ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

COSTAKE TELEMAN

Généralisation du groupe fondamental

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 77, nº 3 (1960), p. 195-234
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1960_3_77_3_195_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
3e série, t. 77, 1960, p. 195 à 234.

GÉNÉRALISATION DU GROUPE FONDAMENTAL

PAR M. COSTAKE TELEMAN.

On sait que les représentations du groupe fondamental $\pi_1(X)$ d'un espace topologique connexe X, dans le groupe des automorphismes d'un espace topologique Y, fournissent les structures fibrées sur X, ayant Y pour fibre et dont les groupes structuraux sont discrets (Ehresmann [4]). Il en résulte que tout espace fibré sur X, ayant un groupe structural discret, est associé à l'espace universel de recouvrement $\tilde{X}$ de X, considéré comme espace fibré sur X, et à une représentation du groupe fondamental de X, qui est isomorphe au groupe structural de $\tilde{X}$, si X est un espace localement connexe et localement simplement connexe. Ce théorème conduit à une classification des représentations du groupe $\pi_1(X)$, en considérant dans la même classe les représentations de $\pi_1(X)$ qui associent à $\tilde{X}$ des structures fibrées isomorphes. Il faut toutefois remarquer que les structures fibrées définies par ces classes sont des structures particulières. Par exemple, si X est une variété différentiable, l'espace fibré tangent de X n'est pas associé en général à une représentation du groupe $\pi_1(X)$.

Le but de ce travail est d'associer à l'espace X un groupe dont les représentations fournissent *toutes* les structures fibrées sur X. Nous obtenons ce groupe par la méthode qui conduit au groupe fondamental $\pi_1(X)$ mais en définissant dans l'ensemble des chemins fermés de X, et passant par un point fixe $x_0 \in X$, une équivalence plus faible que l'homotopie. Le groupe ainsi obtenu a été considéré aussi par M. Lefschetz ([8], p. 157-161) et nous le désignerons par le symbole $\mathcal{L}_{x_0}(X)$ ou simplement par $\mathcal{L}_{x_0}$.

Une équivalence analogue, définie dans l'ensemble des chemins de X ayant l'origine en x_0, conduit à un espace fibré principal sur X, que nous représentons par le symbole $(\mathcal{E}_{x_0}, \pi_{x_0}, X)$. Il faut remarquer que le groupe structural $\mathcal{L}_{x_0}$ de cette structure ne peut pas être topologisé, en partant de la topologie de X;

il est simplement un groupe d'automorphismes de la fibre de $(\mathcal{E}_{x_0}, \pi_{x_0}, X)$, qui étant douée de la topologie quotient de la topologie compacte-ouverte, devient un espace fibré dans le sens de MM. Ehresmann et Feldbau [5]. Les espaces associés à $(\mathcal{E}_{x_0}, \pi_{x_0}, X)$ et aux représentations du groupe $\mathcal{L}_{x_0}$ sont des espaces fibrés du même type. L'espace $(\mathcal{E}_{x_0}, \pi_{x_0}, X)$ joue donc le rôle d'un espace fibré universel pour les structures fibrées sur X du type d'Ehresmann-Feldbau.

La construction d'un espace fibré universel a aussi été considérée par M. John Milnor [10] et par M. R. Lashof [6]. M. Milnor obtient un espace fibré principal, à groupe structural topologique, en supposant que X est un complexe cellulaire de Whitehead. Dans ce cas, le groupe de Milnor est un sous-groupe du groupe algébrique $\mathcal{L}_{x_0}$. M. Lashof a construit un espace fibré qui n'est pas principal, la fibre étant un groupoïde.

Nous sommes partis de l'idée de définir une topologie dans le groupe $\mathcal{L}_{x_0}$, en considérant certaines représentations du groupe $\mathcal{L}_{x_0}$, par exemple, les représentations sur des groupes de Lie. Nous développons cette idée en supposant que X est une variété différentiable et considérons les représentations d'un sous-groupe $\mathcal{L}'_{x_0}$ de $\mathcal{L}_{x_0}$, fournies par les groupes d'holonomies des connexions infinitésimales des espaces fibrés différentiables, ayant la variéte X pour base. On peut considérer deux classes de connexions : les connexions linéaires, définies dans les espaces fibrés vectoriels sur X, et les connexions associées aux espaces fibrés principaux sur X, ayant pour groupe structural un groupe dé Lie.

Dans les deux cas, on montre que $\mathcal{L}'_{x_0}$ admet une représentation sur un sous-groupe partout dense d'une limite projective $\mathcal{H}$ de groupes de Lie et cette représentation ne s'étend pas à une représentation du groupe $\mathcal{L}_{x_0}$.

Le groupe $\mathcal{H}$ est un groupe de Lie généralisé, dans le sens qu'il possède une algèbre de Lie [7], dont les représentations sur les algèbres de Lie de dimensions finies, fournissent les représentations de $\tilde{\mathcal{H}}$, si $\mathcal{H}$ est connexe (Lashof [7]), $\tilde{\mathcal{H}}$ étant le groupe universel de recouvrement dé $\mathcal{H}$, donc la limite projective des groupes simplement connexes qui recouvrent les groupes de Lie qui définissent $\mathcal{H}$.

On peut définir, à partir de l'espace X directement, une sous-algèbre partout dense de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ du groupe $\mathcal{H}$ ou du groupe $\tilde{\mathcal{H}}$. C'est l'algèbre engendrée par les bivecteurs tangents à X et dont les origines sont liées à x_0 par un chemin différentiable de X. Si X est simplement connexe, le groupe $\mathcal{H}$ est connexe et alors certaines représentations de l'algèbre $\mathcal{G}$ définissent les représentations du groupe $\mathcal{L}'_{x_0}$ ou $\mathcal{H}$ sur des groupes de Lie.

Ce travail a été conçu après que l'auteur a suivi les cours de MM. G. Vranceanu et T. Ganea, tenus à l'Université de Bucarest en 1958-1959, sur la théorie des connexions infinitésimales et sur les groupes d'homotopie. Aussi, nous voulons remercier MM. T. Ganea et S. Teleman pour les précieuses indications qu'ils m'ont données.

Les idées principales contenues dans ce travail ont été communiquées à l'Académie des Sciences de Paris et sont exposées dans deux Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. ([13], [14]).

CHAPITRE I.

L'ESPACE FIBRÉ PRINCIPAL UNIVERSEL D'UN ESPACE TOPOLOGIQUE.

1. Soit X un espace topologique connexe par arcs. Nous désignerons par E l'espace X^I des chemins de X, donc des applications continues $f : I \to X$ du segment $I = [0, 1]$ dans X. Dans l'ensemble E nous considérons la relation d'équivalence définie par la proposition $f, g \in E$ sont équivalents si et seulement si l'on peut trouver un homéomorphisme φ du segment I, conservant les extrémités 0, 1, tel qu'on ait $f = g \circ \varphi$. Nous désignerons par $\dot{f}$ la classe du chemin f définie par cette relation et par $\dot{E}$ l'ensemble des classes $\dot{f}$, $f \in E$.

Dans l'ensemble E on peut définir une multiplication $(f, g) \to fg$ pour les paires f, g ayant $f(1) = g(0)$, par les formules

$$(fg)(t) = \begin{cases} f(2t), & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ g(2t-1), & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

De même, dans l'ensemble $\dot{E}$ on peut définir une multiplication pour certaines paires α, β : si pour un chemin $f \in \alpha \in \dot{E}$ et un chemin $g \in \beta \in \dot{E}$, on a $f(1) = g(0)$, on posera $\alpha\beta = \dot{\widehat{fg}}$.

LEMME I.1. — *Si les produits* $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \dot{E})$ *sont définis, les produits* $(\alpha\beta)\gamma$, $\alpha(\beta\gamma)$ *sont aussi définis et l'on a* $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

On sait en effet que si pour les chemins f, g, h de X on a $f(1) = g(0)$, $g(1) = h(0)$, alors les chemins $(fg)h$, $f(gh)$ diffèrent par un homéomorphisme de I et appartiennent donc à la même classe, $\dot{\widehat{(fg)h}} = \dot{\widehat{f(gh)}}$.

Si $\alpha \in \dot{E}$, nous désignerons par α' *la classe réduite* de α, définie de la manière suivante : soit $f \in \alpha$ et $\sigma_i \subset I$ les segments maximaux de I, dans lesquels f est constante; donc si t_1, t_2 appartiennent à un même σ_i, on a $f(t_1) = f(t_2)$ et si f est constante dans un intervalle σ contenant un σ_i, on a $\sigma = \sigma_i$. Soit ψ une application continue de I sur I conservant les extrémités de I, constante en chaque σ_i et univalente dans $I - \bigcup_i \sigma_i$. La fonction $f' = f \circ \psi^{-1}$ n'est constante en aucun intervalle de I et la classe $\alpha' = \dot{f}'$ ne dépend que de la classe α de f; c'est α' que nous appellerons la classe réduite de α.

Dans l'ensemble $\dot{E}$ nous introduisons l'équivalence : α et $\beta \in \dot{E}$ sont équivalents si leurs classes réduites α', β' coïncident. Pour cette équivalence, nous désignerons encore par α' la classe d'un élément $\alpha \in \dot{E}$ et par $\dot{E}'$ l'ensemble des classes α'. Si $\alpha = \dot{f}$, nous poserons encore $\alpha' = (\dot{f})'$.

Pour un point $x_0 \in X$, nous désignerons par e_{x_0} le chemin constant $e_{x_0} : I \to x_0$ aussi bien que les classes $\dot{e}_{x_0}$, $(\dot{e}_{x_0})'$ aucune confusion n'étant à craindre, car ces classes ne contiennent que l'élément e_{x_0}.

Pour un élément $a \in \dot{E}'$, nous désignerons par a^0 l'origine $f(0)$ d'un chemin $f \in a$ et par a^1 la seconde extrémité $f(1)$ de ce chemin.

De même, pour deux éléments a, $b \in \dot{E}'$, nous désignerons par ab la classe de $\alpha\beta$, chaque fois que le produit $\alpha\beta$ est défini pour $\alpha \in a$, $\beta \in b$. L'élément ab ne dépend pas du choix de α, β dans les classes a, b.

Lemme I.2. — *Pour tout $a \in \dot{E}'$, les éléments e_{a^0}, e_{a^1} sont des unités à gauche et à droite de a, donc*

$$e_{a^0} a = a e_{a^1} = a.$$

En effet, si $f \in a$, les classes réduites de la classe $\dot{\widehat{e_{a^0} f}}$ et $\dot{\widehat{f e_{a^1}}}$ coïncident avec la classe réduite de $\dot{f}$.

Dans l'ensemble $\dot{E}'$, doué de la loi de multiplication $(a, b) \to ab$, on a un automorphisme involutif $a \to \hat{a}$ défini par : si f est un chemin de X appartenant à la classe a, donc $\dot{f}' = a$, alors $\hat{a}$ est la classe $\dot{\hat{f}}'$ du chemin $\hat{f}(t) = f(1 - t)$. L'élément $\hat{a} \in \dot{E}'$ ne dépend pas du choix de f dans la classe a.

Nous dirons qu'un élément a de $\dot{E}'$ est réductible s'il est décomposable en un produit $a_1 a_2 \ldots a_n \hat{a}_n \ldots a_p$ contenant au moins une paire a_n, $\hat{a}_n$ d'éléments se correspondant par l'automorphisme involutif $a \to \hat{a}$. En supprimant dans un tel produit une ou plusieurs paires a_n, $\hat{a}_n$, on obtient un nouveau produit qui définit un élément a', que nous appellerons *réduction de* a.

Dans l'espace $\dot{E}'$ nous introduirons la relation d'équivalence : a, $a \in \dot{E}'$ sont équivalents si l'on peut trouver une suite finie $c_0 = a$, c_1, c_2, $\ldots$, $c_m = b$, telle que pour chaque paire d'éléments consécutifs c_i, c_{i+1} de cette suite, on puissse trouver des réductions c'_i, c'_{i+1} égales, donc $c'_i = c'_{i+1}$ (les réductions de c_i correspondant aux paires c_{i-1}, c_i; c_i, c_{i+1} n'étant pas nécessairement identiques). Cette relation est évidemment réflexive et symétrique et aussi transitive, donc c'est une équivalence dans $\dot{E}'$. Si a est équivalent à a_1 et b à b_1, et si le produit ab est défini, il en est de même du produit $a_1 b_1$ et l'on a ab équivalent à $a_1 b_1$. En effet, si les suites $c_0 = a$, c_1, $\ldots$, $c_p = a_1$; $d_0 = b$, d_1, $\ldots$, $d_q = b_1$ donnent les équivalences de a, a_1 et b, b_1, la suite $c_0 d_0$, $c_1 d_0$, $\ldots$, $c_p d_0$, $c_p d_1$, $\ldots$, $c_p d_q$ donnera l'équivalence de ab et $a_1 b_1$.

Pour chaque $a \in \dot{E}'$ nous désignerons par $\dot{a}$ la classe de a par rapport à l'équivalence précédente, par ε_{x_0} la classe de $e_{x_0} \in \dot{E}'$, par $\hat{\lambda}$ la classe de $\hat{a}$ si $\lambda = \dot{a}$. Si $\dot{f}' = a$ et $\lambda = \dot{a}$, nous écrirons aussi $\lambda = \{f\}$. Enfin, nous désignerons par $\mathcal{E}$ l'ensemble des classes $\dot{a}$ pour $a \in \dot{E}'$ et par $\sigma : E \to \mathcal{E}$ l'application canonique de E sur $\mathcal{E}$, donc $\sigma(f) = \{f\}$.

Dans l'ensemble $\mathcal{E}$ on peut définir une multiplication pour toute paire (λ, μ) d'éléments λ, μ contenant des éléments $f \in \sigma^{-1}(\lambda)$, $g \in \sigma^{-1}(\mu)$ pour lesquels le produit fg est défini.

Nous désignerons par λ^0, λ^1 les extrémités $f(0)$, $f(1)$ d'un chemin f ayant $\{f\} = \lambda$.

Lemme I.3. — *La multiplication $(\lambda, \mu) \to \lambda\mu$ définie pour toute paire ayant $\lambda^1 = \mu^0$, vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Si $\lambda^1 = \mu^0$, $\mu^1 = \nu^0$, alors $(\lambda\mu)\nu$, $\lambda(\mu\nu)$ sont définis et $(\lambda\mu)\nu = \lambda(\mu\nu)$.*

2. $\lambda\hat{\lambda} = \varepsilon_{\lambda^0}$, $\hat{\lambda}\lambda = \varepsilon_{\lambda^1}$.

3. $\varepsilon_{\lambda^0}\lambda = \lambda\varepsilon_{\lambda^1} = \lambda$.

En effet, les propriétés 1,3 résultent des lemmes 1,2, tandis que la propriété 2 résulte du fait que l'élément $f\hat{f}$ admet la réduction $e_{f(0)}$ et $\hat{f}f$ admet la réduction $e_{f(1)}$.

Soit x_0 un point fixe de l'espace topologique X, E_{x_0} le sous-ensemble de E formé par les chemins f ayant l'origine $f(0)$ en x_0 et Λ_{x_0} l'ensemble des chemins f ayant les deux extrémités en x_0, donc ayant $f(0) = f(1) = x_0$.

Désignons aussi par $\mathcal{E}_{x_0}$ l'ensemble des classes $\{f\}$ des chemins $f \in E_{x_0}$ ou, ce qui revient à la même chose, le sous-ensemble de $\mathcal{E}$ formé par les éléments λ ayant $\lambda^0 = x_0$. Désignons enfin par $\mathcal{L}_{x_0} \subset \mathcal{E}_{x_0}$ le sous-ensemble de $\mathcal{E}_{x_0}$, formé par les éléments λ ayant $\lambda^1 = x_0$ et par π_{x_0} l'application de $\mathcal{E}_{x_0}$ sur X définie par $\pi_{x_0}(\lambda) = \lambda^1$. Le lemme 3nous permet d'énoncer le

Théorème I.1. — *L'application $\pi_{x_0} : \mathcal{E}_{x_0} \to X$ a les propriétés suivantes :*

a. $\pi_{x_0}^{-1}(x_0) = \mathcal{L}_{x_0}$ *est un groupe.*

b. On a une application $t_{x_0} : \mathcal{L}_{x_0} \times \mathcal{E}_{x_0} \to \mathcal{E}_{x_0}$, définissant un isomorphisme du groupe $\mathcal{L}_{x_0}$ sur un groupe de permutations de l'ensemble $\mathcal{E}_{x_0}$, par la formule

$$t_{x_0}(l, \lambda) = l\lambda \qquad (l \in \mathcal{L}_{x_0}, \ \lambda \in \mathcal{E}_{x_0}).$$

c. La relation $\pi_{x_0}(\lambda) = \pi_{x_0}(\mu)$ $(\lambda, \mu \in \mathcal{E}_{x_0})$ est équivalente à la relation : on peut trouver un $l \in \mathcal{L}_{x_0}$, tel que $\lambda = l\mu$.

2. L'espace topologique obtenu de l'ensemble E en considérant la topologie compacte-ouverte sera désigné aussi par la lettre E.

De même, nous désignerons par $\mathcal{E}$ l'espace topologique quotient de l'espace topologique E et de l'application canonique $f \to \{f\}$. Les espaces $\mathcal{E}_{x_0}$, $\mathcal{L}_{x_0}$ deviennent aussi des espaces topologiques, en tant que sous-espaces de $\mathcal{E}$.

Lemme I.4. — *Les applications*

$$\alpha \to \alpha^{-1}, \quad (l_0, \alpha) \to l_0\alpha, \quad (l, l_0) \to ll_0 \qquad (\alpha \in \mathcal{E};\ l,\ l_0 \in \mathcal{L}_{x_0})$$

de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$, $\{l_0\} \times \mathcal{E}_{x_0}$ dans $\mathcal{E}_{x_0}$ et $\mathcal{L}_{x_0} \times \{l_0\} \to \mathcal{L}_{x_0}$ sont continues.

Considérons en effet les schémas commutatifs

$$\begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{a} & \hat{f} \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \alpha = \{f\} & \to & \alpha^{-1} = \{\hat{f}\}. \end{array}$$

La flèche verticale à droite représente une application continue qui retourne un ensemble ouvert de $\mathcal{E}$ en un ensemble ouvert de E, saturé par rapport à l'équivalence $\{f\} = \{g\}$.

La flèche a représente aussi une application continue, qui a de plus la propriété de retourner un ensemble ouvert saturé en un ensemble ouvert saturé de E. Ce dernier ensemble sera transformé par σ en un ensemble ouvert de $\mathcal{E}$. Donc l'application $\alpha \to \alpha^{-1}$ est continue.

La continuité des autres applications résulte aussi du fait que les applications

$$(f, g) \to fg$$

de E dans E, obtenues en fixant f ou g, si $f \in \Lambda_{x_0}$, $g \in \mathrm{E}_{x_0}$ ou f, $g \in \Lambda_{x_0}$, ont la propriété de retourner les ensembles saturés en ensembles saturés.

Lemme I.5. — *L'application d'espaces topologiques*

$$\pi_{x_0} : \quad \mathcal{E}_{x_0} \to \mathrm{X}$$

est continue.

En effet, l'application $f \to f(1)$ de E_{x_0} sur X est continue et cette application se décompose en le produit des applications $f \to \{f\}$, $\{f\} \to \pi_{x_0}(\{f\})$ et d'après un théorème connu sur les espaces quotient, il en résulte que π_{x_0} est continue.

D'après le lemme I.4, les transformations de la fibre $\mathcal{L}_{x_0}$ de la structure $(\mathcal{E}_{x_0}, \pi_{x_0}, \mathrm{X})$, définies par les éléments du groupe $\mathcal{L}_{x_0}$, sont des homéomorphismes de cette fibre. De même, l'application

$$\xi_\alpha : \quad \mathcal{L}_{x_0} \to \mathcal{L}_{x_0}(\alpha) \qquad [\xi_\alpha(l) = l\alpha;\ l \in \mathcal{L}_{x_0},\ \alpha \in \mathcal{E}_{x_0}]$$

de la fibre $\mathcal{L}_{x_0}$ en la fibre sur $\pi_{x_0}(\alpha)$ de $\mathcal{E}_{x_0}$ est aussi un homéomorphisme. Si $\pi_{x_0}(\alpha) = \pi_{x_0}(\beta)$, l'application $\xi_\beta^{-1} \circ \xi_\alpha$ est un élément du groupe $\mathcal{L}_{x_0}$. De même, si $l_0 \in \mathcal{L}_{x_0}$ et $\alpha \in \mathcal{E}_{x_0}$, l'application $l_0\xi_\alpha : l \to ll_0\alpha$ est une application ξ_β, où $\beta = l_0\alpha$.

Supposons que l'espace X est une variété topologique. Si V est un voisinage de coordonnées dans X, l'espace fibré $\mathcal{E}_{x_0}$ admet alors une section locale sur V, qu'on obtient en considérant un chemin fixe de x_0 à un point $x_1 \in V$ et les rayons passant par x_1 et contenus dans V, identifié à une boule euclidienne. Si α sont les classes des chemins ainsi obtenus, on a un homéomorphisme de $V \times \mathcal{L}_{x_0}$ sur $\pi_{x_0}^{-1}(V) \subset \mathcal{E}_{x_0}$, défini par

$$(x, l) \to l\alpha \qquad [\pi_{x_0}(\alpha) = l].$$

Ces propriétés définissent un espace fibré dans le sens de Feldbau et Ehresmann ([12], p. 18). On a donc le

Théorème I.2. — *Si* X *est une variété topologique, la structure* $(\mathcal{E}_{x_0}, \pi_{x_0}, X)$, *topologisée par la méthode indiquée précédemment, est un espace fibré principal dans le sens de MM. Feldbau et Ehresmann.*

Le résultat s'étend aux espaces X triangulables à l'aide d'un complexe simplicial localement fini.

Remarquons que le groupe $\mathcal{L}_{x_0}$, doué de la topologie définie plus haut, n'est pas un groupe topologique, car l'opération groupale $\mathcal{L}_{x_0} \times \mathcal{L}_{x_0} \to \mathcal{L}_{x_0}$ n'est pas continue. Cependant, le fait que les translations, à droite et à gauche de ce groupe sont des homéormorphismes, montre que la topologie de $\mathcal{L}_{x_0}$ est plus fine que la topologie d'une structure uniforme de cet espace, les entourages de cette structure étant les ensembles $\mathfrak{U}_V$ de $\mathcal{L}_{x_0} \times \mathcal{L}_{x_0}$ définis par

$$\mathfrak{U}_V = \{ (\{f\}, \{g\}) ; (f(t), g(t)) \in V, t \in I \},$$

V étant un entourage arbitraire d'une structure uniforme de X.

CHAPITRE II.

Les espaces topologiques non-holonomes, fibrés sur un espace topologique X et les connexions de ces espaces.

Dans ce chapitre nous généraliserons la notion de connexion infinitésimale dans un espace fibré différentiable sur X due à M. Ch. Ehresmann, ainsi qu'un théorème de M. Ehresmann concernant les connexions intégrables, d'après lequel ces connexions sont définies par les représentations du groupe de Poincaré $\Pi_1(X, x_0)$ dans le groupe des automorphismes de la fibre.

Définition II.1. — *Un espace topologique non holonome est une paire* (Z, K) *formée d'un ensemble* Z *et d'une famille* K *d'applications* $f : I \to Z$, *vérifiant les propriétés suivantes :*

1° *Pour tout* $z_0 \in Z$, *l'application* $I \to z_0$ *appartient à* K.

2° *Si* $f \in K$ *et si* φ *est un homéomorphisme de* I *sur lui-même,* $f \circ \varphi$ *appartient aussi à* K.

3° *Si* $f,\ g \in \mathrm{K}$, *le produit* fg, *où*

$$(fg)(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}, \\ g(2t-1), & \frac{1}{2} \leqq t \leqq 1, \end{cases}$$

appartient à K, *pourvu que* $f(1) = g(0)$.

Si Z est un espace topologique, la structure non holonome de Z, définie par la famille K des chemins de Z, sera désignée simplement par Z et au lieu de la locution : « espace topologique non holonome (Z, K) », nous utiliserons simplement l'expression : « espace topologique Z ».

Dans le cas général, nous dirons que les éléments de K sont les chemins de Z.

Dans l'ensemble K on peut définir les relations d'équivalence considérées dans (I, 1), au sujet de l'espace E des chemins d'un espace topologique X. Nous désignerons par $\{f\}$ la classe de $f \in \mathrm{K}$, définie de la même manière que la classe $\{f\}$ d'un élément $f \in \mathrm{E}$. Bien qu'on a désigné par le même symbole $\{\ \ \}$ deux fonctions différentes, définies dans des ensembles K, E distincts, aucune confusion n'est à craindre, car chaque fois qu'on écrira le symbole $\{f\}$, on saura si f est un chemin de X ou de Z.

Définition II.2. — *Nous dirons que l'espace topologique non holonome* (Z, K) *est fibré sur l'espace topologique* X *si l'on a donné une application* $p : \mathrm{Z} \to \mathrm{X}$, *telle que* $p \circ f$ *soit un chemin de* X *pour tout* $f \in \mathrm{K}$.

Nous désignerons la structure définie par l'espace non holonome (Z, K) et par l'application $p = \mathrm{Z} \to \mathrm{X}$ par le symbole (Z, K, p, X).

Définition II.3. — *Une connexion dans un espace topologique non holonome fibré* (Z, K, p, X) *est une fonction* $\mathrm{C} : \mathrm{M} \to \mathrm{K}$, *définie dans le sous-ensemble* M *de* $\mathrm{Z} \times \mathrm{E}$, *où* $\mathrm{M} = \{(z_0, f);\ f : \mathrm{I} \to \mathrm{X},\ f(0) = p(z_0)\}$, *satisfaisant aux conditions suivantes :*

1° $p \circ \mathrm{C}(z_0, f) = f$.

2° $\mathrm{C}(z_0, f)(0) = z_0$.

3° *Si* $f,\ g \in \mathrm{E}$ *et* $\{f\} = \{g\}$, *alors* $\{\mathrm{C}(z_0, f)\} = \{\mathrm{C}(z_0, g)\}$.

4° *Si* $f = f_1 f_2$, *et si* $z_1 = \mathrm{C}(z_0, f_1)(1)$, *alors on a*

$$\mathrm{C}(f, z_0) = \mathrm{C}(f_1, z_0)\,\mathrm{C}(f_2, z_1). \tag{1}$$

Théorème II.1. — *La fonction* $\mathcal{C}$, *définie dans l'ensemble*

$$\mathfrak{M} = \{(\lambda, f);\ f \in \mathrm{E},\ \lambda \in \mathcal{E}_{x_0},\ \pi_{x_0}(\lambda) = f(0)\}$$

et associant à la paire (λ, f) *un chemin de* $\mathcal{E}_{x_0}$ *donné par la formule*

$$\mathcal{C}(\lambda, f)(t) = \sigma(\varphi_0 f_t) = \{\varphi_0 f_t\}, \tag{2}$$

où $\varphi_0 \in \sigma^{-1}(\lambda)$ *et* f_t *est le chemin* $\tau \to f_t(\tau) = f(t\tau)$, *est une connexion dans l'espace fibré universel* $(\mathcal{E}_{x_0}, \pi_{x_0}, X, \mathcal{L}_{x_0})$ *de l'espace topologique* X.

Démonstration. — $\mathcal{C}(\lambda, f)$ est un chemin de l'espace topologique $\mathcal{E}_{x_0}$. On a $\pi_{x_0} \circ \mathcal{C}(\lambda, f)(t) = f_t(1) = f(t)$, donc $\pi_{x_0} \circ \mathcal{C}(\lambda, f) = f$. On a de même $\mathcal{C}(\lambda, f)(0) = \sigma(\varphi_0 f_0) = \sigma(\varphi_0) = \lambda$. Vérifions la condition 4° de la définition II.3. Si $f = f_1 f_2$, on a

$$f_t(\tau) = \begin{cases} f_1(2t\tau) = (f_1)_{2t}(\tau) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq \tau \leq 1 \\ & \text{ou si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \quad 0 \leq \tau \leq \frac{1}{2t}, \\ f_2(2t\tau - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \quad \frac{1}{2t} \leq \tau \leq 1, \end{cases}$$

et alors, comme $\lambda = \sigma(\varphi_0)$ est la classe d'un chemin φ_0 allant de x_0 à $f_1(0)$, on a

$$\mathcal{C}(\lambda, f)(t) = \sigma(\varphi_0 f_t) = \lambda\sigma(f_t) = \begin{cases} \lambda\{(f_1)_{2t}\} & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \lambda\{f_1\}\{(f_2)_{2t-1}\} & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Comme on a aussi $\lambda\sigma(f_1) = \mathcal{C}(\lambda, f_1)(1)$, il en résulte que le chemin $\mathcal{C}(\lambda, f)$ de $\mathcal{E}_{x_0}$ est le produit des chemins $\mathcal{C}(\lambda, f_1)$ et $\mathcal{C}(\lambda', f_2)$, où $\lambda' = \mathcal{C}(\lambda, f_1)(1)$, donc la formule (1) est vérifiée.

Pour démontrer la condition 3°, remarquons que si pour $f, g \in E$ on a $\sigma(f) = \sigma(g)$, alors on peut passer du chemin f au chemin g par un nombre fini d'opérations des types suivants :

$$f \to f \circ x \quad (x : I \approx I); \qquad f \to fl\hat{l}; \qquad f \to l\hat{l}f \quad (l \in E),$$

x étant un homéomorphisme de I avec lui-même, conservant les extrémités 0, 1 et l étant un chemin de X ayant l'origine en $f(1)$ ou en $f(0)$.

Posons $f' = f \circ x$; on a, pour $\varphi_0 \in \sigma^{-1}(\lambda)$,

$$\mathcal{C}(\lambda, f')(t) = \lambda\sigma(f'_t);$$

d'autre part, on peut écrire

$$f'_t(\tau) = f'(t\tau) = f \circ x(t\tau) = f_{x(t)} \circ \psi_t(\tau),$$

où $\psi_t : \tau \to \dfrac{x(t\tau)}{x(t)}$ est un automorphisme de I. Il en résulte qu'on a $\sigma(f'_t) = \sigma(f_{x(t)})$ et alors

$$\mathcal{C}(\lambda, f') = \mathcal{C}(\lambda, f) \circ x, \tag{3}$$

donc les chemins $\mathcal{C}(\lambda, f')$, $\mathcal{C}(\lambda, f)$ diffèrent par le choix du paramètre t, donc

$$\{\mathcal{C}(\lambda, f')\} = \{\mathcal{C}(\lambda, f)\}. \tag{4}$$

Des raisonnements analogues permettent d'établir les formules, pour $g(0) = f(1)$ et $g_1(0) = f(0)$,

$$\mathcal{C}(\lambda, f.g\hat{g}) = \mathcal{C}(\lambda, f)\mathcal{C}(\lambda', g)\hat{\mathcal{C}}(\lambda', g), \qquad \lambda' = \mathcal{C}(\lambda, f)(1),$$
$$\mathcal{C}(\lambda, g_1\hat{g}_1.f) = \mathcal{C}(\lambda, g_1)\hat{\mathcal{C}}(\lambda, g_1)\mathcal{C}(\lambda, f)$$

qui montrent qu'on a

$$\{\mathcal{C}(\lambda, f.g\hat{g})\} = \{\mathcal{C}(\lambda, g_1\hat{g}_1.f)\} = \{\mathcal{C}(\lambda, f)\}. \tag{5}$$

Les formules (4), (5) montrent que la condition 3° de la définition II.3 est aussi satisfaite par la fonction $\mathcal{C}$ et le théorème II.1 est ainsi démontré.

THÉORÈME II.2. — *Une connexion* C *dans un espace non holonome fibré sur l'espace topologique* X, *de symbole* (Z, K, p, X), *définit un homomorphisme du groupe* $\mathcal{L}_{x_0}$ *sur un groupe* H_{x_0} *de permutations de la fibre* $p^{-1}(x_0)$.

En effet, l'application

$$(l, z_0) \to \mathrm{C}(z_0, f)(1) \qquad [f \in l \in \mathcal{L}_{x_0},\ z_0 \in p^{-1}(x_0)] \tag{6}$$

de $\mathcal{L}_{x_0} \times p^{-1}(x_0)$ sur $p^{-1}(x_0)$ définit une représentation φ_{C} du groupe $\mathcal{L}_{x_0}$ dans le groupe des permutations de l'ensemble $p^{-1}(x_0)$ et l'on a, pour $l \in \mathcal{L}_{x_0}$,

$$\varphi_{\mathrm{C}}(l):\quad z_0 \to \mathrm{C}(z_0, f)(1) \qquad (\{f\} = l). \tag{7}$$

Le groupe $\varphi_{\mathrm{C}}(\mathcal{L}_{x_0})$ est le groupe d'holonomie de la connexion C et nous le désignerons par le symbole $\mathrm{H}_{x_0}(\mathrm{C}) = \mathrm{H}_{x_0}$.

Posons pour simplifier l'écriture $\mathrm{Y} = p^{-1}(x_0) \subset \mathrm{Z}$, $l_{\mathrm{C}} = \varphi_{\mathrm{C}}(l)$. Considérons dans le produit cartésien $\mathcal{E}_{x_0} \times \mathrm{Y}$, la relation d'équivalence

$$(\lambda, y) \sim (l\lambda, l_{\mathrm{C}}^{-1}(y)) \qquad (l \in \mathcal{L}_{x_0}) \tag{8}$$

et désignons par $[\lambda, y]$ la classe du point (λ, y) par rapport à cette équivalence. Soit $\bar{\mathrm{Z}}$ l'espace quotient de $\mathcal{E}_{x_0} \times \mathrm{Y}$ par rapport à l'équivalence (8) et soit $\bar{p} : \bar{\mathrm{Z}} \to \mathrm{X}$ l'application donnée par

$$\bar{p}[\lambda, y] = \pi_{x_0}(\lambda). \tag{9}$$

Dans l'espace $\bar{\mathrm{Z}}$, considérons la famille $\bar{\mathrm{K}}$ des applications de la forme

$$t \to [\mathcal{C}(\lambda, f)(t), y] \qquad [t \in \mathrm{I},\ \pi_{x_0}(\lambda) = f(0)] \tag{10}$$

et considérons aussi la fonction $\bar{\mathrm{C}}$ qui associe au point $[\lambda, y]$ de $\bar{\mathrm{Z}}$ et au chemin f de X l'application (10) de I dans $\bar{\mathrm{Z}}$.

THÉORÈME II.3. — *Le symbole* $(\overline{Z}, \overline{K}, \overline{p}, X)$ *représente un espace topologique non holonome fibré sur l'espace topologique* X *et la fonction* $\overline{C}$ *est une connexion dans* $(\overline{Z}, \overline{K}, \overline{p}, X)$.

La démonstration est triviale.

Remarque. — La structure $(\overline{Z}, \overline{K}, \overline{p}, X)$ *et la connexion* $\overline{C}$ *ne dépendent que de la représentation* φ_C *du groupe* $\mathcal{L}_{x_0}$ *dans le groupe des permutations de l'ensemble* $Y = p^{-1}(x_0)$.

DÉFINITION II.4. — *Deux espaces non holonomes fibrés sur* X, (Z, K, p, X), $(\overline{Z}, \overline{K}, \overline{p}, X)$ *sont dits isomorphes s'il existe une application biunivoque* $\psi : \overline{Z} \to Z$ *de* $\overline{Z}$ *sur* Z *telle que* $\overline{p} = p \circ \psi$ *et si pour tout* $f \in K$, *on a* $\psi^{-1} \circ f \in \overline{K}$ *et si pour tout* $\overline{f} \in \overline{K}$, *on a* $\psi \circ \overline{f} \in K$.

Si C est une connexion dans (Z, K, p, X), l'ensemble des chemins $C(z_0, f)[f : I \to X,\ z_0 \in p^{-1}(f(0)) \subset Z]$ constitue une famille $K_C \subset K$ définissant une structure non holonome de Z.

DÉFINITION II.5. — *Soit* C *une connexion dans* (Z, K, p, X) *et* $\overline{C}$ *une connexion dans* $(\overline{Z}, \overline{K}, \overline{p}, X)$. *On dit que les structures* (Z, K, p, X, C), $(\overline{Z}, \overline{K}, \overline{p}, X, \overline{C})$ *sont isomorphes s'il existe un isomorphisme* ψ *des espaces non holonomes* (Z, K_C, p, X), $(\overline{Z}, \overline{K}_{\overline{C}}, \overline{p}, X)$ *tel que, pour tout* $\overline{z}_0 \in \overline{Z}$ *et* $f : I \to X$, $f(0) = \overline{p}(\overline{z}_0)$,

$$\psi \circ \overline{C}(\overline{z}_0, f) = C(\psi(z_0), f).$$

THÉORÈME II.4. — *Soit* φ *une représentation du groupe* $\mathcal{L}_{x_0}$ *dans le groupe des permutations d'un ensemble* Y. *Il existe une structure fibrée* (Z, K, p, X) *et une connexion* C *dans cette structure, telles que* Y *puisse être identifié à* $p^{-1}(x_0)$ *et telles que la représentation* φ_C *donnée par la formule* (7) *coïncide avec la représentation* φ. *La structure* (Z, K, p, X, C) *est unique, à un isomorphisme près.*

D'après la remarque qui suit le théorème II.3, il suffit de montrer que la structure $(\overline{Z}, \overline{K}, \overline{p}, X, \overline{C})$ construite dans le théorème II.3 est isomorphe à la structure (Z, K, p, X, C), si les ensembles $p^{-1}(x_0)$, $\overline{p}^{-1}(x_0)$ sont équivalents par une correspondance (biunivoque) qui transforme le groupe d'holonomie H_{x_0} de la dernière structure en l'image par φ du groupe $\mathcal{L}_{x_0}$.

Soit z un point arbitraire de l'espace Z. Si f est un chemin de X, allant de $p(z)$ à x_0, donc si $f(0) = p(z)$, $f(1) = x_0$, alors $C(z, f)$ est un chemin de Z, allant de z à un point y de $p^{-1}(x_0)$. Si l'on remplace le chemin f par un chemin f', équivalent à $f[\sigma(f) = \sigma(f')]$, la même construction nous conduit au même point y de $p^{-1}(x_0)$. Remplaçons maintenant le chemin f par un chemin f_1, allant de $p(z)$ à x_0, mais tel que $\sigma(f_1) \neq \sigma(f)$. On obtient alors, au lieu du point y, le point $y_1 = C(z, f_1)(1)$. Le point y_1 est en même temps l'extrémité (pour $t=1$) du chemin $C(y, \hat{f})C(z, f_1)$ qui coïncide avec l'extrémité du chemin $C(y, \hat{f}f_1)$, donc $y_1 = C(y, \hat{f}f_1)(1)$. Si l'on pose $\lambda = \sigma(f)$, $\lambda_1 = \sigma(f_1)$, on a $l = \sigma(\hat{f}f_1) = \lambda^{-1}\lambda_1 \in \mathcal{L}_{x_0}$ et d'après la formule (7), on a

$$y_1 = l_C(y), \qquad l_C = \varphi_C(l).$$

On a de même $\lambda_1^{-1} = l^{-1}\lambda^{-1}$ et les deux dernières formules nous montrent qu'on a

$$[\lambda^{-1}, y] = [\lambda_1^{-1}, y_1] \in \overline{Z}.$$

L'application $\psi : z \to [\lambda^{-1}, y]$ ne dépend donc pas du choix du chemin f; c'est une application de Z *sur* $\overline{Z}$, car pour tout point $\bar{z} = [\lambda, y] \in \overline{Z}$, on peut trouver un point $z \in Z$ tel que $\psi(z) = \bar{z}$; en effet, on peut prendre $z = C(y, f)(1)$, où $f \in \sigma^{-1}(\lambda)$. De plus, ψ est biunivoque, car le point z est évidemment unique.

Supposons que le point $z \in Z$ est une fonction continue du paramètre $t \in [0, 1]$, de la forme

$$z(t) = C(z_0, f_0)(t),$$

où f_0 est un chemin de X, ayant l'origine $f_0(0)$ en $p(z_0)$. On peut trouver pour chaque t le point $\psi(z(t))$ en considérant le chemin g_t défini par

$$\hat{g}_t = \varphi_0(f_0)_t \qquad [(f_0)_t : \ \tau \to f_0(t\tau), \tau \in I],$$

φ_0 étant un chemin de X allant de x_0 à $p(z_0)$. Le point $y = C(z(t), g_t)(1)$ ne dépend pas de t. On a donc

$$\psi(z(t)) = [\sigma(\varphi_0(f_0)_t), y] = \overline{C}([\sigma(\varphi_0), y], f_0),$$

donc

$$\psi \circ C(z_0, f_0) = \overline{C}(\psi(z_0), f_0),$$

d'où il en résulte que ψ est un isomorphisme des structures (Z, K_C, p, X, C), $(\overline{Z}, \overline{K}_{\overline{C}}, \bar{p}, X, \overline{C})$.

C. Q. F. D.

CHAPITRE III.

Cas des variétés différentiables.

1. Si X est une variété différentiable, de classe C^1, c'est naturel de considérer, non pas l'ensemble de tous les chemins de X, mais seulement l'ensemble des chemins *réguliers*, c'est-à-dire des chemins formés d'un nombre fini d'arcs ayant chacun un vecteur tangent continu non nul, (qui ne doit pas se raccorder continûment quand on passe d'un arc à un arc contigu). On peut aussi considérer les produits de ces chemins avec les chemins constants. Ces chemins seront appelés *admissibles*.

Si f, g sont deux chemins réguliers de X, liés par une formule de la forme

$$f = g \circ \varphi, \tag{1}$$

où φ est un homéomorphisme différentiable du segment $I = [0, 1]$, tel que $\varphi(0) = 0$, nous dirons que les deux chemins sont équivalents si l'on a de plus $\frac{d\varphi}{dt} \neq 0$ pour $t \in I$.

Si l'on a deux chemins f, g réguliers et si $f(1) = g(0)$, leur produit fg sera aussi un chemin régulier et si h est un troisième chemin régulier de X ayant $h(0) = g(1)$, les chemins réguliers $(fg)h$, $f(gh)$ sont équivalents.

Considérons encore les relations

$$f \sim e_{f(0)} f, \qquad f \sim f e_{f(1)} \tag{2}$$

qui lient un chemin f au produit de ce chemin avec les chemins constants correspondant aux extrémités de f. Et considérons enfin les relations

$$f \sim h\hat{h}.f, \qquad f \sim f.k\hat{k} \tag{3}$$

liant le chemin f aux chemins $h\hat{h}.f$, $f.k\hat{k}$, h étant un chemin régulier ayant l'origine en $f(0)$ et k ayant l'origine en $f(1)$.

Les relations (1), (2) et (3) engendrent une équivalence dans l'ensemble E′ des chemins admissibles de la variété X. Nous désignerons cette équivalence par le signe $\sim$ et les classes d'équivalence des chemins f par $\{f\}$.

L'espace $\mathcal{E}'_{x_0}$ des classes d'équivalence des chemins réguliers ayant l'origine en un point fixe x_0 de X admet une application $\pi'_{x_0} = \{f\} \to f(1)$ sur X et un groupe $\mathcal{L}'_{x_0}$ d'automorphismes

$$\{f\} \to \{gf\}, \tag{3'}$$

g étant un chemin régulier, fermé en x_0, de X.

On a pour cet espace un théorème analogue au théorème I.1. Comme nous l'avons fait dans le chapitre II, nous identifierons l'ensemble $\mathcal{L}'_{x_0}$ des classes des chemins fermés en x_0 avec le groupe des transformations (3′), qui est une représentation biunivoque de $\mathcal{L}'_{x_0}$.

De plus, on a des théorèmes analogues aux théorèmes du chapitre II, qu'on obtient en remplaçant la notion de connexion définie dans ce chapitre par la notion suivante : On appelle *connexion admissible*, dans un espace non holonome fibré (Z, K, p, X), une fonction $C : E' \to K$, satisfaisant aux conditions 1°, 2°, 3°, 4° de la définition II.3, où l'on remplace la relation $\sigma(f) = \sigma(g)$ par $f \sim g$.

2. Soit ds^2 une métrique riemannienne positivement définie de la variété différentiable X. Si f, g sont deux chemins réguliers de X, ayant l'origine en x_0, on peut trouver une *homotopie régulière* à origine fixe liant le chemin f

au chemin g. On peut donc trouver une application continue h de $I \times I$ dans X, définissant une surface $|h|$ dans X, formée d'un nombre fini de surfaces dont chacune possède des vecteurs tangents $\frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t}$ continus et satisfaisant aux conditions

$$(4) \qquad h(s, 0) = x_0, \qquad h(0, t) = f(t), \qquad h(1, t) = g(t).$$

On peut par exemple considérer la fonction

$$(5) \qquad h(s, t) = \begin{cases} f((1-2s)t) & \text{si } 0 \leqq s \leqq \frac{1}{2}, \\ g((2s-1)t) & \text{si } \frac{1}{2} \leqq s \leqq 1. \end{cases}$$

Pour chaque fonction h on peut considérer le nombre positif

$$(6) \qquad \rho(h) = \sigma(h) + l(h),$$

où $\sigma(h)$ est l'aire de la surface définie par h dans X et $l(h)$ est la longueur du chemin $s \rightarrow h(s, 1)$ parcouru par l'extrémité mobile du chemin f pendant la déformation de ce chemin dans le chemin g. Pour la fonction (5), le nombre $\rho(h)$ est égal à la somme des longueurs des chemins f, g. Désignons par $\rho(f, g)$ la borne inférieure de l'ensemble des nombres (6) correspondant à toutes les déformations admissibles de f en g, donc

$$(7) \qquad \rho(f, g) = \inf_h \rho(h) \qquad [h(s, 0) = x_0,\ h(0, t) = f(t),\ h(1, t) = g(t)].$$

La fonction $\rho(f, g)$ est un écart dans $\mathcal{E}'_{x_0}$, car si f_1, f_2, f_3 sont trois éléments de $\mathcal{E}'_{x_0}$ et si h_1 est une homotopie admissible de f_1 et f_2 et si h_2 est une homotopie admissible de f_2, f_3, la fonction

$$h(s, t) = \begin{cases} h_1(2s, t), & 0 \leqq s \leqq \frac{1}{2}, \\ h_2(2s-1, t), & \frac{1}{2} \leqq s \leqq 1 \end{cases}$$

sera une homotopie de f_1 et f_3 et l'on aura

$$\rho(h) = \rho(h_1) + \rho(h_2);$$

donc on a

$$\rho(f_1, f_3) \leqq \rho(h_1) + \rho(h_2)$$

quelles que soient les homotopies h_1, h_2 et il en résulte

$$\rho(f_1, f_3) \leqq \rho(f_1, f_2) + \rho(f_2, f_3).$$

L'écart ρ n'est pas une *distance*, car pour deux chemins équivalents $f_1 \sim f_2$, on a $\rho(f_1, f_2) = 0$. Cela est évident pour deux chemins liés par l'une des relations (1), (2), (3) et il en résulte pour deux chemins équivalents par l'équivalence engendrée par ces relations.

LEMME III.1. — *Si $f \sim f'$, $g \sim g'$, on a*

$$\rho(f, g) = \rho(f', g').$$

En effet, on a

$$\rho(f', g') \leqq \rho(f', f) + \rho(f, g) + \rho(g, g') = \rho(f, g)$$

et d'une manière symétrique,

$$\rho(f, g) \leqq \rho(f', g').$$

LEMME III.2. — *Si le chemin g est fermé, on a*

$$\rho(gf_1, gf_2) = \rho(f_1, f_2).$$

En effet, si h est une homotopie liant f_1 et f_2, la fonction

$$h'(s, t) = \begin{cases} g(2t) & \text{si} \quad 0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}, \qquad 0 \leqq s \leqq 1, \\ h(s, 2t-1) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leqq t \leqq 1, \qquad 0 \leqq s \leqq 1 \end{cases}$$

est une déformation de gf_1 et gf_2 et l'on a $\rho(h) = \rho(h')$ donc

$$\rho(gf_1, gf_2) \leqq \rho(f_1, f_2).$$

On a de même

$$\rho(f_1, f_2) = \rho(\hat{g} \cdot gf_1, \hat{g} \cdot gf_2) \leqq \rho(gf_1, gf_2).$$

L'écart ρ définit par projection, suivant l'application canonique $\sigma' : E' \rightarrow \mathcal{E}'$, un écart ρ dans $\mathcal{E}'$, qu'on obtient en posant

$$\rho(u, v) = \rho(f, g) \qquad [u = \{f\}, v = \{g\}].$$

L'écart ρ définit dans l'espace $\mathcal{E}'_{x_0}$ une structure uniforme, ayant pour base du filtre d'entourages les ensembles

$$V_\varepsilon = \{(u, v) \in \mathcal{E}'_{x_0} \times \mathcal{E}'_{x_0};\ \rho(u, v) < \varepsilon\}$$

et cette structure uniforme définit à son tour une topologie dans $\mathcal{E}'_{x_0}$. Le lemme 2 montre que les transformations du groupe $\mathcal{L}'_{x_0}$ conservent ces entourages, donc $\mathcal{L}'_{x_0}$ est un groupe d'automorphismes de l'espace uniforme $\mathcal{E}'_{x_0}$. On peut définir une topologie dans $\mathcal{L}'_{x_0}$ et transformer ce groupe en groupe continu de transformations de l'espace topologique $\mathcal{E}'_{x_0}$. Considérons à cet effet l'écart ρ_0 défini dans l'ensemble des chemins de X fermés en x_0 et déformables à ce point par la formule (7), où l'on suppose de plus qu'on a $h(s, 1) = x_0$. L'écart ρ_0, définit par projection sur $\mathcal{L}'_{x_0}$ un écart ρ_0 et l'on a le

LEMME III.3. — *Si g_1, $g_2 \in \mathcal{L}''_{x_0}$ et u_1, $u_2 \in \mathcal{E}'_{x_0}$, on a*

$$\rho(g_1 u_1, g_2 u_2) \leqq \rho_0(g_1, g_2) + \rho(u_1, u_2), \tag{8}$$

$\mathcal{L}''_{x_0}$ étant le sous-groupe invariant de $\mathcal{L}'_{x_0}$ formé par les classes des chemins homotopes à o.

Soit en effet h_0 une homotopie admissible liant deux chemins appartenant aux classes g_1, g_2 et soit h une homotopie admissible liant deux chemins appartenant aux classes u_1, u_2. La fonction

$$k(s, t) = \begin{cases} h_0(s, 2t), & 0 \leqq s \leqq 1, \quad 0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}, \\ h(s, 2t-1), & 0 \leqq s \leqq 1, \quad \frac{1}{2} \leqq t \leqq 1, \end{cases}$$

définit une homotopie qui lie deux chemins des classes $g_1 u_1$, $g_2 u_2$ et l'on a

$$\rho(k) = \rho(h_0) + \rho(h),$$

donc

$$\rho(g_1 u_1, g_2 u_2) \leqq \rho_0(g_1, g_2) + \rho(u_1, u_2).$$

La formule (8) montre que si l'on considère dans le groupe $\mathcal{L}'_{x_0}$ la topologie ayant pour système fondamental des voisinages en un point $g \in \mathcal{L}'_{x_0}$ l'ensemble des sphères $V^0_\varepsilon = \{g' \in \mathcal{L}'_{x_0};\ \rho_0(g' g^{-1}, \varepsilon_{x_0}) < \varepsilon\}$, alors $\mathcal{L}'_{x_0}$ devient un groupe topologique et l'on a le

THÉORÈME III.1. — *Le groupe topologique $\mathcal{L}'_{x_0}$, considéré comme groupe d'automorphismes de l'espace topologique $\mathcal{E}'_{x_0}$, est un groupe continu de transformations.*

Remarquons que la topologie induite par la topologie de l'espace uniforme $\mathcal{E}'_{x_0}$ dans le sous-espace $\mathcal{L}'_{x_0}$ est moins fine que la topologie définie dans $\mathcal{L}'_{x_0}$ par l'écart ρ_0, car pour g_1, $g_2 \in \mathcal{L}'_{x_0} \subset \mathcal{E}'_{x_0}$, on a

$$\rho(g_1, g_2) \leqq \rho_0(g_1, g_2).$$

3. Supposons la variété X de classe C^2.

Soit (Z, p, X) une variété différentiable de classe C^2, fibrée sur X, la projection $p : Z \to X$ étant de classe C^2, et de rang égal à la dimension de X, en chaque point de Z.

Soit $\{U_\alpha\}$ un recouvrement de X par un système de voisinages de coordonnées et soit $\{V_\lambda\}$ un recouvrement analogue pour la variété $Y = p^{-1}(x_0)$. Si $x^1, \ldots, x^n$ sont des coordonnées dans un voisinage U_α et si $y^1, \ldots, y^m$ sont des coordonnées dans un voisinage V_λ, on obtient un système de coordonnées dans $p^{-1}(U_\alpha)$ en considérant une application isomorphe $\psi_{\alpha\lambda}$ de $U_\alpha \times V_\lambda$ dans $p^{-1}(U_\alpha)$ et en associant à chaque point z de $\psi_{\alpha\lambda}(U_\alpha \times V_\lambda)$ les coordonnées $x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^m$ du point $(x, y) = \psi^{-1}_{\alpha\lambda}(z)$. On a dans ce cas $p(z) = x$.

Nous dirons qu'on a une *connexion infinitésimale* dans $\psi_{\alpha\lambda}(U_\alpha \times V_\lambda)$ si l'on a un système de m fonctions $\Gamma^j(x, y, dx)$, homogènes du premier degré en les variables $dx^1, \ldots, dx^n$. Le système des fonctions Γ^j définit une connexion admissible dans $\psi_{\alpha\lambda}(U_\alpha \times V_\lambda)$ à l'aide des formules

$$dy^j = \Gamma^j(x, y, dx) \qquad (j = 1, \ldots, m), \tag{9}$$

qui permettent d'associer à chaque chemin admissible

$$x^i = \varphi^i(t) \tag{9'}$$

de X et à chaque point z_0 de la fibre $p^{-1}(\varphi(0))$, un chemin de $\psi_{\alpha\lambda}(U_\alpha \times V_\lambda)$, obtenu en intégrant le système différentiel

$$\frac{dy^j}{dt} = \Gamma^j\left(x, y, \frac{dx}{dt}\right). \tag{10}$$

Nous dirons qu'on a une connexion infinitésimale dans la variété fibrée Z si l'on a associé à chaque paire d'indices (α, λ) un système de la forme (9), de manière que les connexions obtenues dans deux voisinages $\psi_{\alpha\lambda}(U_\alpha \times V_\lambda)$, $\psi_{\beta\mu}(U_\beta \times V_\mu)$ coïncident dans la partie commune de ces voisinages.

Si le chemin (9') est un parallélogramme infinitésimal, ayant l'origine en un point $x = (x^i)$ et les côtés dx^i, δx^i, le point y, solution du système (10), décrira un arc ayant pour extrémités le point $z_0 \in p^{-1}(x)$ et un point $z \in p^{-1}(x)$ dont les coordonnées y^j diffèrent de celles de z_0 par les quantités

$$\begin{aligned}\Delta y^j = {} & \frac{\partial \Gamma^j(x, y, dx)}{\partial x^i}\delta x^i - \frac{\partial \Gamma^j(x, y, \delta x)}{\partial x^i} dx^i \\ & + \Gamma^k(x, y, \delta x)\frac{\partial \Gamma^j(x, y, dx)}{\partial y^k} - \Gamma^k(x, y, dx)\frac{\partial \Gamma^j(x, y, \delta x)}{\partial y^k},\end{aligned} \tag{11}$$

abstraction faite des termes du troisième ordre en dx^i et δx^i. Si l'on suppose que Γ^j et donc $\dfrac{\partial \Gamma^j}{\partial x^i}$ sont des fonctions linéaires homogènes en dx^i, on peut encore écrire la formule (11) sous la forme

$$\Delta y^j = \sum_i \frac{\partial \Gamma^j(x, y, dx\,\delta x^i - \delta x\, dx^i)}{\partial x^i} + \sum_k \Gamma^j_k(x, y, u^k), \tag{11'}$$

où l'on a désigné par Γ^j_k les dérivées $\dfrac{\partial \Gamma^j}{\partial y^k}$ et par u^k le vecteur de composantes

$$u^{ki} = \Gamma^k(x, y, v^i),$$

v^i étant le vecteur de composantes

$$v^{if} = dx^f\,\delta x^i - dx^i\,\delta x^f \qquad (i, f = 1, \ldots, n). \tag{11''}$$

Si l'on introduit dans U_α un système de n formes de Pfaff, $ds^a = \lambda^a_i(x)\,dx^i$, telles que

$$ds^2 = (ds^1)^2 + \ldots + (ds^n)^2$$

et si l'on pose $\delta s^a = \lambda_i^a \delta x^i$, $\Gamma^j(x, y, dx) = \Lambda^j(x, y, ds)$, on peut écrire la formule précédente,

$$(12) \qquad \Delta y^j = \sum_i \frac{\partial \Lambda^j(x, y, \xi^i)}{\partial s^i} + \sum_k \frac{\partial \Lambda^j(x, y, \eta^k)}{\partial y^k},$$

où

$$\xi^i = (ds^1 \delta s^i - ds^i \delta s^1, ds^2 \delta s^i - ds^i \delta s^2, \ldots, ds^n \delta s^i - ds^i \delta s^n)$$

et

$$\eta^k = (\Gamma^k(x, y, \xi^1), \Gamma^k(x, y, \xi^2), \ldots, \Gamma^k(x, y, \xi^n))$$

sont $n+m$ vecteurs tangents à $X (i = 1, \ldots, n; k = 1, \ldots, m)$.

Nous dirons que la connexion C est *linéaire* si c'est une connexion définie dans un espace fibré vectoriel, donnée par des équations (9) dont les coefficients $\Gamma^j(x, y, dx)$ sont des fonctions linéaires et homogènes des y^j et des dx^i,

$$(12') \qquad \Gamma^j(x, y, dx) = \Lambda_k^j(x, dx) y^k, \qquad \Lambda_k^j(x, dx) = \Gamma_{ki}^j(x)\, dx^i = \Lambda_{ki}^j(x)\, ds^i.$$

Dans ce cas, les formules (12), (11') deviennent

$$(12'') \quad \Delta y^j = \sum_i \frac{\partial \Lambda_k^j(x, v^i)}{\partial x^i} y^k + \sum_l \Lambda_l^j(x, u^l) = \left(\sum_i \frac{\partial \Lambda_k^j(x, v^i)}{\partial x^i} + \sum_l \Gamma_{li}^j(x) \Lambda_k^l(x, v^i) \right) y^k,$$

v^i étant le vecteur de composantes (11'').

Nous démontrerons le théorème suivant :

THÉORÈME III.2. — *Supposons la variété* Z *compacte, douée d'une connexion infinitésimale dont le groupe d'holonomie* H_{x_0} *conserve une métrique finslérienne. Dans ce cas, l'homomorphisme canonique du groupe* $\mathcal{L}'_{x_0}$ *sur le groupe* H_{x_0} *est continu,* H_{x_0} *étant considéré comme groupe continu de transformations de l'espace métrique* $Y = p^{-1}(x_0)$, *donc doué de la topologie de la convergence uniforme.*

Démonstration. — Soit ds l'élément d'arc de l'espace de Riemann X et désignons par $M_{\alpha,\lambda}$ une borne supérieure des fonctions $|\Lambda^j(x, y, \xi)|$, $\left|\frac{\partial \Lambda^j(x, y, \xi)}{\partial y^l}\right|$, $\left|\frac{\partial \Lambda^j(x, y, \xi)}{\partial s^i}\right|$ quand le point y reste dans un domaine V'_λ ayant la fermeture $\overline{V}'_\lambda$ compacte et contenue dans V_λ et quand le point (x, ξ) varie dans l'espace fibré θ_α des vecteurs ξ, tangents à X en les points x d'un domaine U'_α ayant la fermeture $\overline{U}'_\alpha$ compacte et contenue dans U_α, les vecteurs ξ ayant de plus les longueurs au plus égales à 1.

Nous désignerons par $d\sigma$ l'aire du parallélogramme formé avec les vecteurs ds^i, δs^i,

$$d\sigma^2 = \sum_{i<j} (ds^i \delta s^j - ds^j \delta s^i)^2.$$

On a alors $ds^i \delta s^j - ds^j \delta s^i \leqq d\sigma$ et les vecteurs ξ^i ont leurs longueurs au plus égales à $d\sigma$.

Donc les vecteurs $\frac{\xi^i}{d\sigma}$ ont des longueurs majorées par 1 et l'on a dans $V'_\lambda \times \theta_\alpha$,

$$|\Gamma^j(x, y, \xi^i)| = \left|\Gamma^j\left(x, y, \frac{\xi^i}{d\sigma}\right)\right| d\sigma \leqq M_{\alpha,\lambda}\, d\sigma$$

et alors la longueur du vecteur η^k est au plus égale à

$$\sqrt{n}\, M_{\alpha,\lambda}\, d\sigma.$$

La formule (12) donne

$$|\Delta y^j| \leqq K_{\alpha,\lambda}\, d\sigma \qquad (K_{\alpha,\lambda} = n M_{\alpha,\lambda} + m\sqrt{n}\, M^2_{\alpha,\lambda}).$$

On peut couvrir la variété compacte Z par un nombre fini de voisinages de la forme $\psi_{\alpha\lambda}(U'_\alpha \times V'_\lambda)$. Désignons par $W_1, \ldots, W_p$ ces voisinages et soit K le plus grand des nombres $K_{\alpha,\lambda}$ correspondants. Soit

$$d\omega = F_{\alpha,\lambda}(x, y, dy)$$

l'élément d'arc de l'espace de Finsler $Y_x = p^{-1}(x)\,(x \in U'_\alpha)$ dans le voisinage $V_{\lambda,x} = \psi_{\alpha,\lambda}(\{x\} \times V_\lambda)$. La distance entre les points z_0, z obtenus l'un de l'autre en parcourant le parallélogramme ayant les côtés ds^i, δs^i sera

$$d\omega = F_{\alpha,\lambda}(x, y, \Delta y) \leqq K_{\alpha,\lambda} L_{\alpha,\lambda}\, d\sigma \leqq K L_{\alpha,\lambda}\, d\sigma,$$

où l'on a désigné par $L_{\alpha,\lambda}$ la borne supérieure de la fonction $F_{\alpha,\lambda}$ sur le produit cartésien du domaine U'_α avec l'espace fibré, des vecteurs tangents aux fibres Y_x en les points du domaine $\psi_{\alpha,\lambda}(U'_\alpha \times V'_\lambda)$ et ayant les longueurs plus petites ou égales à 1. Si l'on désigne par L le plus grand des nombres $L_{\alpha,\lambda}$ correspondants aux voisinages $W_1, \ldots, W_p$, on a la formule

$$d\omega \leqq KL\, d\sigma. \tag{13}$$

Cela étant, considérons un point z_0 de la fibre $Y = p^{-1}(x_0)$ et un élément l du groupe $\mathcal{L}'_{x_0}$ et soit f un chemin de la classe l. Supposons qu'on peut déformer ce chemin au point x_0, par une homotopie h ayant une aire $\rho(h)$ plus petite qu'un certain nombre positif ε. Divisons le rectangle $I \times I$ en un nombre de carrés $q_1, \ldots, q_r$, tels que chacun des ensembles $h(q_i)$ soit contenu dans l'un des voisinages $W_1, \ldots, W_p$. Supposons que les carrés q_i sont définis par des parallèles aux côtés du rectangle $I \times I$ et associons à chaque carré q_i un chemin l_i allant du point (0, 0) à un sommet a_i de q_i, de manière que la frontière φ de $I \times I$ soit un chemin équivalent au produit des chemins.

$$l_i \varphi_i \hat{l}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

φ_i étant la frontière de q_i. Dans l'image de h, le chemin $\varphi = l_1\varphi_1\hat{l}_1 \ldots l_r\varphi_r\hat{l}_r$ est équivalent à f et l'on aura

$$f = \lambda_1 f_1 \hat{\lambda}_1 \ldots \lambda_r f_r \hat{\lambda}_r, \qquad \text{où} \quad \lambda_i = h \circ l_i, \qquad f_i = h \circ \varphi_i. \tag{13'}$$

Désignons par z_1 la seconde extrémité du chemin de Z, ayant l'origine en z_0 et s'obtenant en relevant (à l'aide de la connexion infinitésimale de Z), le chemin $\lambda_1 f_1 \hat{\lambda}_1$. Soit z_2 le point obtenu de la même manière en considérant le point z_1 et le chemin $\lambda_2 f_2 \hat{\lambda}_2$ et désignons en général par z_i le point obtenu avec le point z_{i-1} et avec le chemin $\lambda_i f_i \hat{\lambda}_i$; avec le point z_{r-1} et avec le chemin $\lambda_r f_r \hat{\lambda}_r$, on obtiendra le point $z_r = z$.

La distance entre les points z_{i-1}, z_i est égale à la distance entre les points z'_{i-1}, z'_i qu'on obtient en relevant le chemin λ_i en partant succcessivement du point z_{i-1} et du point z_i. Or le point z'_i s'obtient du point z'_{i-1} en relevant le chemin φ_i et en partant du point z'_{i-1}. Donc la distance entre les points z_{i-1}, z_i est majorée par

$$|z_i, z_{i-1}| \leqq \mathrm{KL}\, d\sigma_i,$$

$d\sigma_i$ étant l'aire de la surface $h_i = h \mid q_i$. Il en résulte que la distance du point z_0 au point z qu'on obtient en partant du point z_0 et en relevant le chemin f, est majorée par la somme $\mathrm{KL}\sum_{i=1}^{r} d\sigma^i$. On a donc

$$(14) \qquad |z_0, l_{\mathrm{C}}(z_0)| \leqq \mathrm{KL}\,\rho(h) \qquad \text{et alors} \quad |z_0, l_{\mathrm{C}}(z_0)| \leqq \mathrm{KL}\,\rho_0(\varepsilon_{x_0}, l).$$

D'autre part, on obtient un système fondamental de voisinages de l'unité du groupe H_{x_0} en considérant les ensembles H_ε formés par les transformations $\mathrm{T} \in \mathrm{H}_{x_0}$ telles que

$$|z, \mathrm{T}(z)| \leqq \varepsilon$$

pour tout $z \in \mathrm{Y}$. On voit de la formule (14) que l'image inverse du voisinage H_ε, par l'homomorphisme canonique du groupe $\mathcal{L}'_{x_0}$ sur H_{x_0}, contient le voisinage de l'unité ε_{x_0} du groupe $\mathcal{L}'_{x_0}$, formé par les points ayant un écart à ε_{x_0} plus petit que $\frac{\varepsilon}{\mathrm{KL}}$. L'homomorphisme canonique de $\mathcal{L}'_{x_0}$ sur H_{x_0} est donc continu.

C. Q. F. D.

4. Considérons l'ensemble des connexions infinitésimales linéaires C_ι qu'on peut définir sur toutes les variétés fibrées vectorielles sur X. On obtient alors une famille de paires $(\mathrm{H}_\iota, \varphi_\iota)$, où H_ι est un groupe de transformations linéaires et φ_ι est un homomorphisme (algébrique) du groupe $\mathcal{L}'_{x_0}$ sur le groupe H_ι. Soit T la topologie la plus faible de l'espace $\mathcal{L}'_{x_0}$ pour laquelle tous les homomorphismes $\varphi_\iota : \mathcal{L}'_{x_0} \to \mathrm{H}_\iota$ sont des applications continues; le groupe H_ι étant considéré avec la topologie dans laquelle les ensembles d'une base du filtre des voisinages de l'unité de H_ι sont donnés par $\mathcal{H}_\varepsilon = \{(a^j_l); |a^j_l - \delta^j_l| < \varepsilon\}$; (a^j_l) et (δ^j_l) étant les matrices qui définissent un élément A et l'unité du groupe H_ι, dans une base de l'espace vectoriel $\mathrm{Y} = p^{-1}(x_0)$.

Considérons un recouvrement $\{\mathrm{U}'_\alpha\}$ de la variété X par une famille de voisinages de coordonnées homéomorphes à l'espace euclidien E^n, contenant le point x_0 et ayant chacun une fermeture $\overline{U'_\alpha}$ compacte et contenue dans un voisinage de coordonnées U_α. Désignons par $\mathcal{L}_{\alpha,l}$ le sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{L}'_{x_0}$, formé par les classes $\{f\}$ qui contiennent au moins un chemin admissible de X, contenu dans le domaine U'_α et ayant la longueur plus petite que l; nous supposons que l est un entier positif.

Dans l'ensemble $\mathcal{L}_{\alpha,l}$ nous définirons une topologie définie par un écart. Pour deux classes $\{f_0\}$, $\{f_1\} \in \mathcal{L}_{\alpha,l}$ considérons deux chemins f_0, f_1 et supposons qu'il existe une homotopie admissible $h : I \times I \to U'_\alpha$ ayant les propriétés

$$(15) \qquad h(0, t) = f_0(t), \qquad h(1, t) = f_1(t), \qquad h(s, 0) = h(s, 1) = x_0$$

et telle que chacun des chemins

$$(16) \qquad h_s : \quad t \to h(s, t)$$

ait une longueur plus petite que l. Nous désignerons par $\rho'(f_0, f_1)$ la borne inférieure des aires des images des homotopies satisfaisant à ces conditions. Le nombre $\rho'(f_0, f_1)$ ne dépend pas du choix des représentants f_0, f_1 choisis dans les classes $\{f_0\}$, $\{f_1\}$ et l'on peut le considérer comme une fonction de $\{f_0\}$ et $\{f_1\}$. Désignons par $\rho'(\{f_0\}, \{f_1\})$ cette fonction.

L'existence de l'homotopie h définit une relation d'équivalence dans l'ensemble $\mathcal{L}_{\alpha,l}$ et dans chacune des classes définies par cette équivalence, la fonction ρ' est un écart qui définit une topologie. L'ensemble $\mathcal{L}_{\alpha,l}$, considéré avec la somme de ces topologies sera appelé : l'espace topologique $\mathcal{L}_{\alpha,l}$.

Soit

$$i_{\alpha,l} : \quad \mathcal{L}_{\alpha,l} \subset \mathcal{L}$$

l'application d'inclusion de l'espace topologique $\mathcal{L}_{\alpha,l}$ dans le sous-ensemble $\mathcal{L} = \bigcup\limits_{\alpha,\, l} \mathcal{L}_{\alpha,l}$ de l'ensemble $\mathcal{L}'_{x_0}$. Nous désignerons par T′ la plus fine des topologies de $\mathcal{L}$ qui rendent simultanément continues toutes les applications $i_{\alpha,l}$. Un sous-ensemble D de $\mathcal{L}$ sera donc ouvert dans la topologie T′ si et seulement si tous les ensembles $i^{-1}_{\alpha,l}(D)$ sont ouverts.

LEMME III.4. — *La topologie* T′ *est plus fine que la topologie induite par* T *dans le sous-ensemble* $\mathcal{L}$ *de* $\mathcal{L}'_{x_0}$.

Démonstration. — Il faut montrer que si l'espace $\mathcal{L}$ est doué de la topologie T′, alors l'application composée $\varphi_C \circ i_{\alpha,l} : \mathcal{L}_{\alpha,l} \to H_{x_0}$ est continue, quelle que soit la connexion infinitésimale linéaire (homogène) C, dans n'importe quel espace fibré vectoriel (Z, p, X), différentiable de classe C^2. Il suffit donc de montrer que si $\mathcal{H}_{g_0,\varepsilon} = g_0 \mathcal{H}_\varepsilon$ est un voisinage d'un élément $g_0 = \varphi_C(\mathbf{t}_0)$ du groupe H_{x_0}, alors $i^{-1}_{\alpha,l} \circ \varphi^{-1}(\mathcal{H}_{g_0,\varepsilon})$ est un voisinage de $\mathbf{t}_0$ dans chacun des espaces $\mathcal{L}_{\alpha,l}$ qui contiennent $\mathbf{t}_0$. On doit donc trouver pour chaque indice (α, l) un nombre positif $\eta_{\alpha,l,\varepsilon}$, tel que $\varphi_C(\mathbf{t}) \in \mathcal{H}_{g_0,\varepsilon}$ pour tout $\mathbf{t} \in \mathcal{L}_{\alpha,l}$ ayant l'écart ρ' à $\mathbf{t}_0$ plus petit que $\eta_{\alpha,l,\varepsilon}$, donc tel que

$$\rho'_{\alpha,l}(\mathbf{t}, \mathbf{t}_0) < \eta_{\alpha,l,\varepsilon}.$$

Soit U_α un domaine de coordonnées de X contenant le point x_0 et soit $(x^1, \ldots, x^n)$ un système de coordonnées admissibles dans U_α; soit de plus U'_α un domaine de X ayant la fermeture $\overline{U'_\alpha}$ compacte et contenue dans U_α.

Soit f_0 un chemin de U'_α, fermé en x_0 et désignons par $\mathcal{L}^0_{\alpha,l}$ la composante connexe de l'espace topologique $\mathcal{L}_{\alpha,l}$, qui contient le point $\mathbf{t}_0 = \{f_0\}$. Soit encore $\mathbf{t}$ un point de cette composante, f un chemin de la classe $\mathbf{t}$ et h une homotopie admissible liant les chemins f_0, f, vérifiant les conditions (15) et telle que les longueurs des chemins (16) soient inférieures à l. Nous allons donner une évaluation des différences $|a^j_l - \delta^j_l|$ formées avec les coefficients de la matrice

$$(a^j_l) = \varphi_C(\mathbf{t}.\mathbf{t}_0^{-1}) = \varphi_C(\mathbf{t})\, g_0^{-1} \qquad [g_0 = \varphi_C(\mathbf{t}_0)].$$

Remplaçons à cet effet le chemin $\mathbf{t}.\mathbf{t}_0^{-1}$ par un produit de la forme (13'). Si l'on désigne par y_0 un point de la fibre Y et par y_p le point de cette fibre qu'on obtient en relevant le chemin

$$\bar{f}_p = \lambda_1 f_1 \hat{\lambda}_1 \ldots \lambda_p f_p \hat{\lambda}_p \tag{17}$$

en partant du point y_0, on aura les relations de récurrence

$$y_{p+1} = \varphi_c(\{\hat{\lambda}_{p+1}\}\{f_{p+1}\}\{\lambda_{p+1}\})(y_p)$$

qui donneront des relations de la forme

$$y^j_{p+1} = y^j_p + (\Delta y_p)^j + \overset{p}{\varepsilon}{}^j_l\, y^l_p\, d\sigma_{p+1}, \tag{18}$$

$d\sigma_{p+1}$ étant l'aire du parallélogramme $h(q_{p+1})$, où $\overset{p}{\varepsilon}{}^j_l$ sont des quantités qui tendent vers zéro avec $d\sigma_{p+1}$ et où Δy_p est la partie principale de l'accroissement subi par le vecteur y_p quand on transporte ce vecteur le long du chemin $\lambda_{p+1} f_{p+1} \hat{\lambda}_{p+1}$. Calculons cet accroissement. Le transport de y_p le long du chemin λ_{p+1} donne au sommet $x_{p+1} = h(a_{p+1})$ le vecteur de composantes

$$\bar{y}^j_p = \overset{p+1}{\Lambda}{}^j_l\, y^l_p, \tag{19}$$

où $\overset{p}{\Lambda} = \left(\overset{p}{\Lambda}{}^j_l\right)$ est la matrice qu'on obtient en intégrant le système différentiel

$$\frac{d\overset{p+1}{\Lambda}}{dt} = \frac{\overset{p+1}{A}}{dt}\overset{p+1}{\Lambda} \tag{20}$$

avec les conditions initiales $\overset{p+1}{\Lambda}{}^j_l = \delta^j_l$, $\overset{p+1}{A}$ étant la matrice des $A^j_l(x, dx)$, où l'on a remplacé les x^i par les fonctions qui définissent le chemin λ_{p+1}.

On peut écrire symboliquement les équations (19) sous la forme

$$\bar{y}_p = \overset{p+1}{\Lambda} y_p.$$

Le transport du vecteur $\bar{y}_p$ le long du chemin f_{p+1} donne un vecteur de la fibre $Y_{x_{p+1}}$, ayant la forme

$$\bar{y}'_p = \bar{y}_p + \Delta\bar{y}_p = \bar{y}_p + \overset{p+1}{R}\,\bar{y}_p\,d\sigma_{p+1} + \overset{p+1}{\varepsilon}\,\bar{y}_p\,d\sigma_{p+1},$$

$\overset{p+1}{R} = \left(\overset{p+1}{R^j_l}\right)$ étant la matrice calculée en x_{p+1} et déduite des formules ($12''$) et $\overset{p+1}{\varepsilon}$ étant une matrice dont les éléments tendent vers zéro avec $d\sigma_{p+1}$. On a donc

$$\bar{y}'_p = \overset{p+1}{\Lambda}\,y_p + \overset{p+1}{R}\,\overset{p+1}{\Lambda}\,y_p\,d\sigma_{p+1} + \overset{p+1}{\varepsilon}\,\overset{p+1}{\Lambda}\,y_p\,d\sigma_{p+1}$$

et le transport du vecteur $\bar{y}'_p$ le long du chemin $\hat{\lambda}_{p+1}$ donnera le vecteur

$$y_{p+1} = \left(\overset{p+1}{\Lambda}\right)^{-1}\bar{y}'_p = y_p + \left(\left(\overset{p+1}{\Lambda}\right)^{-1}\left(\overset{p+1}{R} + \overset{p+1}{\varepsilon}\right)\overset{p+1}{\Lambda}\right)y_p\,d\sigma_{p+1} \tag{21}$$

appartenant à la fibre $Y = p^{-1}(x_0)$.

Désignons par r_α une borne supérieure des coefficients R^j_l, définis dans l'espace compact des facettes planes, tangentes à X en les points de $\overline{U}'_\alpha$ et ayant l'aire égale à 1. Désignons par A_α une borne supérieure des coefficients A^j_l définis dans l'espace compact des vecteurs unitaires tangents à X en les points de l'ensemble compact $\overline{U}'_\alpha$.

Désignons par s l'arc du chemin λ_{p+1}, calculé en partant du point x_0 et écrivons l'équation (20) sous la forme

$$\frac{d\overset{p+1}{\Lambda}}{ds} = A\left(x, \frac{dx}{ds}\right)\overset{p+1}{\Lambda}.$$

En appliquant à cette équation la méthode des approximations successives, on trouve que les éléments λ^i_j, λ'^i_j des matrices $\overset{p+1}{\Lambda}$, $\left(\overset{p+1}{\Lambda}\right)^{-1}$ ont les modules majorés par

$$\delta^i_j + \frac{1}{m}(e^{A_\alpha lm} - 1) \qquad (m = \dim Y).$$

Il en résulte, en utilisant la formule (21), que les éléments $\overset{p+1}{F^i_j}$ de la matrice $\overset{p+1}{F} = \varphi_C(\{\lambda_{p+1} f_{p+1}\,\hat{\lambda}_{p+1}\})$ sont majorés par le nombre

$$\delta^i_j + (\varepsilon' + r_\alpha)\,e^{2A_\alpha lm}\,d\sigma_{p+1},$$

ε' étant la plus grande des valeurs absolues des nombres $\overset{p+1}{\varepsilon^j_l}$. Si l'on désigne par U la matrice ayant tous les éléments égaux à 1 et par E la matrice unité, il en résulte que les éléments de la matrice $\overset{p+1}{F}$ ont les valeurs absolues majorées par les éléments de la matrice

$$\exp((\varepsilon' + r_\alpha)\,e^{2mlA_\alpha}\,d\sigma_{p+1}\,U),$$

donc les éléments de la matrices $F' = \overset{1}{F}\overset{2}{F}\ldots\overset{r}{F}$ sont majorés en valeurs absolues par les éléments correspondants de la matrice

$$\exp((\varepsilon' + r_\alpha)\,e^{2mlA_\alpha}\,\rho(h)\,U),$$

$\rho(h) = \lim(d\sigma_1 + \ldots + d\sigma_r)$ étant l'aire de l'image de h. Cette majoration étant vraie quelle que soit l'homotopie h et la décomposition (13′) de cette homotopie, il en résulte que les valeurs absolues des éléments de la matrice F' sont majorées par les éléments correspondants de la matrice

$$\exp(r_\alpha e^{2ml\Lambda_\alpha} \rho'(\mathbf{t}_0, \mathbf{t})\mathrm{U}) = \mathrm{E} + k_\alpha \mathrm{U},$$

où

$$k_\alpha = \frac{1}{m}(e^{r_\alpha m e^{2ml\Lambda_\alpha} \rho'_{\alpha,l}(\mathbf{t}_0, \mathbf{t})} - 1).$$

Il en résulte que si l'on choisit le nombre $\eta_{\alpha,l,\varepsilon}$ égal à

$$\eta_{\alpha,l,\varepsilon} = \frac{\log(1 + m\varepsilon)}{mr_\alpha e^{2ml\Lambda_\alpha}},$$

alors on aura $\varphi_{\mathrm{C}}(\mathbf{t}) \in \mathcal{H}_{g_0,\varepsilon}$ pour tout $\mathbf{t} \in \mathcal{L}_{\alpha,l}$ ayant l'écart à $\mathbf{t}_0$ plus petit que $\eta_{\alpha,l,\varepsilon}$, donc ayant

$$\rho'(\mathbf{t}, \mathbf{t}_0) < \eta_{\alpha,l,\varepsilon}.$$

Ce résultat montre que l'application $\varphi \circ i_{\alpha,l} : \mathcal{L}_{\alpha,l} \to \mathrm{H}_{x_0}$ est continue;

C. Q. F. D.

Lemme III.5. — *La topologie* T *transforme le groupe $\mathcal{L}'_{x_0}$ en groupe topologique.*

En effet, les ensembles de la forme $\varphi_\iota'^{-1}(\mathrm{D}_\iota)$, où D_ι est un ensemble ouvert du groupe topologique H_ι, forment une sous-base pour la topologie T. Pour démontrer la continuité de l'application de produit groupal

$$\mu : \quad \mathcal{L}'_{x_0} \times \mathcal{L}'_{x_0} \to \mathcal{L}'_{x_0},$$

il suffit de montrer que $\mu^{-1} \circ \varphi_\iota^{-1}(\mathrm{D}_\iota)$ est un ensemble ouvert de $\mathcal{L}'_{x_0} \times \mathcal{L}'_{x_0}$. Or, cela résulte du fait qu'on a $\varphi_\iota \circ \mu = \mu_\iota \circ (\varphi_\iota \times \varphi_\iota)$, μ_ι étant l'application de produit groupal dans H_ι,

$$\mu_\iota : \quad \mathrm{H}_\iota \times \mathrm{H}_\iota \to \mathrm{H}_\iota,$$

et du fait que φ_ι et μ_ι, et aussi $\varphi_\iota \times \varphi_\iota$ sont des applications continues. Un raisonnement analogue montre que l'application $\mathbf{t} \to \mathbf{t}^{-1}$ de $\mathcal{L}'_{x_0}$ sur lui-même est aussi continue. Donc $\mathcal{L}'_{x_0}$, doué de la topologie T, est un groupe topologique.

C. Q. F. D.

Théorème d'Ambrose et Singer. — *L'algèbre de Lie du groupe d'holonomie* H_{x_0} *est engendrée par les éléments*

$$\Lambda^{-1}\mathrm{R}(x, dx, \delta x)\Lambda, \tag{22}$$

$\mathrm{R}(x, dx, \delta x)$ *étant la transformation qui indique comment se transforment les vecteurs de la fibre* $\mathrm{Y}_x = p^{-1}(x)$ *quand on parcourt le parallélogramme infinité-*

simal construit sur les vecteurs $x+dx$, $x+\delta x$; et Λ étant la matrice qu'on obtient en intégrant le système différentiel

$$\frac{d\Lambda}{dt}=\mathrm{A}\left(x,\frac{dx}{dt}\right)\Lambda, \tag{23}$$

le long d'un chemin de X *allant de x_0 à x.*

Démonstration. — Supposons possible le cas contraire, où les éléments (22) appartiennent à une sous-algèbre Q de l'algèbre de Lie P du groupe H_{x_0}. Q est alors un idéal de l'algèbre P, étant un invariant du groupe adjoint linéaire du groupe H_{x_0}. Soit $(\mathrm{Q}_1, \ldots, \mathrm{Q}_r)$ une base de l'algèbre Q et complétons cette base à une base de P, en ajoutant les éléments $\mathrm{K}_1, \ldots, \mathrm{K}_s$.

Soit $\mathcal{E}$ l'espace des endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathrm{Y}=p^{-1}(x_0)$. On peut identifier $\mathcal{E}$ à l'espace des matrices d'ordre égal à dim Y. L'application a du groupe H_{x_0} dans le groupe des automorphismes de $\mathcal{E}$, donnée par

$$\mathrm{S}\to\mathrm{S}^a\quad(\mathrm{S}\in\mathrm{H}_{x_0}),\qquad \mathrm{S}_a:\ \mathfrak{T}\to\mathrm{S}\mathfrak{T}\mathrm{S}^{-1}\quad(\mathfrak{T}\in\mathcal{E}) \tag{23'}$$

définit un espace fibré différentiable (E, π, X), ayant $\mathcal{E}$ pour fibre. La même application définit dans cette espace fibré, d'après le théorème II, une connexion dans cet espace. Cette connexion est définie, comme on peut s'assurer immédiatement, par les équations

$$d\mathfrak{T}=[\mathrm{A}(x, dx), \mathfrak{T}]=\mathrm{A}(x, dx)\mathfrak{T}-\mathfrak{T}\mathrm{A}(x, dx); \tag{24}$$

choisissons une base dans l'espace vectoriel Y et transportons cette base, le long d'une famille $\mathcal{F}$ de chemins admissibles de X ayant l'origine en x_0, à l'aide de la connexion de (Z, p, X). Nous supposerons que la famille considérée a la propriété que par chaque point d'un voisinage ouvert U de x_0 il passe une courbe de la famille et une seule. On obtient alors un système de coordonnées dans $p^{-1}(\mathrm{U})$, ayant la propriété que les matrices $\mathrm{A}(x, dx)$ appartiennent à l'algèbre de Lie P de H_{x_0}, pour chaque point $x\in\mathrm{U}$. On a donc des formules de la forme

$$\mathrm{A}(x, dx)=q^i(x, dx)\mathrm{Q}_i+k^\alpha(x, dx)\mathrm{K}_\alpha. \tag{25}$$

Considérons la variation $\Delta\mathfrak{T}$ subie par l'élément $\mathfrak{T}\in\mathcal{E}$ quand on parcourt le parallélogramme construit sur les vecteurs $x+dx$, $x+\delta x$; la formule (24) donne

$$\Delta\mathfrak{T}=[\delta\mathrm{A}(x, dx)-d\mathrm{A}(x, \delta x)+[\mathrm{A}(x, dx), \mathrm{A}(x, \delta x)], \mathfrak{T}]. \tag{26}$$

D'autre part, de la formule (25) on déduit, en tenant compte que l'algèbre Q est un idéal de P,

$$\begin{aligned}
&\delta\mathrm{A}(x, dx)-d\mathrm{A}(x, \delta x)+[\mathrm{A}(x, dx), \mathrm{A}(x, \delta x)]\\
&\quad=\{\delta q^i(x, dx)-dq^i(x, \delta x)+c^i_{jk}q^j(x, dx)q^k(x, \delta x)\\
&\qquad+c^i_{j\alpha}(q^j(x, dx)k^\alpha(x, \delta x)-q^j(x, \delta x)k^\alpha(x, dx))+c^i_{\alpha\beta}k^\alpha(x, dx)k^\beta(x, \delta x)\}\mathrm{Q}_i\\
&\qquad+\{\delta k^\alpha(x, dx)-dk^\alpha(x, \delta x)+c^\alpha_{\beta\gamma}k^\beta(x, dx)k^\gamma(x, \delta x)\}\mathrm{K}_\alpha,
\end{aligned}$$

$c^{u}_{\nu\omega}$ étant les constantes de structure de l'algèbre P, relativement à la base $(Q_1, \ldots, Q_r, K_1, \ldots, K_s)$. Or le premier membre de l'équation précédente appartient, par l'hypothèse faite, à l'algèbre Q. On a donc les formules

$$(27) \qquad \delta k^{\alpha}(x, dx) - dk^{\alpha}(x, \delta x) + c^{\alpha}_{\beta\gamma} k^{\beta}(x, dx) k^{\gamma}(x, \delta x) = 0.$$

Considérons la représentation η de H_{x_0} dans l'espace $\mathcal{E}'$ des classes de transitivité du groupe $\tilde{\mathcal{H}}$ qui opère dans $\mathcal{E}$ et est formé par les transformations (23′), S parcourant le groupe connexe $\mathcal{H}(Q)$ correspondant à la sous-algèbre Q de P. Si l'on désigne par $\{\mathfrak{T}\}$ la classe de transitivité du groupe $\tilde{\mathcal{H}}$ contenant l'élément $\mathfrak{T}$ de $\mathcal{E}$, la représentation η sera définie par la formule $\eta : V \to V^{\eta}\ (V \in H_{x_0})$, V^{η} étant l'application

$$V^{\eta} : \quad \{\mathfrak{T}\} \to \{V\mathfrak{T}V^{-1}\}$$

et le noyau de la représentation η sera le groupe $\mathcal{H}(Q)$. La représentation composée $\eta \circ \varphi_C : \mathcal{L}'_{x_0} \to \tilde{\mathcal{H}}$ définit, d'après l'analogue différentiable du théorème II.4 un espace $(\tilde{Z}, \tilde{p}, X)$, fibré sur X, ayant $\mathcal{E}'$ pour fibre, et une connexion $\tilde{C}$ dans cet espace fibré, ayant le groupe d'holonomie isomorphe au groupe $\tilde{\mathcal{H}}$. L'espace fibré $(\tilde{Z}, \tilde{p}, X)$ est l'espace quotient de (E, π, X) et de l'équivalence définie par $e \sim e'$, e' étant le point de E qu'on obtient en relevant, à partir de e, un chemin admissible de X, fermé en x_0, appartenant à une classe contenue dans le noyau de $\eta \circ \varphi_C$. L'application $e \to e'$ étant différentiable de classe C^2, il en résulte que $(\tilde{Z}, \tilde{p}, \tilde{X})$ est un espace fibré différentiable.

On peut obtenir facilement la connexion $\tilde{C}$ qui est une connexion infinitésimale. En effet, désignons par $\{\lambda_\sigma\}$ un système de $N = (\dim Y)^2 - \dim Q$ fonctions admissibles définies dans un domaine de l'espace $\mathcal{E}$, invariantes par le groupe $\tilde{\mathcal{H}}$ et telles que l'application $\mathfrak{T} \to \{\lambda_\sigma(\mathfrak{T})\}$, $\mathfrak{T} \in \mathcal{E}$ de $\mathcal{E}$ dans R^N soit de rang égal à N. On peut alors considérer les fonctions λ_σ comme des coordonnées dans un voisinage de l'espace $\mathcal{E}'$. Si l'on transporte par « parallélisme » le système de coordonnées $\{\lambda_\sigma\}$, le long des chemins de la famille $\mathcal{F}$, on obtient un système de coordonnées dans chaque fibre $\tilde{p}^{-1}(x)$, avec $x \in U$ dépendant continûment du point x. La connexion sera alors définie par des formules de la forme

$$(28) \qquad d\lambda_\sigma = k^{\alpha}(x, dx)\,\Phi_{\alpha\sigma}(\lambda),$$

$\Phi_{\alpha\sigma}(\lambda)$ étant les fonctions des λ qu'on obtient de la formule

$$(29) \qquad \Phi_{\alpha\sigma} = \frac{\partial \lambda_\sigma}{\partial T^{j}_{l}}\left(K^{j}_{\alpha j'} T^{j'}_{l} - K^{j'}_{\alpha l} T^{j}_{j'}\right) \qquad [K_\alpha = (K^{j}_{\alpha j'})],$$

$\mathfrak{T} = (T^{j}_{l}) \in \mathcal{E}$ étant un élément dont la classe $\{\mathfrak{T}\}$ a les coordonnées égales à λ_σ. On a, en effet

$$d\lambda_\sigma = \frac{\partial \lambda_\sigma}{\partial T^{j}_{l}}\, dT^{j}_{l} = \frac{\partial \lambda_\sigma}{\partial T^{j}_{l}}\, q^{i}[Q_i, \mathfrak{T}]^{j}_{l} + \frac{\partial \lambda_\sigma}{\partial T^{j}_{l}}\, k^{\alpha}[K_\alpha, \mathfrak{T}]^{j}_{l}$$

et le premier terme du dernier membre s'annule, car les fonctions λ_σ sont invariantes par rapport au groupe $\tilde{\mathcal{H}}$. De plus, le coefficient de k^α du second terme doit être une fonction des λ, car les $d\lambda_\sigma$ doivent être déterminées, dès qu'on connaît le vecteur $x+dx$ et le point $\{\mathcal{E}\}$, donc $\{\lambda_\sigma\}$.

Des formules (27) et (28), on déduit que la variation $\Delta\lambda_\sigma$ de λ_σ correspondant au parallélogramme construit sur les vecteurs $x+dx$, $x+\delta x$, est donnée par la formule

$$\Delta\lambda_\sigma = \left(\frac{\partial\Phi_{\alpha\sigma}}{\partial\lambda_\tau}\Phi_{\beta\tau} - \frac{\partial\Phi_{\beta\sigma}}{\partial\lambda_\tau}\Phi_{\alpha\tau} - c^\gamma_{\alpha\beta}\Phi_{\gamma\sigma}\right)k^\alpha(x, dx)\,k^\beta(x, \delta x).$$

Or la parenthèse s'annule identiquement, car les formules (28) définissent les transformations infinitésimales d'un groupe de Lie ayant pour constantes de structure les quantités $c^\gamma_{\alpha\beta}$. On a donc

$$\Delta\lambda_\sigma = 0.$$

Il en résulte que le groupe d'holonomie de la connexion $\tilde{C}$ est un groupe discret, donc le groupe $\mathcal{H}(Q)$ coïncide avec la composante connexe de l'unité dans le groupe H_{x_0} et alors l'algèbre de Lie Q de $\mathcal{H}(Q)$ coïncide avec P.

C. Q. F. D.

Théorème III.3. — *Pour toute connexion infinitésimale linéaire* C, *l'application canonique* $\varphi_C : \mathcal{L}_{x_0} \to H_{x_0}$ *est ouverte.*

En effet, nous devons montrer que l'image φ_C d'un voisinage $\mathcal{A}$ de l'unité ε_{x_0} de $\mathcal{L}'_{x_0}$ est un voisinage de l'unité du groupe H_{x_0}. D'après le lemme III.4, le voisinage $\mathcal{A}$ contient un voisinage $\mathcal{A}'$ de ε_{x_0} dans la topologie T′ de $\mathcal{L}$. Il suffit donc de montrer que $\varphi_C(\mathcal{A}')$ est un voisinage de l'unité du groupe H_{x_0}.

D'après le théorème d'Ambrose et Singer, on peut trouver un nombre fini d'éléments de la forme (22), qui engendrent l'algèbre de Lie P du groupe H_{x_0}. Soient $P_1, \ldots, P_s$ ces éléments. Chacun de ces éléments P_i est associé à une facette plane $(x_{(i)}, dx_{(i)}, \delta x_{(i)})$, tangente à X en un point $x_{(i)}$ de X, et à un chemin $f_{(i)}$ liant les points x_0, $x_{(i)}$. On peut construire pour chaque P_i une application admissible

$$h_{(i)} :\quad I\times I \to X,\qquad h_{(i)}(0, t) = (f_{(i)}\hat{f}_{(i)})(t),\qquad h_{(i)}(s, 0) = h_{(i)}(s, 1) = x_0;$$
$$h_{(i)}\left(s, \frac{1}{2}\right) = x_{(i)},$$

dont l'image soit tangente en $x_{(i)}$ à la facette $(x_{(i)}, dx_{(i)}, \delta x_{(i)})$.

L'algèbre P étant engendrée par les éléments $P_1, \ldots, P_s$, on peut trouver une base de P formée par un nombre fini de produits (finis) des éléments P_i. Soient $(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_r)$ la base ainsi obtenue ($r = \dim P$).

Nous allons associer à chaque produit (dans l'algèbre P) Π d'éléments $P_1, \ldots, P_s$ une application $h^\Pi : I\times I \to X$ définissant une déformation continue d'un chemin fermé en x_0, à un chemin équivalent au chemin constant $e_{x_0}: \mathrm{I} \to x_0$. Si $\Pi = [\mathrm{P}_i, \mathrm{P}_j]$, nous poserons $h^{\Pi}(s, t) = h_s^{\Pi}(t)$, où

$$h_s^{\Pi} = (h_i)_{\sqrt{s}} (h_j)_{\sqrt{s}} (\hat{h}_i)_{\sqrt{s}} (\hat{h}_j)_{\sqrt{s}},$$

où nous désignerons en général par h_s le chemin associé à l'homotopie h et au point $s \in \mathrm{I}$ et défini par la formule

$$h_s: \quad t \to h(s, t).$$

En général, si $\Pi = [\Pi_1, \Pi_2]$, nous poserons

$$h_s^{\Pi} = h_{\sqrt{s}}^{\Pi_1} h_{\sqrt{s}}^{\Pi_2} \hat{h}_{\sqrt{s}}^{\Pi_1} \hat{h}_{\sqrt{s}}^{\Pi_2}.$$

Supposons qu'on a donc associé aux éléments $\Pi_1, \ldots, \Pi_r$, de la base de l'algèbre P des déformations admissibles $h^{\Pi_1}, \ldots, h^{\Pi_r}$.

Considérons l'application $\xi : \mathrm{I}^r \to \mathcal{L}'_{x_0}$, définie par

$$\xi(s_1, \ldots, s_r) = \{ h_{s_1}^{\Pi_1} h_{s_2}^{\Pi_2} \ldots h_{s_r}^{\Pi_r} \} \in \mathcal{L}'_{x_0};$$

chaque produit Π a un certain « degré » par rapport aux éléments $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_s$. Soit S la somme des degrés des produits $\Pi_1, \ldots, \Pi_r$ de la base de P. Soit W un voisinage de l'unité ε_{x_0} de $\mathcal{L}'_{x_0}$ tel que $\mathrm{W}^{\mathrm{S}} \subset \mathfrak{A}$.

Considérons pour chaque indice $i (i = 1, \ldots, s)$ un chemin l_i allant de x_0 à $x_{(i)}$ et contenu dans un voisinage de coordonnées de X. Soit W′ un voisinage de ε_{x_0} tel que

$$\{f_i\}\{\hat{l}_i\}\mathrm{W}'\{l_i\}\{\hat{f}_i\} \subset \mathrm{W} \tag{30}$$

pour chaque i.

Soit enfin $\tilde{\mathrm{W}}$ un voisinage de ε_{x_0} dans l'espace topologique $\mathcal{L}$, tel que $\tilde{\mathrm{W}} \subset \mathrm{W}'$.

Pour chaque indice $j \leq r$, on peut trouver un nombre $\nu_j \in [0, 1]$ tel que les classes des chemins $l_j \hat{f}_j h_s^{\Pi_j} f_j \hat{l}_j (s \in [0, \nu_j])$ soient toutes contenues dans $\tilde{\mathrm{W}} \subset \mathrm{W}'$. Dans ce cas nous aurons, d'après (30),

$$\{ h_s^{\Pi_j} \} \in \mathrm{W}, \qquad (s \in [0, \nu_j])$$

et alors, en tenant compte que $\mathrm{W}^{\mathrm{S}} \subset \mathfrak{A}$, on obtient

$$\xi(s_1, \ldots, s_r) \in \mathfrak{A} \qquad (s_j \in [0, \nu_j]; j = 1, \ldots, r). \tag{31}$$

D'autre part, l'application composée $\varphi_{\mathrm{C}} \circ \xi : \mathrm{I}^r \to \mathrm{H}_{x_0}$ est différentiable et a le rang dans le point $(0, \ldots, 0) \in \mathrm{I}^r$ égal à $\dim \mathrm{P} = \dim \mathrm{H}_{x_0}$. Il en résulte que l'image de $\varphi_{\mathrm{C}} \circ \xi$ est un voisinage de l'unité du groupe H_{x_0} et comme on a la relation (31), il en résulte que $\varphi(\mathfrak{A})$ est un voisinage de l'unité de H_{x_0}.

C. Q. F. D.

5. Considérons la famille des classes d'équivalence des connexions infinitésimales linéaires qu'on peut définir dans les espaces fibrés différentiables vecto-

riels, ayant la variété X pour base. A chaque classe d'équivalence on peut associer, comme on a vu, un homomorphisme continu et ouvert φ_ι du groupe $\mathcal{L}'_{x_0}$ sur un groupe de Lie linéaire H_ι. Si $\psi : H_\iota \to H$ est un homomorphisme du groupe de Lie H_ι sur un groupe de Lie linéaire H, la représentation $\psi \circ \varphi_\iota = \mathcal{L}'_{x_0} \to H$ définit une connexion infinitésimale dans un espace fibré sur X, ayant pour fibre l'espace de la représentation ψ. On peut donc identifier la paire $(\psi \circ \varphi_\iota, H)$ à un homomorphisme $\varphi_{\iota'}$ du groupe $\mathcal{L}'_{x_0}$ sur un groupe de Lie linéaire $H_{\iota'} = H$.

Dans l'ensemble d'indices $\mathcal{J} = \{\iota\}$ nous introduisons une relation d'ordre partiel, en écrivant $\iota' \prec \iota$ s'il existe un homomorphisme (continu et ouvert) $f_{\iota'\iota}$ du groupe de Lie H_ι sur le groupe $H_{\iota'}$, tel que $\varphi_{\iota'} = f_{\iota'\iota} \circ \varphi_\iota$.

L'ensemble $\mathcal{J}$ est alors un ensemble filtrant. Car si l'on a deux indices $\iota_1, \iota_2 \in \mathcal{J}$, on peut associer aux connexions C_{ι_1}, C_{ι_2} appartenant aux classes d'indices ι_1, ι_2, une connexion infinitésimale linéaire, C_ι, ayant l'indice $\iota \succ \iota_1$, $\iota \succ \iota_2$. En effet, soit (Z_1, p_1, X), l'espace fibré de la connexion C_{ι_1} et (Z_2, p_2, X) l'espace de la connexion C_{ι_2}. Considérons *le produit* de ces espaces fibrés, qui est l'espace fibré (Z, p, X) formé par les paires

$$z = (z_1, z_2),$$

où $z_1 \in Z_1$, $z_2 \in Z_2$ et $p_1(z_1) = p_2(z_2)$, et dont la projection est définie par $p(z) = p(z_1)$. La fibre de (Z, p, X) est le produit direct $Y = Y_1 \times Y_2$ des fibres des espaces (Z_1, p_1, X), (Z_2, p_2, X). Soient

$$dy_1 = A_1(x, dx)\, y_1, \qquad dy_2 = A_2(x, dx)\, y_2$$

les équations des connexions C_{ι_1}, C_{ι_2} dans des systèmes de coordonnées définies dans les voisinages $p_1^{-1}(U)$, $p_2^{-1}(U)$, U étant un voisinage de X, ayant le système de coordonnées (x^i). Les équations précédentes définissent la connexion C_ι dans l'espace (Z, p, X). On voit facilement que le groupe d'holonomie H_ι de cette connexion est isomorphe au quotient $\mathcal{L}'_{x_0}/N_{\iota_1} \cap N_{\iota_2}$, N_{ι_1}, N_{ι_2} étant les noyaux des homomorphismes φ_{ι_1}, φ_{ι_2}. De plus, le groupe H_ι admet des homomorphismes canoniques continus et ouverts $f_{\iota_1\iota}$, $f_{\iota_2\iota}$, sur les groupes H_{ι_1}, H_{ι_2}. On a donc $\iota \succ \iota_1$, $\iota \succ \iota_2$.

Considérons la *limite projective* $\mathcal{H}$ de la famille $\{H_\iota ; f_{\iota'\iota}\}$ des groupes H_ι et des homomorphismes $f_{\iota'\iota} : H_\iota \to H_{\iota'} (\iota \succ \iota')$ précédemment construits. $\mathcal{H}$ est donc le sous-groupe du produit direct des groupes H_ι, formé par les éléments (a_ι) ayant $a_{\iota'} = f_{\iota'\iota}(a_\iota)$, chaque fois qu'on a $\iota \succ \iota'$.

Soit $\varphi : \mathcal{L}'_{x_0} \to \mathcal{H}$ la représentation (continue) de $\mathcal{L}'_{x_0}$ dans $\mathcal{H}$, définie par

$$\varphi(g) = (\varphi_\iota(g)) \in \mathcal{H}, \qquad g \in \mathcal{L}'_{x_0}. \tag{32'}$$

Soit de même $f_\iota : \mathcal{H} \to H_\iota$ l'homomorphisme défini par $f_\iota(a) = a_\iota$, pour $a = (a_\iota) \in \mathcal{H}$.

Les applications f_ι, $f_{\iota'\iota}$ vérifient les conditions suivantes de M. André Weil ([15], p. 23).

L. P. 1. Si $\iota_1 \prec \iota_2 \prec \iota_3$, on a $f_{\iota_1\iota_3} = f_{\iota_1\iota_2} \circ f_{\iota_2\iota_3}$.

L. P. 2. $f_{\iota'\iota}$ est un homomorphisme continu et ouvert de H_ι sur $H_{\iota'}$.

L. P. 3. f_ι est un homomorphisme continu de $\mathcal{H}$ sur H_ι.

Le fait qu'on a $f_\iota(\mathcal{H}) = H_\iota$ résulte de la relation

$$f_\iota(\mathcal{H}) \supset \varphi_\iota(\mathcal{L}'_{x_0}) = H_\iota.$$

Notons que la représentation φ donnée par la formule (32) est biunivoque, car il n'existe pas de chemins f de X, fermés en x_0, non équivalents au chemin constant e_{x_0}, tel que $\varphi_\iota(\{f\})$ soit l'unité ε_ι de H_ι pour chaque indice ι.

Pour le montrer, remarquons qu'on peut associer à chaque classe $\lambda = \{f\}$ de chemins admissibles de X un chemin f_λ uniquement déterminé. Soit en effet f un chemin admissible de la classe λ. Ce chemin est équivalent à un produit $f_1 \ldots f_p$ de chemins f_i ayant chacun un vecteur tangent continu non nul. Il en résulte qu'on peut recouvrir le segment $I = [0, 1]$ par un nombre fini d'intervalles ouverts $I_1, \ldots, I_q$ tel que la restriction $f|I_j$ de f à I_j soit une application biunivoque de I_j dans X. Supposons, ce qui est toujours possible, qu'on a choisi les intervalles $I_1, \ldots, I_q$ tels que pour chaque j, $(j = 1, \ldots, q)$, l'intervalle I_j ne soit pas contenu dans un intervalle I' dans lequel f soit biunivoque. Si f n'est pas biunivoque dans $I_j \cup I_{j+1}$, on peut remplacer le chemin $f' = f|I_j \cup I_{j+1}$ par un chemin admissible équivalent à f' et défini par une application localement biunivoque de $I_j \cup I_{j+1}$ dans X. Si l'on effectue cette opération pour chaque indice j, on arrive à un chemin admissible, équivalent à f et défini par une application localement biunivoque de I dans X. Désignons par f_1 un tel chemin et soit l la longueur de f_1. Si $s(t)$ est la longueur de l'arc de f_1, calculée de $f_1(0) = x_0$ à $f_1(t)$, l'application $s^\star : t \to s(t)$ est continûment dérivable et biunivoque et le chemin $f_\lambda : t \to f_1(s^{\star-1}(lt))$ est admissible, appartient à la classe λ et ne dépend que de cette classe.

Le chemin f_λ passe un nombre fini de fois par le point x_0. Soient $t_0 = 0$, $t_1, \ldots, t_p = 1$ les points de I tels que $f_\lambda(t_i) = x_0 (i = 0, 1, \ldots, p)$. Le chemin f_λ est alors le produit de p chemins admissibles $f_{\lambda_1}, \ldots, f_{\lambda_p}$, associés à p classes $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, liées à la classe λ par la formule

$$\lambda = \lambda_1 \ldots \lambda_p \tag{33}$$

et chacun des chemins f_{λ_i} est une application différentiable de I dans X, telle que l'équation $f_{\lambda_i}(t) = x_0$ implique $t = 0$ ou $t = 1$.

Si la classe λ n'est pas l'unité du groupe $\mathcal{L}'_{x_0}$, on peut supposer que chacune des classes λ_i du produit (33) est différente de ε_{x_0}. Dans ce cas, nous allons montrer qu'on peut trouver une connexion C dans l'espace fibré tangent de X, telle que l'image par φ_C du produit (33) soit une transformation effective de l'espace tangent en x_0 à la variété X. Nous obtiendrons la connexion C en déformant une connexion métrique de X, dans le voisinage d'un point du chemin f_{λ_i}, pour chaque indice $i (i = 1, \ldots, p)$.

Si f_λ est un chemin de X, fermé en x_0, on peut obtenir l'élément $\varphi_C(\lambda)$ du groupe d'holonomie homogène H_{x_0} de la connexion métrique (Γ^i_{jk}) de X en intégrant l'équation différentielle matricielle

$$\frac{dT}{dt} = \Gamma T \tag{34}$$

le long du chemin f_λ, en posant

$$\Gamma = (\Gamma^i_j), \qquad \Gamma^i_j = \Gamma^i_{jk}\frac{df^k_\lambda}{dt}$$

et en supposant que pour $t = 0$, T est la matrice unité.

Si pour deux indices i, j, on a $f_{\lambda_i}(I) = f_{\lambda_j}(I)$, alors on a $\lambda_i = \lambda_j$ ou $\lambda_i = \lambda_j^{-1}$. Soit $f_{\mu_1}, \ldots, f_{\mu_q} (q \leqq p)$ un système maximal formé avec une partie des chemins f_{λ_i}, tel que $f_{\mu_i}(I) \neq f_{\mu_j}(I)$ pour $i \neq j$; on peut alors écrire le produit (33) sous la forme

$$\lambda = \mu_1^{\alpha_1}\mu_2^{\alpha_2}\ldots\mu_q^{\alpha_q}\mu_1^{\beta_1}\ldots\mu_q^{\beta_q}\ldots\mu_1^{\rho_1}\ldots\mu_q^{\rho_q}, \tag{35}$$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_q, \beta_1, \ldots, \beta_q \ldots, \rho_1, \ldots, \rho_q$ étant des entiers positifs ou négatifs.

Soit $\{K, t\}$ une triangulation de la variété différentiable X, telle que chacun des chemins f_{μ_i} appartienne au squelette du premier ordre $t(K^1)$ de cette triangulation.

Si f est un chemin de X tel que $f(I) \subset t(K^1)$, on peut décomposer f en un produit de « cycles élémentaires ». Convenons en effet de regarder chaque simplexe du squelette $t(K^1)$ comme un chemin de X. Dans ce cas, le chemin f est équivalent à un produit de simplexes :

$$f \sim \sigma_1 \ldots \sigma_s$$

tel que la chaîne $\sigma_1 + \ldots + \sigma$ soit un cycle. Soit σ_r le premier des simplexes σ_1, $\sigma_2, \ldots, \sigma_s$ ayant la propriété que la frontière $F\sigma_r$ de σ_r a un point en commun avec la frontière $F\sigma_i$ d'un des simplexes σ_i, où $i \leqq r - 2$. Dans ce cas, on peut écrire

$$f \sim (\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_r\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_{i-1}\ldots\hat{\sigma}_1)(\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_i\sigma_{r+1}\ldots\sigma_s), \tag{36}$$

σ_i étant le premier des simplexes $\sigma_1, \ldots, \sigma_{r-2}$ tel que $F(\sigma_r) \cap F(\sigma_i) \neq \emptyset$. La seconde parenthèse du produit (36) représente un chemin f' formé par un nombre de simplexes plus petit que s, tandis que la première parenthèse peut s'écrire sous la forme

$$g_1 = l_1 f_1 \hat{l}_1, \tag{36'}$$

où $f_1(I)$ est l'image différentiable biunivoque d'un cercle dans X, et l_1 est un chemin allant de x_0 à un point de $f_1(I)$.

En appliquant au chemin f' le raisonnement fait pour le chemin f, et en continuant le procédé, on arrive à un chemin, équivalent à f, de la forme

$$(l_1 f_1 \hat{l}_1)^{\rho_1}(l_2 f_2 \hat{l}_2)^{\rho_2}\ldots(l_u f_u \hat{l}_u)^{\rho_u}, \tag{37}$$

où l_i sont des chemins ayant les origines en x_0 et f_i étant, pour chaque $i = 1, \ldots, u$, un chemin fermé en $l_i(1)$ et tel que si $t' \neq 0$, l'équation $f_i(t) = f_i(t')$ entraîne $t = t'$ et $t = 0, 1$, si $t' = 0$ ou 1.

Appliquons la décomposition (37) à chacun des chemins f_{μ_i} du produit (35). On obtient alors une formule de la forme

$$\lambda = \lambda_1^{\alpha_1} \ldots \lambda_m^{\alpha_m} \lambda_1^{\beta_1} \ldots \lambda_m^{\beta_m} \ldots \lambda_1^{\gamma_1} \ldots \lambda_m^{\gamma_m}, \tag{38}$$

où chacune des classes λ_i contient un chemin de la forme (36'),

$$\lambda_i = \{ l_i f_i \hat{l}_i \} \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

et $\alpha_i, \beta_i, \ldots \gamma_i$ sont des nombres entiers.

On peut supposer encore que pour $i \neq j$, les ensembles $f_i(\mathrm{I}), f_j(\mathrm{I})$ ne coïncident pas. Choisissons sur chacun des chemins $f_i (i = 1, \ldots, m)$ un point P_i n'appartenant pas aux chemins $f_j (j \neq i)$ et tel que l'équation $f_i(t) = \mathrm{P}_i$ admette une seule racine ; soit U_i un voisinage de coordonnées de la variété X, contenant le point P_i et n'ayant aucun point commun avec les chemins $f_j (j \neq i)$.

Soient x^s des coordonnées dans le voisinage U_i et x_0^s leurs valeurs dans le point P_i. Soit

$$\mathrm{B}_i : \quad (x^1 - x_0^1)^2 + \ldots + (x^n - x_0^n)^2 \leqq r^2 \qquad (n = \dim \mathrm{X}) \tag{39}$$

une boule contenue dans U_i, telle que $f_i(0) \notin \mathrm{B}_i$.

Supposons qu'on a choisi les coordonnées $x^s (s = 1, \ldots, n)$ dans U_i telles que les équations du chemin f_i dans U_i soient

$$x^s = 0 \quad (s < n); \qquad x^n = t \qquad [t \in (a', b') \subset \mathrm{I}]. \tag{39'}$$

Soient $a, b (a < b)$ les deux points de l'intervalle (a', b') correspondant aux intersections du chemin f_i avec la frontière de la boule B_i. Soit R_t le repère local de X dans le point $f_i(t)$, obtenu en transportant par parallélisme, le long de la courbe $l_i(f_i)_t$, $(f_i)_t(\tau) = f_i(t\tau)$, le repère R_0 du point x_0.

Si V^s sont les composantes d'un vecteur tangent à X, rapporté au repère R_t, la connexion métrique de X est définie, dans B_i, le long de la courbe f_i, par l'équation

$$d\mathrm{V}^s = 0. \tag{40}$$

Nous modifierons cette connexion dans la boule B_i, en supposant que le déplacement parallèle le long de l'arc $f_i | (a, b)$ est donné par la formule

$$d'\,\mathrm{V}^s = (t-a)^2 (t-b)^2 \,\Gamma \mathrm{V}^s \,dt, \tag{41}$$

Γ étant une matrice constante. En dehors de la boule (39), la connexion (41) se raccorde avec (40) donnant une connexion continue.

En désignant par V' le vecteur qu'on obtient en déplaçant le vecteur V le long de l'arc $f_i | [a, b]$, à l'aide de la connexion (41), on obtient

$$\mathrm{V}' = e^{(\tau(b) - \tau(a))\Gamma}\, \mathrm{V}, \tag{42}$$

où $\tau : t \to \tau(t)$ est une primitive de la fonction $(t-a)^2(t-b)^2$. On a évidemment $\tau(b) \neq \tau(a)$. En posant $\Gamma_i = (\tau(b) - \tau(a))\Gamma$, il en résulte que la modification de la connexion (40) donnée par la formule (41) a pour effet de changer $\varphi_C(\lambda_i)$ en

$$\varphi_{C'}(\lambda_i) = \varphi_C(\lambda_i)\, e^{\Gamma_i}. \tag{43}$$

Si C′ est la connexion de X qu'on obtient de la connexion C en modifiant la dernière dans des voisinages U_i associés à chaque chemin f_i, à l'aide de m matrices $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$, alors les formules (38) et (43) nous donnent

$$\varphi_{C'}(\lambda) = \varphi_C(\lambda_1^{\alpha_1})\, e^{\alpha_1 \Gamma_1} \ldots \varphi_C(\lambda_m^{\gamma_m})\, e^{\gamma_m \Gamma_m}. \tag{44}$$

Il ne reste qu'à remarquer qu'étant données m matrices $\Lambda_1 = \varphi_C(\lambda_1), \ldots$ régulières et un ensemble de nombres entiers non tous nuls $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_m, \ldots, \gamma_1, \ldots, \gamma_m$, on peut toujours choisir m matrices $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ telles que

$$\Lambda_1^{\alpha_1} e^{\alpha_1 \Gamma_1} \ldots \Lambda_m^{\gamma_m} e^{\gamma_m \Gamma_m}$$

ne soit pas la matrice unité.

Il en résulte que l'homomorphisme (32) est un monomorphisme ; ce n'est pas un isomorphisme, car le groupe $\mathcal{H}$ est un groupe complet, tandis que $\mathcal{L}'_{x_0}$ ne l'est pas. On peut cependant remarquer que l'image par φ de $\mathcal{L}'_{x_0}$ est un sous-groupe partout dense $\mathcal{H}'$ de $\mathcal{H}$. En effet, cela résulte du fait que chacun des homomorphismes

$$\varphi_\iota : \quad \mathcal{L}'_{x_0} \to H_\iota \tag{45}$$

est un épimorphisme, donc $\varphi_\iota(\mathcal{L}'_{x_0}) = H_\iota$.

6. Soit $(Z_\iota, p_\iota, X, H_\iota)$ l'espace fibré principal associé à la représentation φ_ι. Désignons par $(\mathfrak{Z}, p, X, \mathcal{H})$ la *limite projective* de ces espaces fibrés. Nous appelons *limite projective* d'une famille d'espaces fibrés, indexés à l'aide d'un ensemble filtré d'indices, et d'un système d'applications d'espaces fibrés

$$g_{\iota'\iota} : \quad (Z_\iota, p_\iota, X, H_\iota) \to (Z_{\iota'}, p_{\iota'}, X, H_{\iota'}) \tag{46}$$

définies pour les paires $\iota' \prec \iota$, l'espace fibré $\mathfrak{Z}$ ayant pour points les points $\{z_\iota\}$ du produit direct $\times Z_\iota$, vérifiant les conditions

$$z_{\iota'} = g_{\iota'\iota}(z_\iota), \qquad p_{\iota_1}(z_{\iota_1}) = p_{\iota_2}(z_{\iota_2}), \tag{47}$$

quels que soient les indices ι_1, ι_2 et $\iota' \prec \iota$.

Dans notre cas, l'application $g_{\iota'\iota}$ est définie aisément à l'aide de l'homomorphisme $f_{\iota'\iota} : H_\iota \to H_{\iota'}$, si l'on identifie les espaces fibrés $(Z_\iota, p_\iota, X, H_\iota)$ aux espaces obtenus des produits directs $\mathcal{E}'_{x_0} \times H_\iota$ et des équivalences

$$(\alpha, t) \sim (l\alpha, \varphi_\iota(l)\, t) \qquad (\alpha \in \mathcal{E}'_{x_0},\ t \in H_\iota,\ l \in \mathcal{L}'_{x_0}). \tag{48}$$

Dans ce cas on a, si $\{(\alpha, t)\}$ est la classe de (α, t),

$$g_{\iota'\iota}(\{(\alpha, t)\}) = \{(\alpha, f_{\iota'\iota}(t))\}.$$

Le groupe structural de l'espace $\mathfrak{Z}$ est évidemment la limite projective $\mathcal{H}$ des groupes H_ι et des homomorphismes $f_{\iota'\iota}$.

Nous avons le résultat fondamental suivant :

THÉORÈME III.4. — *Si* X *est une variété différentiable de classe* C^2, *on lui associe un espace fibré principal sur* X, $(\mathfrak{Z}, p, X, \mathcal{H})$, *ayant pour groupe structural* $\mathcal{H}$ *la limite projective d'une famille de groupes de Lie* H_ι. *Toute structure* (Z, p, X, C), *formée d'un espace fibré vectoriel sur* X *et d'une connexion linéaire* C *dans cet espace est associée à l'espace* $(\mathfrak{Z}, p, X, \mathcal{H})$ *et à une représentation continue et ouverte du groupe* $\mathcal{H}$ *sur un groupe linéaire* H.

Remarque. — En utilisant le théorème III.1, on peut obtenir un théorème analogue, fournissant les espaces fibrés principaux sur X, ayant pour groupes structuraux des groupes de Lie, et les connexions infinitésimales de ces espaces, dont les transformations des groupes d'holonomie soient les translations des fibres.

Soit $\psi : \mathcal{E}'_{x_0} \to \mathfrak{Z}$ l'application qui associe à chaque $\alpha \in \mathcal{E}'_{x_0}$ le point $\xi = \{z_\iota\} \in \mathfrak{Z}$ ayant les coordonnées $z_\iota(\alpha) = \{(\alpha, \varphi_\iota(\varepsilon_{x_0}))\}$. L'application (32) étant biunivoque, ψ est aussi une application biunivoque d'espaces fibrés. Il en résulte qu'on peut identifier $\mathcal{E}'_{x_0}$, doué d'une topologie convenable, à un sous-espace de $\mathfrak{Z}$.

En effet si α, β sont deux éléments différents de $\mathcal{E}'_{x_0}$, on a pour au moins un des indices ι, $z_\iota(\alpha) \neq z_\iota(\beta)$. Car si l'on a $(\alpha, e_\iota) \sim (\beta, e_\iota) [e_\iota = \varphi_\iota(\varepsilon'_{x_0})]$, quel que soit l'indice ι, on aura pour chaque ι un élément $l_\iota \in \mathcal{L}'_{x_0}$, tel que

$$(\beta, e_\iota) = (l_\iota \alpha, \varphi_\iota(l_\iota))$$

donc $\beta = l_\iota \alpha$; $\varphi_\iota(l_\iota) = e_\iota$; la première de ces égalités montre que l_ι est un élément $l \in \mathcal{L}'_{x_0}$ ne dépendant pas de l'indice ι, tandis que la seconde égalité, supposée vraie pour chaque ι, montre que $l = \varepsilon_{x_0}$, car l'application $\varphi = \times \varphi_\iota$ de $\mathcal{L}'_{x_0}$ dans $\times H_\iota$ est biunivoque.

Une connexion linéaire C, donnée dans un espace fibré vectoriel sur X, définit une représentation φ_C du groupe $\mathcal{L}'_{x_0}$ sur le groupe d'holonomie H de la connexion C, qui est un groupe linéaire. D'après la définition de la famille $\{H_\iota, \varphi_\iota\}$, on peut identifier la paire (H, φ_C) à une paire (H_{ι_0}, φ_0) de cette famille. Il en résulte que la représentation φ_C du groupe $\mathcal{L}'_{x_0}$ s'étend à une représentation f_{ι_0} du groupe $\mathcal{H}$ sur le groupe linéaire $H = H_{\iota_0}$.

L'espace fibré $(\bar{Z}, \bar{p}, X)$ associé à $(\mathfrak{Z}, p, X, \mathcal{H})$ et à la représentation linéaire $f_{\iota_0} : \mathcal{H} \to H_{\iota_0}$ du groupe $\mathcal{H}$ s'obtient en considérant le produit direct $\mathfrak{Z} \times Y$ et l'équivalence

$$(\zeta, y) \sim (t\zeta, f_{\iota_0}(t)y) \qquad (\zeta \in \mathfrak{Z}, y \in Y, t \in \mathcal{H}), \tag{49}$$

Y étant l'espace de la représentation f_{ι_0}; on peut encore définir l'espace $(\bar{Z}, \bar{p}, X)$ en considérant le produit direct

$$\mathcal{E}'_{x_0} \times \big(\underset{\iota}{\times} H_\iota\big) \times Y.$$

et l'équivalence définie dans le sous-espace $\mathcal{E}'_{x_0} \times \mathcal{H} \times Y$ de ce produit

$$(\alpha, \{t_\iota\}, y) \sim (l\alpha, \{\varphi_\iota(l)\, t_\iota\}\tau, f_{\iota_0}(\tau)\, y) \qquad (\{t_\iota\} \in \mathcal{H},\ \alpha \in \mathcal{E}'_{x_0},\ l \in \mathcal{L}'_{x_0},\ \tau \in \mathcal{H}).$$

La classe $\{(\alpha, \{t_\iota\}, y)\}$ contient une infinité de représentants ayant $\{t_\iota\} = e \in \mathcal{H}$, $e = \varphi(\varepsilon_{x_0})$. L'un de ces éléments est $(\alpha,\ e,\ f_{\iota_0}(\{t_\iota\}^{-1})\, y) = (\alpha,\ e,\ \xi^{-1} y)$, $\xi = f_{\iota_0}(\{t_\iota\})$ et tous les autres sont de la forme $(l\alpha,\ e,\ \varphi_{\iota_0}(l^{-1}) y)$. On voit donc qu'on a une correspondance biunivoque ψ entre les classes $\{(\alpha, \{t_\iota\}, y)\}$ et les classes de l'espace $\mathcal{E}'_{x_0} \times Y$ et de l'équivalence $(\alpha, y) \sim (l\alpha, \varphi_{\iota_0}(l^{-1}) y)$. Cette correspondance est topologique, et d'autre part les classes de $\mathcal{E}'_{x_0} \times Y$ sont précisément les points de l'espace fibré donné (Z, p, X). On peut de plus construire une connexion $\bar{C}$ dans l'espace associé $(\bar{Z}, \bar{p}, X)$ et l'on vérifie facilement que la correspondance ψ est un isomorphisme des structures $(\bar{Z}, \bar{p}, X, \bar{C})$, (Z, p, X, C).

On peut énoncer le théorème inverse :

Théorème III.5. — *Considérons une représentation linéaire d'ordre fini* $\varphi_0 : \mathcal{H} \rightarrow H_0$, *le groupe de Lie* H_0 *ayant un nombre fini de composantes connexes*; *on peut construire un espace fibré vectoriel sur* X *et une connexion linéaire* C *dans cet espace, telle que le groupe d'holonomie* H_{x_0} *de* C *soit isomorphe à* H_0 *et en identifiant* H_{x_0} *à* H_0 *par un certain isomorphisme, on ait* $\varphi_0 = \varphi_C$.

Nous rappelons qu'on entend par représentation d'un groupe un homomorphisme continu et ouvert. D'après un théorème de M. Weil ([15], p. 28) le groupe H_0 d'une représentation φ_0 de la limite projective de la famille $(H_\iota, f_{\iota'\iota})$ est isomorphe à la limite projective de la famille $(H_\iota/N_\iota, \bar{f}_{\iota'\iota})$, où $N_\iota = f_\iota(N)$ et $\bar{f}_{\iota'\iota}$ étant, pour $\iota' \prec \iota$, l'homomorphisme induit par $f_{\iota'\iota}$ sur H_ι/N_ι. N étant un sous-groupe fermé de $\mathcal{H}$, la relation $f_\iota^{-1}(N_\iota) = N$ montre que N_ι est un sous-groupe fermé de H_ι. Donc N_ι est un groupe de Lie linéaire, car d'après un théorème de Chevalley, tout sous-groupe fermé d'un groupe de Lie est un groupe de Lie ([2], p. 135). Donc, les groupes H_ι/N_ι sont tous des groupes de Lie. La limite projective H_0 de ces groupes vérifie les inégalités

$$\dim H_0 \geqq \dim (H_\iota/N_\iota), \qquad \text{car} \quad \dim H_0 = \limsup \dim (H_\iota/N_\iota).$$

On peut donc trouver un indice ι_0 tel que $\dim(H_{\iota_0}/N_{\iota_0}) = \dim H_0$. Comme H_{ι_0}/N_{ι_0} est l'image homomorphe du groupe H_0 par l'homomorphisme induit par $f_{\iota_0} : \mathcal{H} \rightarrow H_{\iota_0}$ sur $\mathcal{H}/N \approx H_0$, il en résulte que les groupes de Lie H_0, H_{ι_0}/N_{ι_0} sont localement isomorphes et il en est de même pour les groupes H_0, H_ι/N_ι si $\iota \succ \iota_0$. Si le groupe H_0 possède un nombre fini de composantes connexes, les groupes H_ι/N_ι auront la même propriété. Dans ce cas, on peut trouver un indice ι' tel que les groupes H_ι/N_ι soient isomorphes à $H_{\iota'}/N_{\iota'}$ pour chaque indice $\iota \succ \iota'$. Le groupe H_0 étant la limite projective des groupes H_ι/N_ι, H_0 sera aussi isomorphe à $H_{\iota'}/N_{\iota'}$.

En identifiant le groupe H_0 à $H_{\iota'}/N_{\iota'}$, par l'isomorphisme canonique $\bar{f}_{\iota'}$, induit par $f_{\iota'} : \mathcal{H} \to H_{\iota'}$ sur $\mathcal{H}/N \simeq H_0$, la représentation $\varphi_0 : \mathcal{H} \to H_0$ s'identifiera à la représentation $\eta_{\iota'} \circ f_{\iota'} : \mathcal{H} \to H_{\iota'}/N_{\iota'}$, obtenue en composant $f_{\iota'}$ avec l'homomorphisme canonique $\eta_{\iota'}$ de $H_{\iota'}$ sur $H_{\iota'}/N_{\iota'}$.

L'espace fibré associé à $(Z_{\iota'}, p_{\iota'}, X, H_{\iota'})$ et à la représentation $\eta_{\iota'}$ de $H_{\iota'}$ sur le groupe linéaire $H_0 \approx H_{\iota'}/N_{\iota'}$ remplit les conditions du théorème III.5, la connexion linéaire C s'obtenant par une méthode que nous avons indiquée dans le chapitre II.

7. Nous avons associé à la variété différentiable X trois groupes : le groupe $\mathcal{L}_{x_0}$ des classes des chemins de X, le groupe $\mathcal{L}'_{x_0}$ des classes des chemins admissibles de X et le groupe $\mathcal{H}$. Le premier de ces groupes n'est pas un groupe topologique, mais il admet une topologie, définie par une structure uniforme de l'espace $\mathcal{L}_{x_0}$, telle que les translations du groupe $\mathcal{L}_{x_0}$ et l'application $\alpha \to \alpha^{-1}$ sont uniformément continues.

Le groupe $\mathcal{H}$ est un groupe topologique, limite projective d'une famille de groupes de Lie ; c'est donc un groupe de Lie généralisé. Le groupe $\mathcal{L}'_{x_0}$ est toujours un groupe topologique et est isomorphe à un sous-groupe partout dense $\mathcal{H}'$ du groupe topologique $\mathcal{H}$.

Montrons qu'on peut définir un isomorphisme (algébrique) du groupe $\mathcal{L}'_{x_0}$ dans le groupe $\mathcal{L}_{x_0}$. Considérons en effet l'application $\omega : \mathcal{L}'_{x_0} \to \mathcal{L}_{x_0}$ qui associe à chaque classe de chemins admissibles de X la classe des chemins de X qui contient les chemins de la première classe. C'est une application univoque, car deux chemins admissibles, équivalents au point de vue différentiable, sont aussi équivalents au point de vue topologique. De plus, ω est une application univalente, car deux chemins admissibles, équivalents au point de vue topologique, sont aussi équivalents au point de vue différentiable. Enfin, il est manifeste que ω est un homomorphisme algébrique du groupe $\mathcal{L}'_{x_0}$ dans le groupe $\mathcal{L}_{x_0}$.

Donc ω est un isomorphisme.

Montrons que l'*application d'espaces topologiques :*

$$\varphi \circ \omega^{-1} : \quad \omega(\mathcal{L}'_{x_0}) \to \mathcal{H}$$

est continue si $\omega(\mathcal{L}'_{x_0})$ est considéré sous-espace de l'espace topologique $\mathcal{E}$.

Il suffit de montrer que chacune des applications $f_\iota \circ \varphi \circ \omega^{-1} : \omega(\mathcal{L}_{x_0}) \to H_\iota$ est uniformément continue. Soit π l'application canonique de l'espace Λ'_{x_0} des chemins admissibles fermés de X, doué de la topologie compacte-ouverte sur l'espace topologique $\omega(\mathcal{L}'_{x_0})$; π associe à chaque chemin admissible f de X la classe $\{f\} \in \mathcal{L}_{x_0}$ et $\omega(\mathcal{L}'_{x_0})$ peut être identifié à l'espace quotient de l'espace topologique Λ'_{x_0} et de l'application π, car un ensemble ouvert de $\Lambda'_{x_0} \subset E_{x_0}$ et saturé par rapport à l'équivalence différentiable R′ des chemins admissibles est l'intersection de Λ'_{x_0} avec un ensemble ouvert de E_{x_0} et saturé par rapport à l'équivalence topologique R des chemins (continus); et d'autre part R′ est l'équivalence induite par R sur le sous-espace Λ'_{x_0} de E_{x_0}. Donc les conditions du théorème 4, chap. I, § 9 [1] sont remplies. Donc, pour montrer que $f_\iota \circ \varphi \circ \omega^{-1}$ est continue, il est suffisant de vérifier que

$$(50) \qquad f_\iota \circ \varphi \circ \omega^{-1} \circ \pi = \varphi_\iota \circ \pi'_{x_0} : \Lambda'_{x_0} \to H_\iota$$

est une application continue.

En considérant la variété X douée d'une métrique riemannienne, X devient un espace métrique et la topologie compacte-ouverte de Λ'_{x_0} s'identifie à la topologie de la convergence uniforme. *Cette dernière topologie est plus fine que la topologie* T′ *définie par les écarts* $\rho_{x,l}$ *considérés plus haut.* Dans la topologie T′, l'application $f_\iota \circ \varphi \circ \omega^{-1} \circ \pi$ est continue, donc l'application (50) est continue. Il en résulte que l'application $\varphi \circ \omega^{-1}$ est continue. Montrons qu'elle n'est pas uniformément continue, donc que l'image inverse d'un entourage $\mathcal{U}$ de la structure uniforme de $\mathcal{H}$ n'est pas un entourage de $\omega(\mathcal{L}'_{x_0})$. L'entourage $\mathcal{U}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ de la forme

$$\mathcal{U}_V = \{(x, y);\ x^{-1}y \in V\},$$

V étant un voisinage de l'unité du groupe $\mathcal{H}$. Soit V′ l'image inverse de V par $\varphi \circ \omega^{-1}$; V′ n'est pas un voisinage de l'unité du groupe $\omega(\mathcal{L}'_{x_0})$, car $\varphi \circ \omega^{-1}$ n'est pas application continue si $\omega(\mathcal{L}'_{x_0})$ est doué de la topologie de la stucture uniforme de $\mathcal{L}_{x_0}$. L'égalité

$$(\varphi \circ \omega^{-1} \times \varphi \circ \omega^{-1})^{-1}(\mathcal{U}_V) = \{(x', y') \in \omega(\mathcal{L}'_{x_0}) \times \omega(\mathcal{L}'_{x_0});\ x'^{-1}y' \in V'\}$$

montre que l'image inverse de l'entourage $\mathcal{U}_V$ n'est pas un entourage de la structure uniforme induite sur $\omega(\mathcal{L}'_{x_0})$ par l'espace uniforme $\mathcal{L}'_{x_0}$.

Remarquons alors que Λ'_{x_0} est un sous-espace partout dense de l'espace topologique Λ_{x_0} des chemins de X fermés en x_0, doué de la topologie de la convergence uniforme. Il en résulte que $\omega(\mathcal{L}'_{x_0}) = \pi(\Lambda'_{x_0})$ est un sous-espace partout dense de l'espace topologique $\mathcal{L}_{x_0}$.

On a donc obtenu une application continue $\varphi \circ \omega^{-1}$, d'un sous-espace partout dense $\omega(\mathcal{L}'_{x_0})$ de l'espace uniforme $\mathcal{L}_{x_0}$, dans l'espace uniforme $\mathcal{H}$. L'espace $\mathcal{H}$ étant la limite projective d'une famille de groupes de Lie, donc $\mathcal{H}$ étant un sous-espace d'un produit direct d'espaces séparés, il en résulte que c'est un espace séparé. On peut alors appliquer le théorème du prolongement d'une application uniformément continue ([1], chap. II, § 3, Prop. 8) et il en résulte le

Théorème III.6. — *Le groupe* $\omega(\mathcal{L}'_{x_0})$ *admet un homomorphisme dans le groupe* $\mathcal{H}$, *qui ne se prolonge pas continûment à* $\mathcal{L}_{x_0}$.

En effet, l'image par $\varphi \circ \omega^1$, de l'intersection avec $\omega(\mathcal{L}'_{x_0})$ d'un point λ de l'espace topologique $\mathcal{L}_{x_0}$, est un filtre de Cauchy dans l'espace uniforme $\mathcal{H}$, seulement si la classe λ contient un chemin rectifiable de X.

8. D'après Lashof [7] on peut associer au groupe $\mathcal{H}$ une algèbre de Lie. C'est la limite projective $\mathcal{G}$ des algèbres de Lie G_ι des groupes H_ι et des homomorphismes $df_{\iota'\iota} : G_\iota \to G_{\iota'}$ induits par les homomorphismes $f_{\iota'\iota}$ sur les algèbres G_ι. Un point de $\mathcal{G}$ est donc un point du produit direct des espaces G_ι, soit $\{g_\iota\}$, $g_\iota \in G_\iota$, satisfaisant aux conditions $g_{\iota'} = df_{\iota'\iota}(g_\iota)$ pour toute paire $\iota' \prec \iota$. L'espace $\mathcal{G}$ est aussi considéré avec la topologie de sous-espace du produit direct des espaces vectoriels topologiques G_ι. Dans cette topologie, $\mathcal{G}$ est un espace vectoriel topologique complet.

Chaque représentation du groupe $\mathcal{H}$ sur un groupe de Lie linéaire induit une représentation linéaire de l'algèbre $\mathcal{G}$. La réciproque n'est pas vraie. On peut seulement affirmer que les représentations linéaires de dimensions finies de $\mathcal{G}$ fournissent les représentations linéaires du groupe universel de recouvrement de la composante connexe de l'unité de groupe $\mathcal{H}$ [7].

Nous allons indiquer ici une sous-algèbre partout dense de l'algèbre $\mathcal{G}$, définie à l'aide des éléments simples de la variété X.

Soit M l'ensemble des paires (α, b), où α est un élément de l'ensemble $\mathcal{E}'_{x_0}$ et b un bivecteur tangent à X dans le point $\pi_{x_0}(\alpha)$. Soit A l'algèbre libre, unitaire, associative, de l'ensemble M, sur le corps des réels ([3], chap. I). Désignons par B l'algèbre quotient de A et de l'idéal engendré par les éléments

$$(\alpha, \lambda_1 b_1 \dot{+} \lambda_2 b_2) - \lambda_1(\alpha, b_1) - \lambda_2(\alpha, b_2),$$

les points de la première parenthèse indiquant qu'il s'agit des opérations avec les bivecteurs tangents à X dans le point $\pi_{x_0}(\alpha)$.

Considérons dans B une nouvelle loi de multiplication

$$(x_1, x_2) \to [x_1, x_2], \tag{51}$$

en posant $[x_1, x_2] = x_1 x_2 - x_2 x_1$.

Soit C l'algèbre formée par les éléments de B et dont les opérations sont : l'addition et la multiplication avec les nombres réels, de B ; la multiplication $C \times C \to C$ définie par la formule (51).

Désignons enfin par G la sous-algèbre de C engendrée par l'ensemble $M \subset C$.

D'après le théorème d'Ambrose et Singer, toute connexion linéaire C_ι sur un espace fibré vectoriel sur X, définit un homomorphisme r_ι de l'algèbre G *sur* l'algèbre du groupe d'holonomie H_ι de la connexion considérée.

Il en résulte qu'on a un homomorphisme r de l'algèbre G sur une sous-algèbre partout dense de l'algèbre $\mathcal{G}$.

On peut montrer que l'homomorphisme r est biunivoque. Si l'on identifie alors G à son image $r(G) \subset \mathcal{G}$, G reçoit une topologie de sous-espace de l'espace topologique $\mathcal{G}$. On sait alors que les représentations linéaires de dimensions finies de G se prolongent sur l'algèbre $\mathcal{G}$ entière, pourvu que ces représentations soient uniformément continues.

Bien qu'on ne connaisse pas directement la topologie de G, on peut donner une condition suffisante pour qu'un homomorphisme de l'algèbre G soit uniformément continu.

Supposons la variété X simplement connexe. Dans ce cas, tout chemin admissible f de X, fermé en x_0, est déformable à ce point par une homotopie h admissible. D'après ce qu'on a vu plus haut, on peut obtenir l'effet du déplacement parallèle le long de f, à l'aide d'une connexion C_t dans un fibré vectoriel sur X, en connaissant seulement les transformations infinitésimales $r_t(\alpha, b)$ qui correspondent dans l'algèbre H_t aux éléments (α, b); α étant la classe d'un chemin contenu dans l'image de l'homotopie h.

Pour que la connexion C_t soit définie, par r_t, il faut s'assurer que la transformation $\varphi_t(\{f\}) \in H_t$ ne dépend pas du choix de l'homotopie h. Il faut donc que le produit des transformations infinitésimales $r_t(\alpha_S, b_S)$, correspondant à une division par rectangles d'une surface fermée S de X, soit, à la limite, égal à l'unité du groupe H_t.

Si l'on suppose qu'on a $\pi_2(X) = 0$, la surface S est homotope à zéro et S est alors la frontière d'une sous-variété T de X de dimension égale à 3.

On peut dans ce cas exprimer le produit des transformations infinitésimales $r_t(\alpha, b)$ comme un produit de transformations infinitésimales associées aux éléments de volume de la variété T. Chacune de ces transformations infinitésimales doit être nulle. C'est la condition exprimée par les identités de Bianchi dans le cas d'une connexion riemannienne. Nous appellerons cette condition de Bianchi, dans le cas général. On a donc le

THÉORÈME III.7. — *Si la variété* X *a* $\pi_1(X) = \pi_2(X) = 0$, *les représentations de l'algèbre* G *qui correspondent aux connexions linéaires* C_t *sont celles qui satisfont à la condition de Bianchi.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. Bourbaki, *Topologie générale*, 2e édit., Livre III, Paris.

[2] C. Chelalley, *Theory of Lie Groups*, Princeton University, 1946.

[3] C. Chevalley, *Théorie des groupes de Lie*, t. II, Paris, 1951.

[4] C. Ehresmann, *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable. Colloque de Topologie* (*Espaces fibrés*), Bruxelles, 1950.

[5] C. Ehresmann et J. Feldbau, *Sur les propriétés d'homotopie des espaces fibrés* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **214**, 1941, p. 945-948).

[6] R. Lashof, *Classification of fibre bundles by the loop space of the base* (*Ann. Math.*, 2e série, vol. **64**, 1956, p. 436-446).

[7] R. Lashof, *Lie Algebras of Locally Compact Groups* (*Pacific J. Math.*, vol. 7, 1957, n° 2, p. 1145-1162).

[8] S. Lefschetz, *Introduction to Topology*, Princeton University Press., 1949.

[9] A. Lichnerowicz, *Théorie globale des connexions infinitésimales et des groupes d'holonomie*. Roma, Edizioni Cremonese, 1955.

[10] John Milnor, *Construction of universal bundles*, I (*Ann. Math.*, 2e série, vol. 63, 1956, p. 272-284).

[11] J.-P. Serre, *Homologie singulière des espaces fibrés* (*Ann. Math.* vol. 54, 1951, p. 425-505).

[12] N. Stenrood, *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press, 1951.

[13] C. Teleman, *Généralisation du groupe fondamental d'un espace topologique* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 248, 1959, p. 2845-2846).

[14] C. Teleman, *Généralisation du groupe fondamental d'une variété différentiable* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 248, 1959, p. 2930-2932).

[15] A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Paris, 1940.

[16] A. Weil, *Fibre Spaces in Algebraic Geometry* (Notes by A. Wallace), University of Chicago, 1952.