathcal{L}_{-\frac{\alpha}{2}}$ ,  $|d\zeta| < \sqrt{2} d\rho$ ; il s'ensuit qu'on est simplement conduit à discuter

$$\int_B^{+\infty} e^{-cr\rho} \frac{d\rho}{\rho^{2\beta}}, \quad \text{avec } c = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \cos \frac{\beta}{2},$$

quantité d'ordre  $\frac{1}{r^{1-\frac{\pi}{2\beta}}}$  quand  $r \rightarrow 0$ .

Dans le cas  $\beta = \frac{\pi}{2}$  on obtiendrait une singularité logarithmique. On estimera de façon analogue l'intégrale prise sur  $\Gamma_1$  et de là il suit que  $r^{1-\frac{\pi}{2\beta}} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$  est borné, ainsi d'ailleurs que  $r^{1-\frac{\pi}{2\beta}} \frac{\partial \varphi}{\partial y}$  au voisinage de  $r = 0$ .

Si l'on désigne par  $\mathcal{C}(r)$  l'arc de cercle décrit par le point  $r e^{i\omega}$ ,  $-\beta \leq \omega \leq 0$ , on déduit des résultats précédents

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\mathcal{C}(r)} \left| \frac{d\varphi}{dr} \right| ds = 0.$$

Discutons maintenant le comportement de  $\varphi$  pour  $r \rightarrow \infty$ . Se servant encore de l'estimation (14), on voit que  $\varphi_1$  et ses dérivées partielles peuvent être majorées en module par des expressions du type

$$\int_0^{+\infty} e^{-cr} \sqrt{\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}} \left( \rho^p + \frac{1}{\rho^{p'}} \right) d\rho \quad (p, p', \text{ entiers positifs}).$$

Il est aisé de montrer que cette intégrale tend vers zéro quand  $r \rightarrow \infty$ , au moins comme  $e^{-c'r}$ , avec  $c' = c\sqrt{2}$ . Il s'ensuit :

$$(26) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}(r)} \left| \frac{d\varphi_1}{dr} \right| ds = 0.$$

Le comportement du terme  $\varphi_0 = \tau \exp[-k(x \sin \beta + y \cos \beta)]$  à l'infini dans le secteur est banal,

$$\varphi_0 \rightarrow 0 \quad \text{si } r \rightarrow \infty, \quad \omega \neq -\beta$$

et

$$\varphi_0 = \tau \quad \text{pour } \omega = -\beta.$$

On pourra aisément montrer que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}(r)} \left| \frac{d\varphi_0}{dr} \right| ds = 0.$$

Compte tenu de (26) on a donc

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}(r)} \left| \frac{d\varphi}{dr} \right| ds = 0.$$

On peut maintenant énoncer et démontrer le théorème d'unicité suivant :

*Le problème aux limites*

$$\Delta\varphi - i\varepsilon\varphi = 0 \quad \text{dans le secteur } BOx,$$

$$\varphi = \tau \quad \text{sur } OB,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} + i\varphi = 0 \quad \text{sur } Ox,$$

$\varphi$  borné dans le secteur

$$\int_{\mathcal{C}(r)} \left| \frac{d\varphi}{dr} \right| ds \rightarrow 0 \quad \text{si } r \rightarrow 0 \quad \text{et } r \rightarrow \infty$$

a une solution unique.

Il suffit de montrer, puisqu'il s'agit d'un problème linéaire, que pour  $\tau = 0$ , il n'existe pas d'autre solution que  $\varphi = 0$ . Soit  $\varphi = \Phi_1 + i\Phi_2$ ,  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  à valeurs réelles. On a

$$\Delta\Phi_1 = -\varepsilon\Phi_2, \quad \Delta\Phi_2 = \varepsilon\Phi_1,$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial y} - \Phi_2 = 0, \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial y} + \Phi_1 = 0 \quad \text{sur } Ox,$$

$$\Phi_1 = \Phi_2 = 0 \quad \text{sur } OB.$$

Calculant l'intégrale double de  $\Phi_1 \Delta\Phi_2 - \Phi_2 \Delta\Phi_1$  dans la partie  $\mathcal{C}_r^R$  du secteur

comprise entre les arcs  $\mathcal{C}(r)$  et  $\mathcal{C}(R)$  ( $r < R$ ) et utilisant la formule de Green on obtient

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathcal{C}_r^R} (\Phi_1 \Delta \Phi_2 - \Phi_2 \Delta \Phi_1) dx dy \\ &= \int_{\mathcal{C}(R)} \left( \Phi_1 \frac{d\Phi_2}{dr} - \Phi_2 \frac{d\Phi_1}{dr} \right) ds - \int_{\mathcal{C}(r)} \left( \Phi_1 \frac{d\Phi_2}{dr} - \Phi_2 \frac{d\Phi_1}{dr} \right) ds \\ & \quad + \int_r^R \left( \Phi_1 \frac{d\Phi_2}{dy} - \Phi_2 \frac{d\Phi_1}{dy} \right) dx \end{aligned}$$

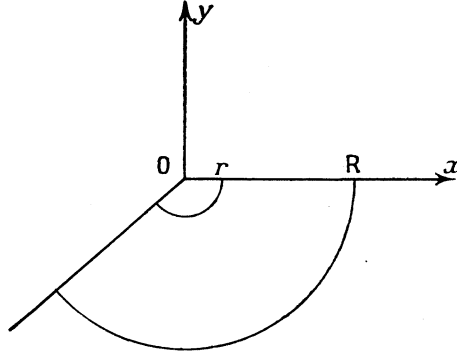


Fig. 11.

ou encore

$$\varepsilon \iint_{\mathcal{C}_r^R} (\Phi_1^2 + \Phi_2^2) dx dy + \int_r^R (\Phi_1^2 + \Phi_2^2) dx = \int_{\mathcal{C}(R) - \mathcal{C}(r)} \left( \Phi_1 \frac{d\Phi_2}{dr} - \Phi_2 \frac{d\Phi_1}{dr} \right) ds.$$

Le second membre tend vers zéro quand  $r \rightarrow 0$ ,  $R \rightarrow \infty$ , de sorte que

$$\varepsilon \iint_{\text{BO}x} (\Phi_1^2 + \Phi_2^2) dx dy + \int_0^{+\infty} (\Phi_1^2 + \Phi_2^2) dx = 0$$

et puisque  $\varepsilon > 0$  on en déduit

$$\Phi_1 = \Phi_2 = 0.$$

#### VIII. — Retour sur le calcul des fonctions $g(\zeta)$ , $h(\zeta)$ . Nouvelles relations fonctionnelles.

Dans cette section nous allons établir de nouvelles relations fonctionnelles qui seront utiles pour la discussion des solutions singulières du problème aux limites.

Introduisons la notation

$$\mathcal{G}(\zeta) = \frac{\zeta^2}{(\zeta - \lambda)(\zeta - \mu)} G^*(\zeta) = \frac{\zeta^2}{(\zeta - \lambda)(\zeta - \mu)} f_1(\zeta) f_2(\zeta)$$

de telle sorte que

$$g(\zeta) = \frac{\zeta^{\frac{\pi}{2\beta}-1}}{\pi} \frac{\mathcal{G}(\zeta)}{\zeta^\beta + e^{i\frac{\pi}{2\beta}}}$$

La fonction  $\mathcal{G}(\zeta)$  est solution de l'équation fonctionnelle

$$\frac{\mathcal{G}(\zeta e^{2i\beta})}{\mathcal{G}(\zeta)} = \frac{\frac{k}{2} \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) + 1}{\frac{k}{2} \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) - 1}$$

Remplaçant  $\zeta$  par  $\frac{1}{\zeta}$ , et prenant les inverses des deux membres on s'aperçoit que  $\mathcal{G}\left(\frac{e^{2i\beta}}{\zeta}\right)$  en est aussi une solution; pour la définir proprement on conviendra que

$$\text{Arg}\left(\frac{e^{2i\beta}}{\zeta}\right) = 2\pi - \text{Arg}\zeta + 2\beta.$$

Cela revient à définir  $\text{Arg}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = 2\pi - \text{Arg}\zeta$ , de sorte que lorsque  $\zeta$  décrit le feuillet  $\mathcal{O}$ , le point  $\frac{1}{\zeta}$  décrit le même feuillet, convention qui sera utile plus loin.

Supposons maintenant que le point  $\zeta$  décrive le secteur  $\mathcal{S}$

$$0 \leq \text{Arg}\zeta \leq 2\beta;$$

le point  $\frac{e^{2i\beta}}{\zeta}$  décrit alors le secteur

$$2\pi \leq \text{Arg}\left(\frac{e^{2i\beta}}{\zeta}\right) \leq 2\pi + 2\beta.$$

La fonction

$$\frac{\zeta^{\frac{\pi}{2\beta}} \mathcal{G}\left(\frac{e^{2i\beta}}{\zeta}\right)}{\mathcal{G}(\zeta)} = K(\zeta)$$

est analytique dans  $\mathcal{S}$  et satisfait à l'équation

$$K(re^{2i\beta}) = K(r) \quad (r \text{ réel } > 0, \text{ d'argument nul}).$$

Au surplus,  $\mathcal{G}(\zeta)$  n'a pas de zéro dans  $\mathcal{S}$ , ses seuls pôles y étant  $\lambda$  et  $\mu$ ; de même,  $\mathcal{G}\left(\frac{e^{2i\beta}}{\zeta}\right)$  n'a pas de zéro dans  $\mathcal{S}$ , ses seuls pôles étant définis par

$$\frac{e^{2i\beta}}{\zeta} = \mu e^{i(\pi+2\beta)} \rightarrow 2\beta + 2\pi - \text{Arg}\zeta = \pi - \gamma + \pi + 2\beta \quad \text{et} \quad |\zeta| = \frac{1}{|\mu|} = |\lambda|,$$

d'où

$$\zeta = |\lambda| e^{i\gamma} = \lambda$$

et

$$\frac{e^{2i\beta}}{\zeta} = \lambda e^{i(\pi+2\beta)}, \quad \text{d'où} \quad \zeta = |\mu| e^{i(\pi-\gamma)} = \mu.$$



C'est le lieu de rappeler que  $|\lambda| e^{i(\gamma+2\pi)}$  et  $|\mu| e^{i(3\pi-\gamma)}$  étant des zéros de  $G^*(\zeta)$ , ces points n'apparaissent ni comme zéro ni comme pôle de  $\mathcal{G}(\zeta)$  dans

$$2\pi \leq \text{Arg} \zeta' \leq 2\pi + 2\beta,$$

comme on le voit par la formule de définition de  $\mathcal{G}(\zeta)$ .

Il résulte des considérations qui précèdent que la fonction  $K(\zeta)$  est holomorphe dans  $\mathfrak{S}$ , et d'après des résultats antérieurs, on peut ajouter que  $|K(\zeta)| \rightarrow 1$ , quand  $\zeta \rightarrow 0$  ou  $\zeta \rightarrow \infty$ , uniformément par rapport à  $\text{Arg} \zeta$ ,  $0 \leq \text{Arg} \zeta \leq 2\beta$ .

On déduira de ces faits, par un raisonnement classique qu'il paraît superflu de reproduire

$$\zeta^{\frac{\pi}{\beta}} \mathcal{G}\left(\frac{e^{2i\beta}}{\zeta}\right) = a \mathcal{G}(\zeta),$$

où  $a$  est un coefficient constant de module 1. Pour en préciser la valeur, il suffit d'ailleurs d'examiner ce qui se passe lorsque  $\zeta = r$  tend vers zéro ( $\text{Arg} \zeta = 0$ ).

On a

$$\zeta^{\frac{\pi}{\beta}} \mathcal{G}\left(\frac{e^{2i\beta}}{\zeta}\right) \sim r^{\frac{\pi}{\beta}},$$

$$\mathcal{G}(\zeta) \sim \frac{\zeta^2}{\lambda\mu} f_1(\zeta) f_2(\zeta) \sim -r^2 \left( \frac{r e^{-i(\frac{\pi}{2}+\gamma)}}{|\lambda|} \right)^{\frac{\pi}{2\beta}-1} \left( \frac{r e^{-i(\frac{3\pi}{2}-\gamma)}}{|\mu|} \right)^{\frac{\pi}{2\beta}-1}$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{G}(\zeta) \sim -e^{-i\frac{\pi^2}{\beta}} r^{\frac{\pi}{\beta}}$$

et, par conséquent,  $a = -e^{i\frac{\pi^2}{\beta}}$ , d'où l'équation fonctionnelle

$$(27) \quad \zeta^{\frac{\pi}{\beta}} \mathcal{G}\left(\frac{e^{2i\beta}}{\zeta}\right) = -e^{i\frac{\pi^2}{\beta}} \mathcal{G}(\zeta).$$

Cette équation qu'on vient d'établir pour  $0 \leq \text{Arg} \zeta \leq 2\beta$  est, bien entendu, valable pour toute valeur de  $\zeta$  en raison des propriétés du prolongement analytique.

Posons maintenant

$$(28) \quad \mathcal{G}^*(\zeta) = \zeta^{\frac{\pi}{2\beta}-1} \mathcal{G}(\zeta),$$

de sorte que

$$g(\zeta) = \frac{\mathcal{G}^*(\zeta)}{\zeta^{\frac{\pi}{2\beta}} + e^{i\frac{\pi^2}{2\beta}}}$$

et définissons de façon analogue la fonction  $\mathcal{H}^*(\zeta)$  par

$$h(\zeta) = \frac{\mathcal{H}^*(\zeta)}{\zeta^{\frac{\pi}{2\beta}} + e^{i\frac{\pi^2}{2\beta}}}.$$

Il est bien clair que, tout comme  $g$  et  $h$ ,  $\mathcal{G}^*$  et  $\mathcal{H}^*$  vérifieront les équations fonctionnelles (17) et (18) et, en particulier,

$$(29) \quad \mathcal{G}^*(\zeta e^{2i\beta}) e^{2i\beta} = -\mathcal{H}^*(\zeta).$$

Cela fait, partant de (28), on peut écrire

$$\mathcal{G}^*\left(\frac{e^{2i\beta}}{\zeta}\right) = \frac{1}{|\zeta|^{\frac{2\pi}{\beta}-1}} e^{i(2\pi - \text{Arg}\zeta + 2\beta)\left(\frac{\pi}{2\beta}-1\right)} \mathcal{G}\left(\frac{e^{2i\beta}}{\zeta}\right)$$

ou

$$(30) \quad \mathcal{G}^*\left(\frac{e^{2i\beta}}{\zeta}\right) = -\frac{e^{i\left(\frac{\pi^2}{\beta}-2\beta\right)}}{\zeta^{\frac{2\pi}{\beta}-1}} \mathcal{G}\left(\frac{e^{2i\beta}}{\zeta}\right)$$

en se rappelant que  $\text{Arg}\left(\frac{e^{2i\beta}}{\zeta}\right) = 2\pi - \text{Arg}\zeta + 2\beta$ .

Utilisant l'équation (27) on pourra écrire encore

$$\mathcal{G}^*\left(\frac{e^{2i\beta}}{\zeta}\right) = \frac{e^{2i\left(\frac{\pi^2}{\beta}-\beta\right)}}{\zeta^{\frac{2\pi}{\beta}-1}} \mathcal{G}(\zeta)$$

ou, par (28),

$$\mathcal{G}^*\left(\frac{e^{2i\beta}}{\zeta}\right) = \frac{e^{2i\left(\frac{\pi^2}{\beta}-\beta\right)}}{\zeta^{\frac{2\pi}{\beta}-2}} \mathcal{G}^*(\zeta).$$

Utilisant enfin (29), on obtient la relation fonctionnelle

$$(31) \quad \frac{1}{\zeta^2} \mathcal{H}^*\left(\frac{1}{\zeta}\right) = -\frac{e^{2i\frac{\pi^2}{\beta}}}{\zeta^{\frac{2\pi}{\beta}}} \mathcal{G}^*(\zeta).$$

Il faut rappeler ici que  $\mathcal{H}^*$  doit être calculé au point  $\frac{1}{\zeta}$  d'argument  $2\pi - \text{Arg}\zeta$ , qui appartient au feuillet 0, s'il en est ainsi de  $\zeta$ .

### IX. — Construction et classification des solutions singulières.

Il est bien clair qu'on obtiendra de nouvelles solutions du problème aux limites posé initialement en prenant

$$(32) \quad \varphi^{(n)}(x, y) = \int_{\Gamma} \exp\left\{\frac{k}{2}\left[x\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) + iy\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\right]\right\} g(\zeta) \zeta^{\frac{\pi}{\beta}} d\zeta \\ + \int_{\Gamma'} \exp\left\{\frac{k}{2}\left[x\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) - iy\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\right]\right\} h(\zeta) \zeta^{\frac{\pi}{\beta}} d\zeta,$$

où  $p$  est un entier positif, négatif ou nul, car les fonctions  $g(\zeta)\zeta^{\frac{p}{\beta}}$ ,  $h(\zeta)\zeta^{\frac{p}{\beta}}$  satisfont aussi bien que  $g(\zeta)$ ,  $h(\zeta)$  à toutes les conditions énumérées plus haut pour qu'il en soit ainsi [la valeur constante de  $\varphi^{(p)}$  sur OB sera égale à  $\tau e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)p\frac{\pi}{2}}$ ].

En vérité les solutions les plus générales offertes par notre procédé de calcul s'obtiendraient en remplaçant dans la représentation précédente  $g(\zeta)\zeta^{\frac{p}{\beta}}$ ,  $h(\zeta)\zeta^{\frac{p}{\beta}}$  respectivement par  $g(\zeta)n(\zeta)$ ,  $h(\zeta)n(\zeta)$ , la fonction  $n(\zeta)$  devant satisfaire aux conditions suivantes :

$$n(\zeta e^{2i\beta}) = n(\zeta),$$

$n(\zeta)$  analytique, sans singularité autre que l'origine ou le point à l'infini, celles-ci étant d'ordre fini. Il est facile de montrer que  $n(\zeta)$  ne peut être qu'une combinaison linéaire finie de puissances  $\zeta^{\frac{p}{\beta}}$ ,  $p$  entier, de sorte que les solutions définies par la formule (32) apparaissent comme les plus générales qu'on peut obtenir par notre méthode de calcul.

Remarquons, d'autre part, que, si  $p > 0$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} g(\zeta)\zeta^{\frac{p}{\beta}} &= \mathcal{G}^*(\zeta) \frac{\zeta^{\frac{p}{\beta}}}{\zeta^{\frac{p}{\beta}} + e^{i\frac{\pi^2}{2\beta}}} \\ &= (-1)^p \frac{e^{i\frac{p}{2}\frac{\pi^2}{\beta}} \mathcal{G}^*(\zeta)}{\zeta^{\frac{p}{\beta}} + e^{i\frac{\pi^2}{2\beta}}} + \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^{p-q-1} e^{i\frac{\pi^2}{2\beta}(p-q-1)} \mathcal{G}^*(\zeta) \zeta^{\frac{q}{\beta}} \end{aligned}$$

et une formule analogue pour  $h(\zeta)\zeta^{\frac{p}{\beta}}$ .

On en déduit la représentation suivante :

$$\varphi^{(p)}(x, y) = (-1)^p e^{i\frac{p}{2}\frac{\pi^2}{\beta}} \varphi(x, y) + \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^{p-q-1} e^{i\frac{\pi^2}{2\beta}(p-q-1)} \psi^{(q)}(x, y),$$

où

$$(33) \quad \begin{aligned} \psi^{(q)}(x, y) &= \int_{C_1} \exp\left\{\frac{k}{2}\left[x\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) + iy\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\right]\right\} \mathcal{G}^*(\zeta) \zeta^{\frac{q}{\beta}} d\zeta \\ &+ \int_{\Gamma_1} \exp\left\{\frac{k}{2}\left[x\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) - iy\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\right]\right\} \mathcal{H}^*(\zeta) \zeta^{\frac{q}{\beta}} d\zeta. \end{aligned}$$

Remarquant que les fonctions  $\mathcal{G}^*(\zeta)$  et  $\mathcal{H}^*(\zeta)$  vérifient les équations fonctionnelles (17) et (18), et que  $\mathcal{G}^*(\zeta)$  n'a pas de pôle en  $ie^{i\beta}$  [ce qui a permis de remplacer dans la formule (33), C et  $\Gamma$  respectivement par  $C_1$  et  $\Gamma_1$ ], on voit

que les fonctions  $\psi^{(q)}(x, y)$  sont solutions du problème aux limites

$$\begin{aligned} \Delta\psi - i\varepsilon\psi &= 0 \quad \text{dans le secteur } BOx, \\ \psi &= 0 \quad \text{sur } OB, \\ \frac{\partial\psi}{\partial y}(x, 0) + i\psi(x, 0) &= 0 \quad (x > 0). \end{aligned}$$

Pour  $p$  entier négatif, on est conduit à des résultats analogues; on introduira les fonctions  $\psi^{(q)}(x, y)$  définies par (33), pour des valeurs entières négatives de  $q$ . On peut ainsi conclure en disant qu'il suffira de discuter ces fonctions  $\psi^{(q)}(x, y)$ ,  $q$  entier de signe quelconque; elles apparaissent en quelque sorte comme les solutions du problème homogène.

Faisons dans la seconde intégrale de la formule (33), le changement de variable  $\zeta \rightarrow \frac{1}{\zeta}$  [en définissant comme plus haut  $\text{Arg}\left(\frac{1}{\zeta}\right) = 2\pi - \text{Arg}\zeta$ ].

Il est facile de s'assurer que les contours  $C_1$  et  $\Gamma_1$  (définis respectivement comme  $\mathcal{L}_{-\frac{\alpha}{2}}$  et  $\mathcal{L}_{-\frac{\alpha}{2}-\beta}$ ) s'échangent par la transformation  $\zeta \rightarrow \frac{1}{\zeta}$ ; plus précisément  $\Gamma_1 \rightarrow -C_1$  et inversement.

Utilisant, en outre, l'équation fonctionnelle (31), on obtiendra

$$\psi^{(q)} = \int_{C_1} \exp\left\{\frac{k}{2}\left[x\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) + iy\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\right]\right\} \mathcal{G}^*(\zeta) \left(\zeta^{\frac{q}{\beta}} - \frac{e^{\frac{2(q+1)\frac{\pi^2}{\beta}i}}}{\zeta^{\frac{(q+2)\frac{\pi}{\beta}}}}\right) d\zeta.$$

De là on déduit immédiatement

$$\psi^{(-1)} = 0,$$

puis

$$\psi^{-(q+2)}(x, y) = -e^{-\frac{2(q+1)\frac{\pi^2}{\beta}i}i} \psi^{(q)}(x, y).$$

Il suffira donc de se borner aux solutions  $\psi^{(q)}$  définies pour des valeurs entières positives ou nulles de  $q$ .

Il peut être utile de signaler ici l'expression qu'on obtient pour  $\varphi$ , lorsqu'on applique la transformation précédente. On trouve ainsi

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \tau \exp\{-k(x \sin \beta + y \cos \beta)\} \\ &+ \int_{C_1} \exp\left\{\frac{k}{2}\left[x\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) + iy\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\right]\right\} \mathcal{G}^*(\zeta) \\ &\times \left[\frac{1}{\zeta^{\frac{\pi}{\beta}} + e^{\frac{i\pi^2}{2\beta}}} - \frac{1}{\zeta^{\frac{\pi}{\beta}} \left(1 + e^{-\frac{3i\pi^2}{2\beta} \frac{\pi}{\zeta^{\frac{\pi}{\beta}}}}\right)}\right] d\zeta, \end{aligned}$$

avec

$$\tau = 2\pi i \lim_{\zeta \rightarrow i e^{i\beta}} (\zeta - i e^{i\beta}) \frac{\mathcal{G}^*(\zeta)}{\zeta^{\frac{\pi}{\beta}} + e^{\frac{i\pi^2}{2\beta}}} = 2\beta e^{i\left(\beta - \frac{\pi^2}{2\beta}\right)} \mathcal{G}^*\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)}\right).$$

Il convient d'étudier maintenant le comportement des solutions  $\psi^{(q)}(q \geq 0)$  définies par (33), à l'infini dans le secteur et au voisinage de l'origine.

L'étude du comportement à l'infini, semblable à celle déjà faite pour la fonction  $\varphi_1$ , avec des conclusions identiques, ne sera pas répétée.

Les fonctions  $\mathcal{G}^*(\zeta)\zeta^{\frac{q}{\beta}}\zeta^{\frac{\pi}{\beta}}$ ,  $\mathcal{H}^*(\zeta)\zeta^{\frac{q}{\beta}}\zeta^{\frac{\pi}{\beta}}$ , figurant dans (33) sont intégrables respectivement sur  $C_1$  et  $\Gamma_1$  au voisinage de  $\zeta = 0$  puisque leurs modules sont équivalents à  $|\zeta|^{\left(\frac{3}{2}+q\right)\frac{\pi}{\beta}-1}$ , quand  $\zeta \rightarrow 0$ .

Il n'en est pas de même sur les branches infinies des contours. De façon plus précise on peut montrer

$$(34) \quad \begin{cases} \mathcal{G}^*(\zeta)\zeta^{\frac{q}{\beta}}\zeta^{\frac{\pi}{\beta}} \\ \mathcal{H}^*(\zeta)\zeta^{\frac{q}{\beta}}\zeta^{\frac{\pi}{\beta}} \end{cases} = \zeta^{(q+\frac{1}{2})\frac{\pi}{\beta}-1} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{\zeta}\right) \right].$$

Ce sont par suite les contributions fournies par les intégrations sur les branches infinies de  $C_1$  et  $\Gamma_1$  qui donneront lieu éventuellement à une singularité à l'origine.

En répétant un raisonnement antérieur on montrera facilement que cette singularité est au plus d'ordre  $\frac{1}{r^{(2q+1)\frac{\pi}{2\beta}}}$ . Mais il est intéressant de montrer

qu'elle est exactement de cet ordre, ce qui permettra de conclure à l'indépendance des solutions  $\psi^{(q)}$ .

Pour obtenir ce résultat il suffit d'étudier  $\psi^{(q)}(x, 0)$  quand  $x \rightarrow 0$ .

Soient  $C'_1, \Gamma'_1$  les parties de  $C_1$  et  $\Gamma_1$  extérieures à un cercle de centre  $O$ , de rayon  $R$  assez grand, pour que les singularités de  $\mathcal{G}^*$  et  $\mathcal{H}^*$  se trouvent contenues dans l'intérieur.

Par le théorème de Cauchy on voit que la quantité à étudier

$$\int_{C'_1} \exp\left[\frac{k}{2}x\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\right] \mathcal{G}^*(\zeta)\zeta^{\frac{q}{\beta}}\zeta^{\frac{\pi}{\beta}} d\zeta + \int_{\Gamma'_1} \exp\left[\frac{k}{2}x\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\right] \mathcal{H}^*(\zeta)\zeta^{\frac{q}{\beta}}\zeta^{\frac{\pi}{\beta}} d\zeta$$

diffère de

$$(35) \quad \int_{C'_1} \exp\left[\frac{k}{2}x\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\right] (\mathcal{G}^*(\zeta) + \mathcal{H}^*(\zeta)) \zeta^{\frac{q}{\beta}}\zeta^{\frac{\pi}{\beta}} d\zeta$$

de l'intégrale

$$\int_{\text{MNP}} \exp\left[\frac{k}{2}x\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\right] \mathcal{H}^*(\zeta)\zeta^{\frac{q}{\beta}}\zeta^{\frac{\pi}{\beta}} d\zeta,$$

qui est bornée quand  $x \rightarrow 0$ .

Il suffira donc d'étudier l'expression (35), dans laquelle on peut d'ailleurs remplacer sans inconvénient le contour  $C'_1$  par la demi-droite  $[\zeta_0, \zeta_0 \infty]$ .

Compte tenu de la formule (34), le terme d'ordre supérieur sera fourni par

$$2 \int_{\zeta_0}^{\infty} \exp \left[ \frac{k}{2} x \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \right] \zeta^{(q+\frac{1}{2}) \frac{\pi}{\beta} - 1} d\zeta.$$

Or cette quantité se comporte au voisinage de  $x = 0$  comme

$$2 \int_{\zeta_0}^{\infty} \exp \left( \frac{k}{2} x \zeta \right) \zeta^{(q+\frac{1}{2}) \frac{\pi}{\beta} - 1} d\zeta$$

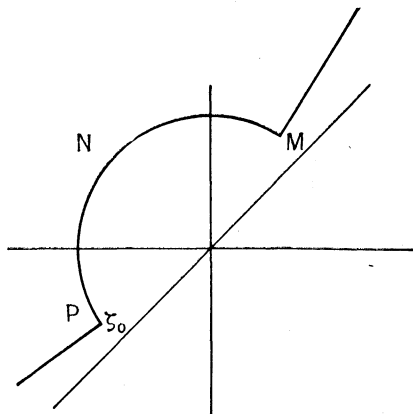


Fig. 12.

équivalente à

$$\begin{aligned} & 2 e^{i \frac{\pi^2}{\beta} (q+\frac{1}{2})} \int_{\rho_0}^{+\infty} \exp \left\{ -\frac{k}{2} x \rho \right\} \cdot \rho^{(q+\frac{1}{2}) \frac{\pi}{\beta} - 1} d\rho \\ &= \frac{2 e^{i \frac{\pi^2}{\beta} (q+\frac{1}{2})}}{x^{(q+\frac{1}{2}) \frac{\pi}{\beta}}} \int_{x \rho_0}^{+\infty} \exp \left( -\frac{ku}{2} \right) \cdot u^{(q+\frac{1}{2}) \frac{\pi}{\beta} - 1} du, \end{aligned}$$

expression d'ordre  $\frac{1}{x^{(q+\frac{1}{2}) \frac{\pi}{\beta}}}$ , car on vérifie aisément que

$$\int_0^{+\infty} \exp \left( -\frac{ku}{2} \right) \cdot u^{(q+\frac{1}{2}) \frac{\pi}{\beta} - 1} du \neq 0.$$

### X. — Généralisations diverses.

1. On se propose d'étudier les fonctions  $\varphi^{(q)}(x, y)$  définies par

$$\begin{aligned} \varphi^{(q)}(x, y) = & \int_{\Gamma} \exp \left\{ \frac{k}{2} \left[ x \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) + iy \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \right] \right\} g^{(q)}(\zeta) d\zeta \\ & + \int_{\Gamma'} \exp \left\{ \frac{k}{2} \left[ x \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) - iy \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \right] \right\} h^{(q)}(\zeta) d\zeta, \end{aligned}$$

où

$$g^{(q)}(\zeta) = \frac{\mathcal{G}^*(\zeta)}{\left(\zeta^{\frac{\pi}{\beta}} + e^{i\frac{\pi^2}{2\beta}}\right)^{q+1}}, \quad h^{(q)}(\zeta) = \frac{\mathcal{H}^*(\zeta)}{\left(\zeta^{\frac{\pi}{\beta}} + e^{i\frac{\pi^2}{2\beta}}\right)^{q+1}}$$

( $q$  entier  $> 0$ )

[avec ces notations, on a :  $\varphi^0(x, y) = \varphi(x, y)$ ,  $g^{(0)} = g$ ,  $h^{(0)} = h$ ].

Les fonctions  $g^{(q)}(\zeta)$  et  $h^{(q)}(\zeta)$  satisfont encore aux équations fonctionnelles fondamentales (17) et (18); elles ont les mêmes singularités que  $g$  et  $h$ , mais tandis que  $i e^{i\beta}$  est pôle simple de  $g$  et  $h$ , ce point est pôle multiple d'ordre  $q+1$  pour  $g^{(q)}$  et  $h^{(q)}$ .

Se reportant aux calculs développés antérieurement il est bien clair que

$$\Delta\varphi^{(q)} - i\varepsilon\varphi^{(q)} = 0 \quad \text{dans le secteur } BOx,$$

et

$$\frac{\partial\varphi^{(q)}}{\partial y}(x, 0) + i\varphi^{(q)}(x, 0) = 0 \quad (x > 0).$$

Pour examiner la condition aux limites sur le côté OB, notons qu'on peut écrire

$$\varphi^{(q)}(x, y) = \varphi_0^{(q)}(x, y) + \varphi_1^{(q)}(x, y),$$

où  $\varphi_1^{(q)}(x, y)$  est l'expression qui définit  $\varphi^{(q)}(x, y)$ , où l'on a remplacé C et  $\Gamma$  respectivement par  $C_1$  et  $\Gamma_1$ , et

$$\varphi_0^{(q)}(x, y) = 2\pi i \operatorname{Résidu}_{\zeta=e^{i(\frac{\pi}{2}+\beta)}} \left[ \exp\left\{\frac{k}{2}\left[x\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) + iy\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\right]\right\} g^{(q)}(\zeta) \right].$$

On a  $\varphi_1^{(q)} = 0$  sur OB, de telle sorte qu'on est réduit à expliciter le terme  $\varphi_0^{(q)}$ .

Mais on obtient, par un calcul élémentaire,

$$\varphi_0^{(q)} = \frac{2\pi i}{q!} \frac{d^q}{d\zeta^q} \left[ \exp\left\{\frac{k}{2}\left[x\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) + iy\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\right]\right\} (\zeta - i e^{i\beta})^{q+1} g^{(q)}(\zeta) \right] \Big|_{\zeta=e^{i(\frac{\pi}{2}+\beta)}}$$

ou encore

$$\varphi_0^{(q)}(x, y) = P_q(z, \bar{z}) e^{-k(x \sin\beta + y \cos\beta)},$$

$P_q(z, \bar{z})$  étant un polynôme de degré  $q$  en  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$ , qu'on pourrait expliciter complètement et dont l'ensemble des termes de degré  $q$  est

$$\tau_q [z + \bar{z} e^{-2i\beta}]^q,$$

avec

$$\begin{aligned} \tau_q &= \frac{2\pi i}{q!} \left(\frac{k}{2}\right)^q \left[ \lim_{\zeta \rightarrow e^{i(\frac{\pi}{2}+\beta)}} (\zeta - i e^{i\beta})^{q+1} g^{(q)}(\zeta) \right] \\ &= \frac{2\beta}{q!} \left(-\frac{i\beta k}{2\pi}\right)^q e^{i\left(\beta - \frac{\pi^2}{2\beta}\right)(q+1)} \mathcal{G}^*\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}\right) \neq 0. \end{aligned}$$

Il en résulte sur OB

$$\varphi_0^{(q)} = P_q(r e^{-i\beta}, r e^{i\beta}),$$

où  $P_q(r e^{-i\beta}, r e^{i\beta})$  est un polynôme en  $r$  de degré  $q$ , dont le terme de plus haut degré est :  $2^q \tau_q e^{-q i \beta} r^q$ .

Il y a lieu d'observer que  $\varphi_0^{(q)}(x, y)$  tend vers zéro, quand le point  $x, y$  s'éloigne à l'infini dans le secteur, dans toute direction autre que OB. De façon plus précise,

$$\varphi_0^{(q)}(x, y) r^{-q} e^{\frac{\sqrt{2\varepsilon}}{2} r \sin(\beta + \omega)}$$

est borné à l'infini dans le secteur, c'est-à-dire dans

$$r > r_0, \quad -\beta \leq \omega \leq 0 \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2}, r_0 > 0).$$

En outre,  $\varphi_1^{(q)}(x, y)$  tend vers zéro et même

$$\varphi_1^{(q)}(x, y) e^{c r}, \quad \left[ c = c \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{2} \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \right]$$

reste borné quand  $r \rightarrow \infty$ ,  $-\beta \leq \omega \leq 0$ .

Des résultats analogues peuvent être énoncés pour  $\frac{d\varphi_0^{(q)}}{dr}$  et  $\frac{d\varphi_1^{(q)}}{dr}$ .

Au surplus la fonction  $\varphi^{(q)}(x, y)$  est régulière à l'origine: plus précisément  $\varphi^{(q)}(x, y) \rightarrow P_q(0, 0)$  quand  $r \rightarrow 0$ ,  $-\beta \leq \omega \leq 0$ .

Remarquant que les fonctions  $\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) g^{(q)}(\zeta)$ ,  $\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) h^{(q)}(\zeta)$ , ( $q > 0$ ) sont intégrables sur  $C_1$  et  $\Gamma_1$ , on peut ajouter que les dérivées partielles premières des  $\varphi^{(q)}$  sont continues et bornées à l'origine.

De l'ensemble de ces faits, il résulte que grâce à une combinaison linéaire convenable des fonctions  $\varphi$ ,  $\varphi^{(1)}$ , ...,  $\varphi^{(q)}$  on saura toujours construire une solution du problème aux limites

$$(36) \quad \begin{cases} \Delta\varphi - i\varepsilon\varphi = 0 & \text{dans le secteur BO}x, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, 0) + i\varphi(x, 0) = 0 & (x > 0), \\ \varphi = F_q(r) & \text{sur OB : } x + iy = r e^{-i\beta}, \end{cases}$$

où  $F_q(r)$  est un polynôme en  $r$  de degré  $q$ , donné arbitrairement.

Cette solution est régulière à l'origine, tandis que ses dérivées partielles premières y sont au plus d'ordre  $\frac{1}{r^{1-\frac{\pi}{2\beta}}}$ . (Cette assertion résulte du fait que  $\varphi^{(0)} = \varphi$  peut intervenir dans la combinaison linéaire précitée.)



En outre, son comportement à l'infini satisfait, en particulier, aux conditions suivantes :

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} r^{-\alpha} \varphi \text{ et } r^{-\alpha} \frac{d\varphi}{dr} \text{ sont bornés pour } -\beta \leq \omega \leq 0, \quad r > r_0 > 0; \\ \text{il existe un } \delta, \quad 0 < \delta < \beta \text{ et } \eta > 0 \\ \text{tels que } \varphi e^{\eta r} \text{ est borné dans le secteur } -\delta \leq \omega \leq 0. \end{array} \right.$$

(En vérité, le résultat obtenu plus haut est plus fort, puisqu'on a vu que, pour tout  $\delta (0 < \delta < \beta)$  on peut trouver  $\eta > 0$  tel que  $\varphi e^{\eta r}$  est borné dans le secteur  $-\delta \leq \omega \leq 0$ .)

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème d'unicité suivant :

*Le problème aux limites (36), auquel on adjoint les conditions (37) et*

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi \text{ borné dans le secteur } -\beta \leq \omega \leq 0 \text{ au voisinage de } 0, \\ \int_{c(r)} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right| ds \rightarrow 0 \quad \text{si } r \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

*a une solution unique.*

Il reste à établir l'unicité; ou encore, en raison du caractère linéaire de toutes les conditions, il suffit d'établir : le problème aux limites

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta \varphi - i\varepsilon \varphi = 0 \quad \text{dans le secteur } BOx, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, 0) + i\varphi(x, 0) = 0 \quad (x > 0), \\ \varphi = 0 \quad \text{sur } OB, \end{array} \right.$$

avec les conditions (37) et (38) n'a pas d'autre solution que  $\varphi = 0$ .

Nous utiliserons de nouveau la méthode qui a permis d'obtenir le premier théorème d'unicité, avec les mêmes notations. Mais la difficulté est ici qu'on ne peut pas déduire des seules conditions (37)

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{c(R)} \left( \Phi_1 \frac{d\Phi_2}{dr} - \Phi_2 \frac{d\Phi_1}{dr} \right) ds = 0.$$

Ce dernier résultat, cependant, est exact, mais pour le démontrer nous aurons besoin d'utiliser (37) et les équations (39).

Observons d'abord que la condition  $\varphi = 0$  sur OB permet de réaliser le prolongement de la fonction  $\varphi(x, y)$  dans le secteur  $BOx'$  symétrique de  $BOx$  par rapport à OB : si  $M'$  est symétrique de  $M$  par rapport à OB on définira

$$\varphi(M') = -\varphi(M).$$

La fonction  $\varphi$  ainsi définie dans le secteur  $xOx'$  d'angle  $2\beta$  y est partout

continue, ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres et vérifie l'équation

$$\Delta\varphi - i\varepsilon\varphi = 0.$$

D'ailleurs l'existence et la continuité de toutes les dérivées d'ordre supérieur résultent des propriétés bien connues des équations aux dérivées partielles de type elliptique à coefficients constants.

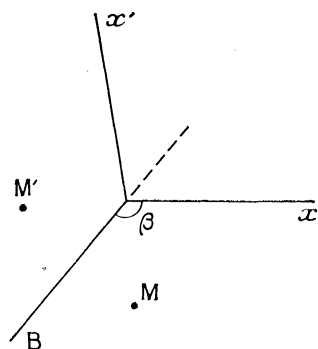


Fig. 13.

On fera usage de la propriété suivante [4] :

$C_\rho$  étant un cercle quelconque, tout entier dans le secteur  $xOx'$  d'angle  $2\beta$ , de centre  $M$ , de rayon  $\rho$ , on a pour toute solution  $\varphi$  de  $\Delta\varphi - i\varepsilon\varphi = 0$  définie dans  $xOx'$

$$(39) \quad \frac{1}{2\pi\rho} \int_{C_\rho} \varphi ds = J_0(ik\rho) \varphi(M) \quad (k^2 = i\varepsilon),$$

où  $J_0(z)$  est la fonction de Bessel d'ordre 0.

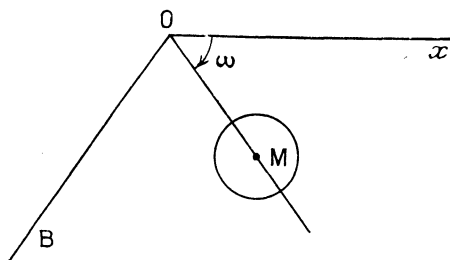


Fig. 14.

Cela fait, on associe à tout point  $M$ ,  $R e^{i\omega}$ , un cercle  $C(M)$  de centre  $M$  et de rayon  $\rho$  défini par  $\frac{\rho}{R} = \nu$ , où  $\nu$  est un nombre réel, qu'on peut se donner arbitrairement sous la réserve  $\nu < \sin \delta$ .

Il en résulte que pour tout point  $M$  du secteur  $-\beta \leq \omega \leq -\delta$  le cercle  $C(M)$

associé est tout entier contenu dans le secteur  $xOx'$  d'angle  $2\beta$ , et l'on peut appliquer la formule (39).

Utilisant maintenant une partie des conditions (37),

$$|\varphi| < Ar'' \quad \text{dans } r > r_0, \quad -\beta \leq \omega \leq 0,$$

domaine qu'on peut élargir à  $-2\beta \leq \omega \leq 0$ , on obtient pour

$$R - \rho = R(1 - r) > r_0,$$

à partir de (39)

$$|\varphi(M)| < \frac{A(R + \rho)''}{|\mathcal{J}_0(ik\rho)|}$$

et notant que

$$\mathcal{J}_0(ik\rho) \approx \begin{cases} \frac{e^{-\frac{i\pi}{8}} e^{k\rho}}{\sqrt{2\pi\rho\sqrt{\varepsilon}}} & \text{quand } R \rightarrow \infty \\ & \text{ou } \rho \rightarrow \infty, \end{cases}$$

on peut écrire

$$|\varphi(M)| < 2A r^{\frac{1}{2}} (1+r)'' \sqrt{2\pi\sqrt{\varepsilon}} R'' + \frac{1}{2} \exp \left[ -r \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{2} R \right]$$

si  $R$  est assez grand, disons  $R > R_0$ , cette formule étant valable, rappelons-le, pour  $-\beta \leq \omega \leq -\delta$ .

Grâce à cette estimation et au reste des conditions (37), il est aisé d'établir

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}(R)} \left( \Phi_1 \frac{d\Phi_2}{dr} - \Phi_2 \frac{d\Phi_1}{dr} \right) ds = 0$$

et de là on déduira, suivant la démonstration du premier théorème d'unicité,

$$\Phi_1 = \Phi_2 = 0.$$

2. On peut apporter à la méthode de calcul développée dans la section qui précède une autre généralisation intéressante.

Soit  $\zeta_0$ ,  $0 < \text{Arg} \zeta_0 < 2\pi$ , un nombre donné; désignons par  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  les arguments compris entre 0 et  $2\pi$ , respectivement des points de  $\mathcal{L}$ ,  $C_1 = \mathcal{L}^{\frac{\alpha}{2}}$ ,  $\mathcal{L}^{\frac{\alpha}{2}}$ , qui appartiennent au cercle  $O, |\zeta_0|$ ; on a

$$\theta_1 > \theta_2 > \theta_3, \quad \theta_1 = \theta_2 + \frac{\alpha}{2}, \quad \theta_2 = \theta_3 + \frac{\alpha}{2}.$$

Faisons sur  $\zeta_0$  l'hypothèse :

$$(40) \quad \zeta_0 \in \bar{D} \quad \text{ou} \quad \theta_3 \leq \text{Arg} \zeta_0 \leq \theta_1$$

et posons :

$$(41) \quad \varphi = \int_{\mathcal{C}} \exp \left\{ \frac{k}{2} \left[ x \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) + iy \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \right] \right\} \frac{\mathcal{E}^*(\zeta)}{\zeta^\beta - \zeta_0^\beta} d\zeta \\ + \int_{\Gamma} \exp \left\{ \frac{k}{2} \left[ x \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) - iy \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \right] \right\} \frac{\mathcal{E}^*(\zeta)}{\zeta^\beta - \zeta_0^\beta} d\zeta,$$

où  $\mathcal{G}^*(\zeta)$ ,  $\mathcal{H}^*(\zeta)$  sont les fonctions,  $C_1$  et  $\Gamma_1$  les contours antérieurement introduits, et  $C$  et  $\Gamma$  définis comme suit :

Si  $\text{Arg}\zeta_0 < \theta_2$  on déforme  $C_1$  quelque peu au voisinage du cercle  $O, |\zeta_0|$ , de façon que l'argument de son point commun avec ce cercle passe de la valeur  $\theta_2$  à une valeur légèrement inférieure à  $\text{Arg}\zeta_0$  : on désigne par  $C$  le contour ainsi obtenu et par  $\Gamma$  celui qui s'en déduit par la rotation  $0, -\beta$ . Toutefois cette déformation doit être réalisée de telle sorte qu'on ne franchisse pas le point d'affixe  $\mu$ . Cette condition ( $\star$ ) est nécessaire par la validité de la deuxième condition aux limites; ajoutons qu'elle peut toujours être satisfaite si  $\beta < \frac{\pi}{2}$ . En vérité, le seul cas où elle serait en défaut est celui où  $\zeta_0 = \mu$ , ce qui ne peut se produire, étant donné les hypothèses, que si  $\beta = \frac{\pi}{2}$ . Nous y reviendrons plus loin.

Si  $\text{Arg}\zeta_0 > \theta_2$  on prendra  $C = C_1, \Gamma = \Gamma_1$ .

On peut aisément se convaincre, en se reportant aux calculs antérieurs, que la fonction  $\varphi$  définie par (41) satisfait aux conditions du problème aux limites :

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta\varphi - i\varepsilon\varphi = 0 \quad \text{dans le secteur } BOx, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} + i\varphi = 0 \quad (y=0, x>0), \\ \varphi = 2i\beta\zeta_0^{1-\frac{\pi}{\beta}}\mathcal{G}^*(\zeta_0)\exp\left\{\frac{k}{2}r\left(\zeta_0 e^{-i\beta} + \frac{1}{\zeta_0 e^{-i\beta}}\right)\right\} \quad \text{sur } OB, \end{array} \right.$$

avec

$$\mathcal{G}^*(\zeta_0) \neq 0.$$

La fonction  $\varphi$  est régulière à l'origine. Elle est évanescence à l'infini dans le secteur; le résultat est évident si  $\text{Arg}\zeta_0 > \theta_2$ , car  $C = C_1, \Gamma = \Gamma_1$ ; si  $\text{Arg}\zeta_0 < \theta_2$  on peut écrire

$$\varphi = \varphi_1 + 2i\beta\zeta_0^{1-\frac{\pi}{\beta}}\mathcal{G}^*(\zeta_0)\exp\left\{\frac{k}{2}\left[x\left(\zeta_0 + \frac{1}{\zeta_0}\right) + iy\left(\zeta_0 - \frac{1}{\zeta_0}\right)\right]\right\}$$

$\varphi_1$  étant défini par la formule (41) où l'on a remplacé  $C$  et  $\Gamma$  par  $C_1$  et  $\Gamma_1$ .

$\varphi_1$  tend vers zéro à l'infini dans le secteur, et il en est de même du terme exponentiel puisque  $\zeta_0 \in \bar{D}$  (toutefois si  $\zeta_0 \in \mathcal{L}_{-x}$  cette conclusion doit être quelque peu tempérée :  $\varphi_1$  tend vers zéro quand le point  $x, y$  s'éloigne à l'infini dans le secteur dans toute direction autre que  $OB$ ).

Ces résultats peuvent être étendus si  $\zeta_0$  sort de  $D$  : en particulier, ils demeurent sûrement valables si

$$\theta_3 < \text{Arg}\zeta_0 < \theta_1 + \beta,$$

et cette extension suffit pour la suite. Toutefois, si

$$\theta_2 + \beta \leq \text{Arg}\zeta_0 < \theta_1 + \beta,$$

on devra prendre pour contour C le contour  $C_1$  légèrement déformé de manière que l'argument de son point sur le cercle O,  $|\zeta_0|$  passe de la valeur  $\theta_2$  à une valeur légèrement supérieure à  $\text{Arg} \zeta_0 - \beta$  et, comme toujours  $\Gamma$  sera le contour déduit de C par la rotation  $\alpha, -\beta$ .

Proposons-nous de traiter deux exemples :

1° Cherchons à préciser  $\zeta_0$  de telle manière que

$$\frac{k}{2} \left( \zeta_0 e^{-i\beta} + \frac{1}{\zeta_0 e^{-i\beta}} \right) = -a,$$

$a$  étant réel positif donné.

Posant  $\zeta_0 e^{-i\beta} = z_0$ , on est conduit à

$$k \left( z_0 + \frac{1}{z_0} \right) + 2a = 0.$$

Cette équation a deux racines, de produit égal à 1, affixes des points  $M_1$  et  $M_2$  qui décrivent, quand  $a$  varie de 0 à  $+\infty$ , les arcs PQ et RO de la courbe

$$z = r e^{i\theta}, \quad \left( r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta + \left( r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta = 0.$$

Cette courbe se compose de deux arcs symétriques l'un de l'autre par rapport à l'origine, l'un de ces arcs étant le symétrique de  $\mathcal{L}$  par rapport à l'axe imaginaire pur.

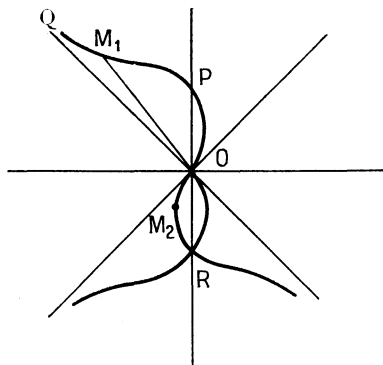


Fig. 15

On prendra pour  $z_0$  l'affixe du point  $M_1$  et l'on définira

$$\zeta_0 = z_0 e^{+i\beta}.$$

Il est facile de s'assurer qu'avec un tel choix on peut écrire

$$\theta_3 < \text{Arg} \zeta_0 < \frac{3\pi}{4} + \beta < \theta_2 + \beta.$$

La solution  $\varphi$  obtenue satisfait à

$$\varphi = 2i\beta \zeta_0^{1-\frac{\pi}{\beta}} \mathcal{G}^*(\zeta_0) e^{-ar} \quad \text{sur OB.}$$

Elle est bornée à l'origine, ses dérivées partielles  $y$  ayant une singularité d'ordre au plus  $\frac{1}{r^{1-\frac{\pi}{2\beta}}}$  et tend exponentiellement vers zéro à l'infini dans le

secteur. Ajoutons pour conclure qu'on peut satisfaire à une condition sur OB plus générale

$$(43) \quad \varphi = F_q(r) e^{-ar},$$

où  $F_q(r)$  est un polynome en  $r$  de degré  $q$  donné arbitrairement.

Il suffira d'introduire les fonctions

$$\begin{aligned} \varphi^{(q)} = & \int_C \exp \left\{ \frac{k}{2} \left[ x \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) + iy \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \right] \right\} \frac{\mathcal{G}^*(\zeta) d\zeta}{\left( \zeta^\beta - \zeta_0^\beta \right)^{q+1}} \\ & + \int_\Gamma \exp \left\{ \frac{k}{2} \left[ x \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) - iy \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \right] \right\} \frac{\mathcal{H}^*(\zeta) d\zeta}{\left( \zeta^\beta - \zeta_0^\beta \right)^{q+1}}. \end{aligned}$$

Elles satisfont aux deux premières équations du système (42) et  $\varphi^{(q)}$  est égal, sur OB, au produit par  $e^{-ar}$  d'un polynome de degré  $q$  en  $r$  qu'on pourrait expliciter complètement.

Par une combinaison linéaire convenable de  $\varphi, \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(q)}$  on pourra donc toujours satisfaire à la condition (43). La solution obtenue  $\varphi$  est bornée partout dans le secteur et tend vers zéro quand on s'éloigne à l'infini dans le secteur; on peut ajouter que  $\int_{e^{(r)}} \left| \frac{d\varphi}{dr} \right| ds \rightarrow 0$  si  $r \rightarrow 0$  ou  $r \rightarrow \infty$ , de telle sorte que l'énoncé du premier théorème d'unicité est encore valable dans ce cas.

2° Montrons pour deuxième exemple comment on pourrait construire la solution régulière du problème aux limites égale sur OB à un polynome trigonométrique quelconque. Grâce au caractère linéaire, il suffit de considérer l'équation

$$\frac{k}{2} \left( \zeta_0 e^{-i\beta} + \frac{1}{\zeta_0 e^{-i\beta}} \right) = ia,$$

$a$  réel donné quelconque.

Posant encore  $\zeta_0 e^{-i\beta} = z_0$ , il est aisé de vérifier que les points  $M_1$  et  $M_2$  dont les affixes sont solution de  $k \left( z_0 + \frac{1}{z_0} \right) - 2ia = 0$ , décrivent quand  $a$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ , l'un  $M_1$  la courbe  $\mathcal{L}_{-\pi}$  de 0 à  $\infty$ , l'autre  $M_2$  la courbe  $\mathcal{L}$ .

On prendra pour  $z_0$  l'affixe de  $M_1$  de telle sorte que  $\zeta_0$  appartiendra à la courbe  $\mathcal{L}_{-\pi}$ , et ce choix convient parfaitement à notre étude.

La solution obtenue satisfait aux deux premières équations du système (42) et prend sur OB la valeur

$$\varphi = 2i\beta \zeta_0^{1-\frac{\pi}{\beta}} \mathcal{G}^*(\zeta_0) e^{i\alpha r}.$$

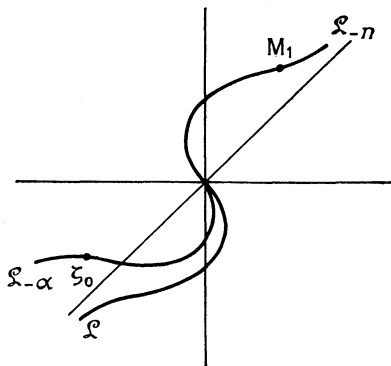


Fig. 16.

Il est aisé de voir qu'elle satisfait, en outre, aux conditions :  $\varphi$  et  $\frac{d\varphi}{dr}$  bornés dans  $-\beta \leq \omega \leq 0$ ,  $r > r_0$ ; pour tout  $\delta$ ,  $0 < \delta < \beta$ , il existe  $r_1 > 0$  tel que  $\varphi e^{nr}$  est borné dans le secteur  $-\delta \leq \omega \leq 0$ .

$\varphi$  est borné au voisinage de l'origine et

$$\int_{e(r)} \left| \frac{d\varphi}{dr} \right| ds \rightarrow 0 \quad \text{si } r \rightarrow 0.$$

Il s'ensuit que le deuxième théorème d'unicité [avec  $q = 0$  dans les conditions (37)] peut être appliqué à ce cas.

*Remarque.* — Il faut noter que si  $\beta > \frac{\pi}{2}$ , il est impossible que  $\zeta_0 = \mu$ , de sorte que la condition (★) énoncée plus haut pourra toujours être remplie.

Il est intéressant d'examiner ce qui se produit si  $\beta = \frac{\pi}{2}$  et  $\zeta_0 = \mu$ , c'est-à-dire si  $a = 1$ , puisque

$$\frac{k}{2} \left( \mu e^{-i\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\mu e^{-i\frac{\pi}{2}}} \right) = i.$$

N'oublions pas que dans la formule (41) le dénominateur  $\zeta^{\frac{\pi}{\beta}} - \zeta_0^{\frac{\pi}{\beta}}$  a été introduit sous les signes  $\int$ , pour la seule raison que  $\zeta_0$  soit un pôle de la fonction qu'on doit intégrer sur C. Or, si  $\zeta_0 = \mu$ , puisque  $\mu$  est déjà pôle

de  $\mathcal{G}^*(\zeta)$  on pourra définir la solution par

$$(44) \quad \varphi = \int_C \exp \left\{ \frac{k}{2} \left[ x \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) + iy \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \right] \right\} g(\zeta) d\zeta \\ + \int_{\Gamma} \exp \left\{ \frac{k}{2} \left[ x \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) - iy \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \right] \right\} h(\zeta) d\zeta,$$

avec

$$g(\zeta) = \frac{\zeta^{2q+1}}{k \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) + 1}, \quad h(\zeta) = \frac{\zeta^{2q+1}}{k \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) - 1} \quad (q \text{ entier}).$$

On prendra  $q = -1$  pour que  $g(\zeta)$  et  $h(\zeta)$  soient intégrables sur  $C$  et  $\Gamma$  : de la sorte on obtiendra une solution régulière à l'origine.

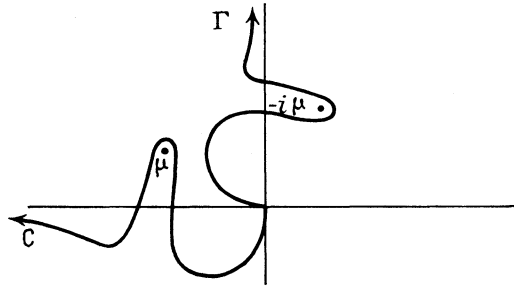


Fig. 17.

On définira  $C$  comme il est indiqué sur la figure 15 et  $\Gamma$  l'homologue de  $C$  par la rotation  $(0, -\frac{\pi}{2})$ .

Les équations fonctionnelles (17) et (18) sont évidemment satisfaites par les fonctions  $g(\zeta)$  et  $h(\zeta)$  choisies, et il est aisé de voir que toutes les conditions requises sont vérifiées.

Revenant aux contours  $C_1$  et  $\Gamma_1$  tels que définis dans la section V on pourra écrire

$$\varphi = \varphi_1 + 2\pi i \left[ \lim_{\zeta \rightarrow \mu} (\zeta - \mu) g(\zeta) \right] \exp \left\{ \frac{k}{2} \left[ x \left( \mu + \frac{1}{\mu} \right) + iy \left( \mu - \frac{1}{\mu} \right) \right] \right\},$$

avec  $\varphi_1$  défini par (44), où l'on a remplacé  $C$  et  $\Gamma$  respectivement par  $C_1$  et  $\Gamma_1$ . Mais par le changement de variable  $\zeta \rightarrow \frac{1}{\zeta}$  effectué sur la seconde intégrale on vérifiera que  $\varphi_1 = 0$ .

La solution régulière se réduit donc, à un facteur multiplicatif près, à

$$\varphi = \exp \left\{ \frac{k}{2} \left[ x \left( \mu + \frac{1}{\mu} \right) + iy \left( \mu - \frac{1}{\mu} \right) \right] \right\} = \exp[-iy - \sqrt{1 + i\varepsilon} \cdot x],$$

avec

$$\operatorname{Re} \sqrt{1 + i\varepsilon} > 0.$$



Revenant au cas général, précisons qu'on pourrait, tout comme dans le premier exemple, construire des solutions satisfaisant sur OB à une condition

$$\varphi = F_q(r) e^{i\omega r},$$

où  $F_q(r)$  est un polynôme en  $r$  donné de degré  $q$ .

La validité du deuxième théorème d'unicité est encore acquise; les calculs sont très voisins de ceux déjà faits de sorte qu'il ne paraît pas nécessaire d'insister plus longuement.

Signalons pour conclure l'intérêt que pourrait présenter au point de vue physique certaines des généralisations envisagées. Revenant au problème proposé au début de ce Mémoire, on pourrait, dans une théorie plus précise, tenir compte des ondes à la surface libre de l'océan.

Dans ce cas, toujours dans l'hypothèse d'une distribution hydrostatique, la pression au point de coordonnées  $x, y$  sur OB pourrait être représentée par

$$p = p_0(y) + q_1 e^{i\sigma t} + q_2 e^{i(\sigma t + b \cdot x)} + q_3 e^{i(\sigma t - b \cdot x)},$$

$\frac{2\pi}{\sigma}$  période de la houle de surface,  $b, q_2, q_3$  coefficients constants.

Le problème étant linéaire, on adopterait la représentation

$$q = p - p_0 = \varphi(x, y) e^{i\sigma t} + \Phi(x, y) e^{i\sigma t},$$

où  $\varphi$  est la fonction déjà calculée (à un changement d'échelles près) et  $\Phi$  solution de :

$$\begin{aligned} \Delta\Phi - i \frac{\mu\gamma A_0 \sigma'}{k} \Phi &= 0 \quad \text{dans le secteur } BOx, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x, 0) + i \frac{\mu A_0 \sigma'}{\rho_0 k g} \Phi(x, 0) &= 0 \quad (x > 0), \\ \Phi &= q_2 e^{i\omega r} + q_3 e^{-i\omega r}, \quad a = b \cos \beta \quad \text{sur OB.} \end{aligned}$$

Mais nous sommes en mesure de résoudre explicitement un tel système, comme on l'a montré plus haut.

Il semble cependant qu'au regard du phénomène physique étudié au début de ce Mémoire, l'effet de ces ondes de surfaces soit secondaire, car leur amplitude et leur période sont faibles en comparaison des caractéristiques analogues de la marée.

#### BIBLIOGRAPHIE.

- [1] G. F. CARRIER et W. H. MUNK, *On the diffusion of tides into permeable rock (Proceedings of the fifth Symposium in Applied Mathematics of the American Mathematical Society, t. V, 1954)*.
- [2] M. ROSEAU, *Sur les mouvements ondulatoires de la mer sur une plage (C. R. Acad. Sc., t. 232, 1951, p. 211-213 et 479-481)*.
- [3] M. ROSEAU, *Contribution à la théorie des ondes liquides de gravité en profondeur variable (Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air, n° 275, Paris, 1952)*.
- [4] R. COURANT et D. HILBERT, *Methoden der mathematischen Physik, t. II, Interscience Publishers, Inc., New-York, 1944*.

(Manuscrit reçu le 10 octobre 1959.)