ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JEAN GIRAUD

Contact maximal en caractéristique positive

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 8, nº 2 (1975), p. 201-234
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1975_4_8_2_201_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.
4[e] série, t. 8, 1975, p. 201 à 234.

CONTACT MAXIMAL EN CARACTÉRISTIQUE POSITIVE

PAR JEAN GIRAUD

RÉSUMÉ. — On fonde sur des arguments de calcul différentiel une théorie du contact maximal pour un anneau local complet contenant un corps. On en déduit que l'élimination par éclatements de centre permis des points proches d'une singularité algébroïde équivaut à l'élimination, par éclatements de centre régulier le long desquels elles sont équimultiples, des points de multiplicité trop élevée d'un certain nombre d'hypersurfaces bien choisies, résultat connu en caractéristique nulle.

Introduction

Ce travail prétend faire un pas supplémentaire en direction de la résolution des singularités en caractéristique $p > 0$. Tout à la fin, on indique rapidement comment ces résultats s'insèrent dans le schéma de démonstration utilisé par Hironaka en caractéristique nulle, et, de manière nécessairement un peu vague, ce qu'il reste à faire pour l'adapter en caractéristique $p > 0$. Nous n'en dirons donc pas plus ici.

Après un paragraphe 1 consacré à des rappels de résultats devenus classiques, on introduit au paragraphe 2 la notion de *coordonnées différentielles* : il y a deux traits principaux. Tout d'abord, pour maîtriser les phénomènes d'inséparabilité, on désire introduire des espaces de jets relatifs au corps premier, mais pour qu'ils soient de type fini, on les prend relatifs à un corps intermédiaire bien choisi : un *corps séparant* (2.9) pour les extensions résiduelles en jeu; c'est là une astuce bien élémentaire, mais que je crois nouvelle et qui est efficace. En outre, les espaces de jets obtenus ne sont pas toujours de type fini, mais le deviennent si on les complète, et l'on dispose alors d'un formalisme très souple. Pour étayer cette affirmation, je n'ai pu résister au plaisir d'inclure le théorème 2.12 qui permet de décrire en termes de calcul différentiel la stratification d'Hilbert-Samuel d'un schéma de type fini sur un corps.

Au paragraphe 3 on aborde le cœur du sujet. Le modèle est la *théorie différentielle du contact maximal* exposée en [6] dans le cas analytique complexe, car l'approche de Hironaka basée sur des équations du type $f = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ et la transformation $z' = z + a_1/n$ n'est pas praticable si p divise n. Dans ce paragraphe 3, on décrit certaines manipulations sur les générateurs d'un idéal d'un anneau de séries formelles sur un corps que l'on formule comme un *théorème d'existence d'une présentation*. Pour en donner une idée, utilisons le langage géométrique grâce à la traduction faite en 5.2.1. Pour un point singulier x d'un schéma X plongé dans un schéma régulier Z, on introduit une projection lisse et transverse $\pi : \mathrm{Z} \rightarrow \mathrm{S}$ telle que l'extension résiduelle $k(x)/k(s)$, avec $s = \pi(x)$, soit triviale et un sous-schéma fermé W de Z passant par x et fini sur S. L'essentiel est que les équations de W sont des *dérivées divisées* [condition 3.1 (d 1)] *d'équations normalisées* [condition 3.1 (c 4)] de X. En caractéristique nulle, W *est étale sur* S [condition 4.2 (iii), où les q_i valent 1] et dans la théorie de Hironaka, on dirait que W a le *contact maximal* avec X. Ici, W est seulement fini sur S, mais l'essentiel est préservé.

Au paragraphe 4 on montre en effet que si Y est un centre d'éclatement permis pour X, alors $\mathrm{Y} \subset \mathrm{W}$ et la projection $\pi : \mathrm{Z} \rightarrow \mathrm{S}$ identifie Y et $\pi(\mathrm{Y})$. Cela permet d'éclater Y dans Z, X, W et S. Si Z^0, X^0, W^0 et S^0 désignent les éclatés et si x^0 est un point de X^0 se projetant sur x avec même série d'Hilbert-Samuel (*point proche*), alors $x^0 \in \mathrm{W}^0$, l'application rationnelle $\pi^0 : \mathrm{Z}^0 \rightarrow \mathrm{S}^0$ est définie au point x^0 et l'extension résiduelle $k(x^0)/k(s^0)$, $s^0 = \pi^0(x^0)$, est triviale. Mais là nous sommes déjà au paragraphe 5 dont le résultat essentiel 5.2 dit comment retrouver au point proche x^0 une présentation de X^0. En répétant l'opération, on peut donc garder une bonne description des éclatés successifs tant que la série de Hilbert-Samuel ne varie pas.

Malgré le titre, le mot contact maximal n'est pas défini pour ne pas allonger en introduisant une terminologie superflue. Ayant assimilé l'indigeste définition d'une présentation (3.1), on peut comprendre sans ambiguïté les résultats majeurs 3.3, 4.3 et 5.2 ainsi que le commentaire final. Enfin un mot d'excuse pour n'avoir pas raccourci l'étude des points proches en citant les bons auteurs : on aurait seulement économisé le lemme 5.2.2. Cette étude est ainsi autonome et n'utilise que les rappels du paragraphe 1 et les critères de platitude normale de Hironaka [7] et Bennett ([2], [5]).

1. Rappels

1.1. La série de Hilbert-Samuel d'un anneau local A d'idéal maximal M est $\mathrm{H}_{\mathrm{M}}(\mathrm{A}) = \sum_{n \geq 0} l(\mathrm{M}^n/\mathrm{M}^{n+1})\,\mathrm{T}^n$. Si x est un point d'un schéma localement noethérien X, on note $\mathrm{H}_x(\mathrm{X})$ la série de Hilbert-Samuel de l'anneau local $\mathrm{O}_{\mathrm{X},x}$. Pour tout entier d, on pose

$$(1) \qquad \mathrm{H}_{\mathrm{M}}^{(d)}(\mathrm{A}) = \mathrm{H}_{\mathrm{M}}(\mathrm{A})/(1-\mathrm{T})^d;$$

si A est régulier de dimension d, on a $\mathrm{H}_{\mathrm{M}}^{!}(\mathrm{A}) = (1-\mathrm{T})^{-d}$.

Si $\mathrm{F} = \sum \mathrm{F}_i \mathrm{T}^i$ et $\mathrm{G} = \sum \mathrm{G}_i \mathrm{T}^i$ sont deux séries formelles, on écrit $\mathrm{F} \geqq \mathrm{G}$ si on a $\mathrm{F}_i \geqq \mathrm{G}_i$ pour tout i.

Lemme de transversalité 1.2. — *Soit* A *un anneau local noethérien d'idéal maximal* M *et soient* $x_1, \ldots, x_d$ *des éléments de* A *tels que* $x_i \in \mathrm{M}^{n(i)}$.

(i) *On a*

$$(1) \qquad \mathrm{H}_{\mathrm{M}}(\mathrm{A}) \prod_{1 \leqq i \leqq d} \frac{1-\mathrm{T}^{n(i)}}{1-\mathrm{T}} \leqq \mathrm{H}_{\mathrm{M}}^{(d)}(\mathrm{A}/(x)\mathrm{A});$$

(ii) *Pour que* (1) *soit une égalité, il faut et il suffit que* $(X_1, \ldots, X_d)$ *soit une suite régulière dans* $\mathrm{gr}_M(A)$, *où* X_i *est la classe de* x_i *dans* $M^{n(i)}/M^{n(i)+1}$. *S'il en est ainsi, on a*

$$\mathrm{gr}_M(A/(x)A) = \mathrm{gr}_M(A)/(X)\,\mathrm{gr}_M(A). \tag{2}$$

Voir ([2], [5], [9]).

COROLLAIRE 1.3. — *Si* A *est une* S-*algèbre, avec* S *local régulier de dimension d, d'idéal maximal* N *et* NA $\subset$ M, *on a*

$$H_M(A) \leqq H_M^{(d)}(A/NA), \tag{1}$$

et pour que (1) *soit une égalité, il faut et il suffit que* $\mathrm{gr}_M(A)$ *soit plat sur* $\mathrm{gr}_N(S)$.

Appliquer ce qui précède à un système régulier de paramètres de S.

COROLLAIRE 1.4. — *Soit* R *un anneau local noethérien régulier d'idéal maximal* M *et soit* $(x_1, \ldots, x_d)$ *une partie d'un système régulier de paramètres de* R. *Soit* J *un idéal de* R *et posons*

$$R' = R/(x)R, \qquad M' = MR', \qquad A = R/J, \qquad J' = JR' \qquad \textit{et} \qquad A' = R'/J'. \tag{1}$$

On suppose que

$$H_M(A) = H_M^{(d)}(A') \tag{2}$$

et que l'on a des éléments $f_1, \ldots, f_m$ *de* J *dont les images* $f_1', \ldots, f_m'$ *dans* R' *satisfont*

$$v_M(f_i) = v_{M'}(f_i'), \qquad 1 \leqq i \leqq m. \tag{3}$$

Alors, pour que les $\mathrm{in}_M(f_i)$ *engendrent* $\mathrm{in}_M(J, R)$, *il faut et il suffit que les* $\mathrm{in}_{M'}(f_i')$ *engendrent* $\mathrm{in}_{M'}(J', R')$.

Voir [5], (scholie I.6.7).

Les notations employées ici sont standard et utilisées plus bas. Si M est un idéal d'un anneau R et si $f \in R$, on pose

$$v_M(f) = \sup \text{ des } n \text{ tels que } f \in M^n. \tag{1}$$

Si $v_M(f) = \infty$, on pose $\mathrm{in}_M(f) = 0$ et si $v_M(f) = n < \infty$, on note $\mathrm{in}_M(f)$ la classe de f dans M^n/M^{n+1}. Si J est un idéal de R, on pose

$$\mathrm{in}_M(J, R) = \text{noyau de } \mathrm{gr}_M(R) \to \mathrm{gr}_M(R/J), \tag{2}$$

ses éléments sont les $\mathrm{in}_M(f)$, $f \in J$.

FAÎTE D'UN CÔNE 1.5. — Le calcul du faîte d'un cône à partir d'équations normalisées (lemme 1.7 ci-dessous) est la clef de l'existence du contact maximal.

Soient k un corps, S_1 un k-espace vectoriel de rang fini et $S = k[S_1]$ l'algèbre symétrique. On pose V = Spec (S) et on considère un idéal homogène I de S et le cône C = Spec (G), où G = S/I. On considère le sous-foncteur F de celui représenté par V qui, à tout k-schéma k', associe le sous-groupe de $V(k') = \mathrm{Sch}_k(k', V)$ défini par

$$(1) \qquad F(k') = \{ v \in V(k') \mid L_v(C \times_k k') \subset C \times_k k' \},$$

où L_v est la translation définie par v, à savoir

$$(2) \qquad L_v : \quad V \times_k k' \to V \times_k k', \qquad L_v(v') = v + v'.$$

Ce foncteur est représentable par un sous-schéma en groupes fermé de V, qui est aussi un cône, autrement dit, F admet pour équations des polynomes additifs homogènes. On dit que F est le *faîte* de C. En outre, si U est *l'algèbre des invariants* de F, c'est-à-dire, par définition, l'algèbre des fonctions sur le quotient V/F, l'inclusion $F + C \subset C$ entre sous-foncteurs de V signifie aussi que

$$(3) \qquad I \cap U \text{ engendre l'idéal } I.$$

Ceci est bien standard [4], mais on en trouvera une preuve élémentaire dans [5] (prop. I.5.4) qui ouvre la voie au calcul explicite de F à partir de celui de son algèbre d'invariants U. Pour cela, supposons que $S = k[X_1, \ldots, X_N]$ et considérons l'exposant exp (I) de l'idéal homogène I, c'est-à-dire l'ensemble des exposants dominants (pour l'ordre lexicographique) des éléments homogènes non nuls de I, c'est une partie de $\mathbf{N}^N$.

LEMME 1.6. — *Avec les notations ci-dessus, si* $F_1, \ldots, F_m$ *sont des générateurs homogènes de* I *et si l'on a*

$$(1) \qquad D_A^{(X)} F_i = 0 \quad \textit{pour } A \in \exp(I), \qquad 1 \leqq i \leqq m, \quad A \in \mathbf{N}^N, \quad |A| < \deg F_i,$$

(*ce que l'on exprime en disant que les* F_i *sont* normalisés), *alors* $F_i \in U$ *pour* $1 \leqq i \leqq m$, U *est l'algèbre engendrée par les* $D_A^{(X)} F_i$, $1 \leqq i \leqq m$, $|A| < \deg F_i$, *et enfin* $F = \mathrm{Spec}(S/U_+ S)$.

On définit les $D_A^{(X)} F_i$ par la formule de Taylor :

$$(2) \qquad F_i(X + X') = \sum_{A \in \mathbf{N}^N} D_A^{(X)} F_i X'^A \qquad \text{avec} \quad D_A^{(X)} F_i \in k[X].$$

Pour la preuve, *voir* [5] (prop. III.2.10). Pour la suite, il faut encore améliorer le calcul de U. Pour cela, on considère des polynomes additifs s_i qui engendrent U et à la suite de Hironaka [8], on note que, quitte à changer l'ordre des variables X_i, on peut modifier les s_i de manière à avoir un *système triangulaire*

$$(3) \qquad s_i = X_i^{q(i)} + \sum_{j > i} c_{ij} X_j^{q(i)}, \qquad 1 \leqq i \leqq e,$$

avec $q(1) \leqq q(2) \ldots \leqq q(e)$, où les $q(i)$ sont des puissances de l'exposant caractéristique du corps de base. Pour plus de commodité, posons

$$(4) \qquad Z_i = X_i \quad \text{pour } 1 \leqq i \leqq e \qquad \text{et} \qquad W_i = X_{i+e} \quad \text{pour } 1 \leqq i \leqq N - e.$$

On notera exp (I; Z; W) l'exposant de l'idéal I par rapport aux variables $Z_1, \ldots, Z_e$, $W_1, \ldots, W_{N-e}$, dans cet ordre.

LEMME 1.7. — *Si* $F_1, \ldots, F_m$ *sont des générateurs homogènes de l'idéal* I *tels que*

$$(1)\quad D^{(Z,W)}_{(A,B)} F_i = 0 \quad \textit{pour}\ (A, B) \in \exp(I; Z; W) \subset \mathbf{N}^e \times \mathbf{N}^{N-e}, \qquad |(A, B)| < \deg F_i,$$

alors l'algèbre U *est engendrée par les*

$$(2)\qquad D^{(Z)}_A F_i, \qquad 1 \leqq i \leqq m, \quad A \in \mathbf{N}^e, \quad |A| < \deg F_i.$$

Ce lemme étant nouveau, prouvons-le. Introduisons des variables $z_1, \ldots, z_e$ et $w_1, \ldots, w_{N-e}$ et posons

$$(3)\qquad s_i(Z+z, W+w) = s_i(Z, W) + a_i(z) + b_i(w),$$

ce qui est licite puisque s_i est un polynome additif. Comme les s_i sont algébriquement indépendants et que les F_i appartiennent à $U = k[s]$ d'après 1.6, on applique la formule de Taylor dans U, d'où

$$(4)\qquad F_i(Z+z, W+w) = F_i(s+a+b) = \sum_{A \in \mathbf{N}^e} D^{(s)}_A F_i (a+b)^A.$$

Mais les F_i sont homogènes, de degré $n(i)$ disons, et les s_i ont pour degré $q(i)$, ce qui conduit à poser

$$(5)\qquad A.q = (A_1 q(1), \ldots, A_e q(e)) \qquad \text{pour} \quad A \in \mathbf{N}^e,$$

$$(6)\qquad (a+b)^A = \sum m_{A,B,C} z^B w^C, \qquad B \in \mathbf{N}^e, \quad C \in \mathbf{N}^{N-e}, \quad |A.q| = |B| + |C|,$$

avec $m_{A,B,C} \in k$, et d'après la forme triangulaire de 1.6 (3), on a

$$(7)\qquad \left|\begin{array}{ll} m_{A,B,C} = 0 & \text{si} \quad B > A.q \ \text{pour l'ordre lexicographique,} \\ m_{A,A.q,0} = 1. & \end{array}\right.$$

En reportant (6) dans (4) et en comparant avec la formule de Taylor dans S, on en tire

$$(8)\qquad D^{(Z,W)}_{(B,C)} F_i = \sum_{A \in \mathbf{N}^e,\ |A.q| = |B| + |C|} m_{A,B,C} D^{(s)}_A F_i,$$

ce qui prouve que U est l'algèbre engendrée par les $D^{(s)}_A F_i$ avec $|A.q| < n(i)$ (*cf.* 1.6). Mais en faisant $w = 0$, donc $b = 0$, dans (4) et (6), on trouve de même

$$(9)\qquad D^{(Z)}_B F_i = \sum_{A \in \mathbf{N}^e,\ |A.q| = |B|} m_{A,B,0} D^{(s)}_A F_i,$$

mais en vertu de (7), ce système est « triangulaire » pour l'ordre lexicographique sur les $B \in \mathbf{N}^e$, on peut donc le résoudre et prouver le lemme 1.7.

2. Coordonnées différentielles, corps séparants

L'intérêt de cette notion est de fournir des conditions minimales permettant de disposer d'une formule de Taylor, formalisme analogue à celui développé par Hironaka dans [10] sous le nom d'algèbre de Taylor, mais plus souple, puisqu'il contient le cas d'une extension de corps séparable et surtout, celui d'un anneau local régulier contenant un corps k tel que l'extension résiduelle K/k soit séparable, avec $\Omega_{K/k}$ de rang fini. Cette situation doit son utilité pour l'étude d'un schéma de type fini sur un corps de caractéristique positive à l'existence des corps séparants introduits en 2.9.

2.1. INVARIANTS DIFFÉRENTIELS. — Nous suivons [EGA IV 16]. Soient S un anneau et R une S-algèbre. On considère le noyau I de

$$\varepsilon_{R/S} : \quad R \otimes_S R \to R, \qquad \varepsilon_{R/S}(x \otimes y) = xy, \tag{1}$$

et l'on pose

$$\mathbf{P}^n_{R/S} = R \otimes_S R/I^{n+1} \tag{2}$$

dont on fait une R-algèbre grâce au morphisme $x \mapsto cl\,(x \otimes 1)$. L'on appelle jet d'ordre n le morphisme de S-algèbres :

$$j^n_{R/S} : \quad R \to \mathbf{P}^n_{R/S}, \qquad j^n_{R/S}(x) = cl(1 \otimes x), \tag{3}$$

et différentielle d'ordre n l'application S-linéaire :

$$d^n_{R/S} : \quad R \to \mathbf{P}^n_{R/S}, \qquad d^n_{R/S}(x) = j^n_{R/S}(x) - x. \tag{4}$$

Bien entendu $d^n_{R/S}$ tombe dans le noyau de l'augmentation

$$\varepsilon^n_{R/S} : \quad \mathbf{P}^n_{R/S} \to R \tag{5}$$

déduite de (1). Lorsque $n = 1$, ce noyau est le *module des différentielles*, noté $\Omega_{R/S}$.

Supposons en outre que $(z_1, \ldots, z_e)$ soient des éléments de R, on a alors des morphismes de R-algèbres :

$$u_n : \quad R[\zeta]/(\zeta)^{n+1} \to \mathbf{P}^n_{R/S}, \qquad u_n(\zeta_i) = dz_i, \qquad n \geqq 0, \tag{6}$$

où $(\zeta_1, \ldots, \zeta_e)$ sont des indéterminées et où, comme souvent plus tard, on écrit d au lieu de $d^n_{R/S}$.

Soit encore P un idéal de R; si on note $\hat{R}$ et $\mathbf{P}^{n\wedge}_{R/S}$ les complétés de R et $\mathbf{P}^n_{R/S}$ pour leurs topologies P-adiques, on déduit de (6) des morphismes continus de R-algèbres

$$\hat{u}_n : \quad \hat{R}[\zeta]/(\zeta)^{n+1} \to \mathbf{P}^{n\wedge}_{R/S}, \qquad n \geqq 0. \tag{7}$$

DÉFINITION 2.2. — *Soient* R *une S-algèbre*, $(z_1, \ldots, z_e)$ *des éléments de* R *et* P *un idéal de* R.

(i) *On dit que* $(z_1, \ldots, z_e)$ *sont des coordonnées* S-*différentielles de* R *pour la topologie* P-*adique si les morphismes* [2.1 (7)] *sont des isomorphismes pour* $n \geqq 0$;

(ii) *Si* P = 0, *on dit coordonnées* S-*différentielles globales*;

(iii) *Si* R *est local et* P *son idéal maximal, on dit coordonnées* S-*différentielles locales.*

2.2.1. On dit également coordonnées différentielles de R/S au lieu de coordonnées S-différentielles de R. Si $(z_1, \ldots, z_e)$ sont des coordonnées différentielles de R/S et si $(s_1, \ldots, s_e)$ sont des éléments de S, il en est de même de $(z_1+s_1, \ldots, z_e+s_e)$, puisque le morphisme [2.1 (7)] ne change pas.

2.2.2. Le morphisme de R-algèbres $i : \mathbf{P}^n_{R/S} \to \mathbf{P}^n_{\hat{R}/S}$ induit un isomorphisme

(1) $$\mathbf{P}^{n\wedge}_{R/S} \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^{n\wedge}_{\hat{R}/S}.$$

En effet, comme on sait que $j(\Pi(p_i)) = \Pi j(p_i) = \Pi(d(p_i)+p_i)$ on a

(2) $$j^n_{R/S}(P^{k+n}) \subset P^k \mathbf{P}^n_{R/S}$$

en posant $R(k) = R/P^{n+k}$, on en tire

(3) $$\mathbf{P}^n_{R/S}/P^k \mathbf{P}^n_{R/S} = \mathbf{P}^n_{R(k)/S}/P^k \mathbf{P}^n_{R(k)/S},$$

ce qui donne (1) par passage à la limite projective sur k, car le membre de droite de (3) ne change pas si l'on remplace R par son complété.

LEMME 2.3. — (*a*) *Pour que* $(z_1, \ldots, z_e)$ *soient des coordonnées* S-*différentielles de* R *pour la topologie* P-*adique, il faut et il suffit que leurs images dans* $\hat{R}$ *soient des coordonnées* S-*différentielles de* $\hat{R}$ *pour la topologie* $P\hat{R}$-*adique.*

(*b*) *Si* $(z_1, \ldots, z_e)$ *sont des coordonnées* S-*différentielles* globales *de* R, *ce sont des coordonnées* S-*différentielles pour la topologie* P-*adique et, pour toute partie multiplicativement stable* σ *de* S *et toute partie multiplicativement stable* ρ *de* R *contenant l'image de* σ, *les images de* $(z_1, \ldots, z_e)$ *dans le localisé* R_ρ *sont des coordonnées différentielles globales de* R_ρ/S_σ.

EXEMPLES 2.4. — (*a*) Si R est l'algèbre de polynomes $R = S[z_1, \ldots, z_e]$, alors $(z_1, \ldots, z_e)$ sont des coordonnées différentielles globales de R/S, donc aussi des coordonnées S-différentielles de $S[[z_1, \ldots, z_e]]$ pour la topologie (z)-adique.

(*b*) Si R/S est une *extension de corps séparable* telle que $\Omega_{R/S}$ soit de rang fini, pour que $(z_1, \ldots, z_e)$ soient des coordonnées différentielles de R/S, il faut et il suffit que leurs différentielles forment une base de $\Omega_{R/S}$, c'est-à-dire, en caractéristique 0 (resp. $p > 0$), que les z_i forment une base de transcendance (resp. p-base) de R/S.

FORMULE DE TAYLOR 2.5. — Reprenons les notations de 2.1. Posons

(1) $$\mathbf{P}^{\wedge}_{R/S} = \varprojlim \mathbf{P}^{n\wedge}_{R/S}$$

et supposons que les z_i sont des coordonnées différentielles de R/S pour la topologie P-adique; on déduit de 2.1 (7) un isomorphisme

(2) $$u: \quad \hat{R}[[\zeta]] \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^{\wedge}_{R/S}.$$

Par passage aux complétés pour les topologies P-adiques puis à la limite projective sur n, les morphismes $j^n_{R/S}$ et $\varepsilon^n_{R/S}$ donnent des morphismes de S-algèbres :

(3) $$\hat{R} \xrightarrow{\hat{j}} \mathbf{P}^{\wedge}_{R/S} \xrightarrow{\hat{\varepsilon}} \hat{R}, \qquad \hat{\varepsilon}(\hat{j}(x)) = x,$$

qui, grâce à (2) fournissent des morphismes de S-algèbres :

$$\hat{\mathrm{R}} \xrightarrow{\mathrm{D}^{(z)}} \hat{\mathrm{R}}[[\zeta_1, \ldots, \zeta_e]] \xrightarrow{\varepsilon^{(z)}} \hat{\mathrm{R}}, \tag{4}$$

et l'on pose

$$\mathrm{D}^{(z)} f = \sum_{\mathrm{A} \in \mathbf{N}^e} \mathrm{D}_{\mathrm{A}}^{(z)} f . \zeta^{\mathrm{A}}, \qquad \mathrm{D}_{\mathrm{A}}^{(z)} f \in \hat{\mathrm{R}}. \tag{5}$$

On prendra bien garde que $\varepsilon^{(z)}$ est un morphisme de $\hat{\mathrm{R}}$-algèbres avec, par construction, $\varepsilon^{(z)}(\zeta_i) = 0$, mais que $\mathrm{D}^{(z)}$ n'est pas $\hat{\mathrm{R}}$-linéaire. Cependant, c'est un morphisme d'anneaux, ce qui donne

$$\mathrm{D}_{\mathrm{A}}^{(z)}(fg) = \sum_{\mathrm{B}+\mathrm{C}=\mathrm{A}} \mathrm{D}_{\mathrm{B}}^{(z)} f . \mathrm{D}_{\mathrm{C}}^{(z)} g, \tag{6}$$

d'où l'on tire par récurrence sur $|\mathrm{A}|$ que $\mathrm{D}_{\mathrm{A}}^{(z)} : \hat{\mathrm{R}} \to \hat{\mathrm{R}}$ est un *opérateur différentiel d'ordre* $\leqq |\mathrm{A}|$ (continu pour la topologie P-adique), car

$$\mathrm{D}_0^{(z)} f = f, \tag{7}$$

$$[\mathrm{D}_{\mathrm{A}}^{(z)}, g] = \sum_{\mathrm{B}+\mathrm{C}=\mathrm{A},\, \mathrm{B} \neq 0} \mathrm{D}_{\mathrm{B}}^{(z)}(g) . \mathrm{D}_{\mathrm{C}}^{(z)}. \tag{8}$$

2.6. Il est aisé d'expliciter $\mathrm{D}^{(z)}$ lorsque R est $\mathrm{S}[z_1, \ldots, z_e]$ et par suite aussi $\mathrm{S}[[z_1, \ldots, z_e]]$ et l'on trouve

$$\mathrm{D}^{(z)} f = f(z+\zeta) \quad \text{et} \quad \mathrm{D}_{\mathrm{A}}^{(z)}\left(\sum f_{\mathrm{B}} z^{\mathrm{B}}\right) = \sum \binom{\mathrm{B}}{\mathrm{A}} f_{\mathrm{B}} z^{\mathrm{B}-\mathrm{A}}. \tag{1}$$

De même, lorsque R/S est une extension de corps séparable de caractéristique $p > 0$, alors $z_1, \ldots, z_e$ est une p-base et pour tout $f \in \mathrm{R}$ et tout $r > 0$, en posant $q = p^r$, on a

$$f = \sum_{\mathrm{B} \ll q} f_{\mathrm{B}} z^{\mathrm{B}}, \qquad f_{\mathrm{B}} \in \mathrm{S}\,\mathrm{R}^q, \tag{2}$$

où

$$\mathrm{B} \ll q \quad \text{signifie} \quad \mathrm{B} = (\mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_e), \quad \text{avec } \mathrm{B}_i < q. \tag{3}$$

On en tire que, pour $\mathrm{A} \ll q$, on a

$$\mathrm{D}_{\mathrm{A}}^{(z)} f = \sum_{\mathrm{B} \ll q} \binom{\mathrm{B}}{\mathrm{A}} f_{\mathrm{B}} z^{\mathrm{B}-\mathrm{A}}. \tag{4}$$

Ceci nous conduit à expliciter la formule de Taylor dans le cas qui nous intéresse le plus, à savoir, une extension de corps séparable F/k munie de coordonnées différentielles $a_1, \ldots, a_r$ et un anneau de séries formelles $\mathrm{R} = \mathrm{F}[[z_1, \ldots, z_e]]$. En traitant d'abord le cas de l'anneau de polynomes $\mathrm{F}[z]$, on voit que (a, z) sont des coordonnées k-différentielles globales de $\mathrm{F}[z]$, donc des coordonnées k-différentielles locales de $\mathrm{R} = \mathrm{F}[[z]]$. Par ailleurs, le morphisme

$$\mathrm{D}^{(a)} : \ \mathrm{F} \to \mathrm{F}[[\alpha]], \qquad \alpha_i = d_{\mathrm{F}/k}(a_i), \tag{5}$$

se prolonge en un morphisme

$$\text{(6)} \qquad D^{(a)}: \ F[[z]] \to F[[z, \alpha]], \qquad D^{(a)}(\sum f_B z^B) = \sum (D^{(a)} f_B) z^B$$

et l'on vérifie par passage à la limite que

$$\text{(7)} \qquad D^{(a, z)} f = (D^{(a)} f)(z+\zeta).$$

Nous allons reprendre ces résultats en leur donnant une forme plus intrinsèque qui nous sera utile.

PROPOSITION 2.7. — *Soit* R *un anneau local noethérien* régulier *qui contient un corps* k. *Soit* M *l'idéal maximal de* R *et supposons que le corps résiduel* $K = R/M$ *soit une extension* séparable *de* k *avec* $\Omega_{X/k}$ *de rang fini sur* K. *Si* $(z_1, \ldots, z_e)$ *est un système régulier de paramètres de* R *et si* $(a_1, \ldots, a_r)$ *sont des éléments de* R *relevant des coordonnées différentielles* $(c_1, \ldots, c_r)$ *de* K/k, *alors* $(a_1, \ldots, a_r, z_1, \ldots, z_e)$ *sont des coordonnées différentielles* locales *de* R/k.

Si, de plus, R *est complet,* Ω_k *de rang fini et* k *de caractéristique* $p > 0$, *alors* (z, a) *sont des coordonnées différentielles* globales *de* R/k.

2.7.1. En vertu de 2.3 (*a*), on peut supposer que R est complet. Puisque K/k est séparable, il existe alors un corps de représentants F de K qui contient les a_i et il suffit d'appliquer 2.6 pour prouver la première assertion.

2.7.2. Par fidèle platitude, pour que des coordonnées différentielles locales soient aussi des coordonnées différentielles globales, il faut et il suffit que les $\mathbf{P}^n_{R/S}$ soient de type fini sur R, ce qui est vrai si R est essentiellement de type fini sur k, mais faux pour $R = F[[z]]$ si Ω_F est de rang infini ou si F est de caractéristique 0. Mais si Ω_k est de rang fini, il en est de même de Ω_F. Si k' est le corps premier, comme $\mathbf{P}^n_{R/k}$ est quotient de $\mathbf{P}^n_{R/k'}$, pour prouver que $\mathbf{P}^n_{R/k}$ est de type fini, on peut supposer que k est le corps premier, donc est *parfait*. Si, de plus, k est de caractéristique $p > 0$, fixons n et choisissons $r > 0$ tel que $q = p^r > n$. Pour tout $f \in R$, on a une écriture unique

$$\text{(1)} \qquad f = \sum f^q_{A,B} a^A z^B, \qquad f_{A,B} \in R,$$

où la somme est indexée par l'ensemble fini des $(A, B) \in \mathbf{N}^r \times \mathbf{N}^e$ avec $A \ll q$ et $B \ll q$ [2.6 (3)]. Comme $\mathbf{P}^n_{R/k}$ est engendré comme R-module par les $1 \otimes f$, $f \in R$ et que l'on a dans $\mathbf{P}^n_{R/k}$:

$$\text{(2)} \qquad 1 \otimes f = \sum 1 \otimes f^q_{A,B} a^A z^B = \sum f^q_{A,B} \otimes a^A z^B,$$

car $0 = (1 \otimes x - x \otimes 1)^q = 1 \otimes x^q - x^q \otimes 1$ car $q > n$, alors $\mathbf{P}^n_{R/k}$ est de type fini, d'où la seconde assertion.

PROPOSITION 2.8. — *Soit* A *un anneau local noethérien qui contient un corps* k *tel que le corps résiduel* $K = A/M$ *soit* séparable *sur* k *avec* $\Omega_{K/k}$ *de rang fini* r. *Alors les* K*-espaces vectoriels* $\mathbf{P}^n_{A/k}/M\,\mathbf{P}^n_{A/k}$ *sont de rang fini et l'on a*

$$\text{(1)} \qquad H^{(r+1)}_M(A) = \sum T^n \operatorname{rang}(\mathbf{P}^n_{A/k}/M\,\mathbf{P}^n_{A/k}).$$

2.8.1. Si $K = k$ (point rationnel), on sait bien que $\mathbf{P}^n_{A/k}/M\,\mathbf{P}^n_{A/k}$ n'est autre que A/M^{n+1} et la formule (1) est triviale dans ce cas. Pour le cas général, on note que, puisque $j^n_{A/k}(M^{n+1}) \subset M\,\mathbf{P}^n_{A/k}$, les morphismes $j^n_{A/k}$ induisent un morphisme de systèmes projectifs de k-algèbres :

$$(2) \qquad d^n_A: \quad A/M^{n+1} \to \mathbf{P}^n_{A/k}/M\,\mathbf{P}^n_{A/k},$$

d'où, par passage à la limite projective, un morphisme de k-algèbres :

$$(3) \qquad d_A: \quad \hat{A} \to P_{A/k} = \varprojlim \mathbf{P}^n_{A/k}/M\,\mathbf{P}^n_{A/k}.$$

LEMME 2.8.2. — *Soient encore* $(a_1, \ldots, a_r)$ *des éléments de* A *dont les images dans* K *sont des coordonnées différentielles de* K/k. *Pour* $1 \leqq i \leqq r$, *posons* $\alpha_i = \varprojlim d^n(a_i)$, $\alpha_i \in P_{A/k}$. *Alors l'application* d_A *est injective et induit un isomorphisme de k-algèbres :*

$$(4) \qquad d_A(\hat{A})[[\alpha_1, \ldots, \alpha_r]] = P_{A/k}.$$

2.8.3. Notons que le morphisme (2) ne change pas si l'on remplace A par son complété. Pour prouver le lemme ou la proposition, on peut donc supposer que A est complet et choisir un corps de représentants F contenant les a_i et un anneau de séries formelles $R = F[[z_1, \ldots, z_e]]$ tel que $A = R/J$. Traitons d'abord le cas de $R = F[[z]]$. On a des coordonnées différentielles (a, z) de R/k et par suite $\mathbf{R} = \varprojlim \mathbf{P}^{n\wedge}_{R/k} = R[[\alpha, \zeta]]$ avec $\zeta_i = \varprojlim dz_i$, $\alpha_i = \varprojlim da_i$, et

$$P_{R/k} = \varprojlim \mathbf{P}^n_{R/k}/M\,\mathbf{P}^n_{R/k} = F[[\alpha, \zeta]].$$

De plus, le morphisme (3), où R remplace A, s'obtient en composant le morphisme $D^{(a,z)}: R \to \mathbf{R}$ et la projection $\mathbf{R} \to P_{R/k}$ et s'écrit donc en vertu de la formule de Taylor [2.6 (7)] :

$$(5) \qquad d_R: \quad F[[z]] \to F[[\alpha, \zeta]], \qquad d_R(f) = (D^{(a)} f)(\zeta).$$

Ceci prouve que d_R est injectif et aussi que $d_R(f) = f(\zeta) \bmod (\alpha)$, ce qui donne l'isomorphisme (4) pour $A = R$. En outre, si M_R désigne l'idéal maximal de $P_{A/k}$, on a évidemment

$$(6) \qquad P_{R/k}/M_R^{n+1} = \mathbf{P}^n_{R/k}/M\,\mathbf{P}^n_{R/k},$$

et par suite, puisque $P_{R/k}$ est noethérien :

$$(7) \qquad P_{R/k}/d_R(J)\,P_{R/k} = \varprojlim (\mathbf{P}^n_{R/k}/(M + j^n_{R/k}(J))\,\mathbf{P}^n_{R/k}) = \varprojlim \mathbf{P}^n_{A/k}/M\,\mathbf{P}^n_{A/k} = P_{A/k}$$

qui fournit l'isomorphisme (4) pour A. D'où le lemme. En outre si M_A désigne l'idéal maximal de $P_{A/k}$, on tire de (6) que

$$(8) \qquad P_{A/k}/M_A^{n+1} = \mathbf{P}^n_{A/k}/M\,\mathbf{P}^n_{A/k},$$

ce qui prouve que c'est un K-espace vectoriel de rang fini et aussi que

$$\sum \mathrm{T}^n \operatorname{rang}(\mathbf{P}^n_{\mathrm{A}/k}/\mathrm{M}\,\mathbf{P}^n_{\mathrm{A}/k}) = \mathrm{H}^{(1)}(P_{\mathrm{A}/k}) = \mathrm{H}^{(1)}(\hat{\mathrm{A}}[[\zeta]]) = \mathrm{H}^{(r+1)}(\hat{\mathrm{A}}) = \mathrm{H}^{(r+1)}(\mathrm{A}),$$

ce qui prouve la proposition.

DÉFINITION 2.9. — *On appelle corps séparant pour une extension de corps* L/K *un sous-corps k de* K *tel que* L/k *soit séparable.*

2.9.1. Tout sous-corps parfait de K, par exemple le corps premier, est séparant, mais pour appliquer ce qui précède, nous désirons que $\Omega_{\mathrm{L}/k}$ soit de rang fini. On dit qu'une extension de corps L/K est *différentiellement finie* si le noyau U (L/K) et le conoyau $\Omega_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}$ du morphisme $\mathrm{L} \otimes_{\mathrm{K}} \Omega_{\mathrm{K}} \to \Omega_{\mathrm{L}}$ sont de rang fini et l'on pose

$$(1) \qquad t(\mathrm{L}/\mathrm{K}) = \operatorname{rang}\Omega_{\mathrm{L}/\mathrm{K}} - \operatorname{rang}\mathrm{U}(\mathrm{L}/\mathrm{K}),$$

donc t (L/K) = rang $\Omega_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}$ si L/K est *séparable* et t (L/K) est le degré de transcendance de L/K si L/K est de *type fini* (égalité de Cartier). Si L/K et K/k sont différentiellement finies, il en est de même de L/k et l'on a

$$(2) \qquad t(\mathrm{L}/k) = t(\mathrm{L}/\mathrm{K}) + t(\mathrm{K}/k).$$

LEMME 2.10. — *Soit* L/K *une extension de corps telle que* U (L/K) *soit de rang fini. Il existe un corps séparant k pour* L/K *avec* $\Omega_{\mathrm{K}/k}$ *de rang fini. Si* L/K *est différentiellement finie, on a*

$$(1) \qquad \operatorname{rang}\Omega_{\mathrm{L}/k} = \operatorname{rang}\Omega_{\mathrm{K}/k} + t(\mathrm{L}/\mathrm{K}).$$

En caractéristique nulle, on prend $\mathrm{K} = k$, sinon, on choisit une p-base (c_i, $i \in \mathrm{I}$) de K (sur le corps premier). Par hypothèse, il existe une partie finie J de I telle que les (c_i, $i \in \mathrm{I}$, $i \notin \mathrm{J}$) soient p-indépendants dans L. On change de notations et on pose

$$(2) \qquad a = (a_i = c_i,\ i \in \mathrm{I}' = \mathrm{I} - \mathrm{J}) \qquad \text{et} \qquad b = (b_j = c_j,\ j \in \mathrm{J}).$$

Il suffit de prendre $k = \bigcap_{r \geqq 1} \mathrm{K}^{p^r}[a_i,\ i \in \mathrm{I}']$. (Si l'on désire seulement un corps *admissible* pour l'extension L/K, on se contente de prendre $k = \mathrm{K}^p[a_i,\ i \in \mathrm{I}']$ [EGA O_{IV} 21.6.1].) Pour prouver la proposition, il suffit de voir que a est une p-base de k, car L/k sera séparable puisque la famille a est p-indépendante dans L; de plus, b sera une p-base de K/k car (a, b) est une p-base de K et donc $\Omega_{\mathrm{K}/k}$ sera de rang fini. Ceci prouvé, l'égalité (1) répète 2.9.1 (2). Puisque (a, b) est une p-base de K, pour tout $r \geqq 1$ et tout $x \in \mathrm{K}$, on a une écriture unique

$$(3) \qquad x = \sum_{\mathrm{A} \ll q,\ \mathrm{B} \ll q} x^q_{\mathrm{AB}}\, a^{\mathrm{A}}\, b^{\mathrm{B}}, \qquad x_{\mathrm{AB}} \in \mathrm{K}, \quad q = p^r.$$

Si $x \in k \subset \mathrm{K}^q[a]$, on a

$$(4) \qquad x_{\mathrm{AB}} = 0 \qquad \text{pour} \quad \mathrm{B} \neq 0$$

par l'unicité de (3). En particulier, pour $q = p$, on a $x = \sum_{\mathrm{A} \ll p} y^p_{\mathrm{A}}\, a^{\mathrm{A}}$, $y_{\mathrm{A}} \in \mathrm{K}$, et pour voir que les a_i sont des p-générateurs de k, il suffit de prouver que $y_{\mathrm{A}} \in k$. Pour voir que

$y_A \in K^{p^r}[a]$ on applique (3) et (4) pour $q = p^{r+1}$, ce qui donne $x = \sum x_B^{p^{r+1}} a^B$, $B \ll p^{r+1}$, $x_B \in K$. Par division euclidienne, on a $B = Cp + D$, $D \ll p$, $C \ll p^r$, donc $a^B = (a^C)^p a^D$, d'où $y_A = \sum_{C \ll p^r} (x_{Cp+A})^{p^r} a^C$, donc $y_A \in K^{p^r}[a]$ pour tout $r \geqq 1$. Donc les a_i p-engendrent k et comme ils sont p-libres dans K, donc *a fortiori* dans k, ils forment une p-base de k, d'où la conclusion.

PROPOSITION 2.11. — *Soit* A *un anneau local noethérien contenant un corps* K, *soit* $L = A/M$ *le corps résiduel de* A. *On suppose que l'extension* L/K *est* différentiellement finie (2.9.1). *Alors*

$$P_{A/K} = \varprojlim (\mathbf{P}^n_{A/K}/M\,\mathbf{P}^n_{A/K}) \tag{1}$$

est un anneau local noethérien et si $M_{A/K}$ *désigne son idéal maximal, on a*

$$P_{A/K}/M^{n+1}_{A/K} = \mathbf{P}^n_{A/K}/M\,\mathbf{P}^n_{A/K} \tag{2}$$

et il existe un entier $s \geqq 0$ *tel que*

$$H_M^{(t(L/K)+s+1)}(A) \leqq H^{(s+1)}(P_{A/K}), \tag{3}$$

et si L/K *est séparable, alors* (3) *est une égalité.*

2.11.1. On choisit un corps séparant k pour l'extension L/K avec rang $(\Omega_{K/k}) = s$, ce qui donne $t(L/k) = t(L/K)+s$ et en appliquant 2.8 à A/k, on trouve

$$H_M^{(t(L/K)+1)}(A) = H^{(1)}(P_{A/k}). \tag{4}$$

En outre, on sait que $P_{A/k}$ est un anneau local noethérien et que si l'on note $M_{A/k}$ son idéal maximal, on a (2) où k remplace K. Choisissant des coordonnées différentielles $(b_1, \ldots, b_s)$ de K/k, on en tire

$$\begin{aligned} P_{A/k}/(db_1, \ldots, db_s)P_{A/k} &= \varprojlim (\mathbf{P}^n_{A/k}/(M+(db_1, \ldots, db_s))\mathbf{P}^n_{A/k}) \\ &= \varprojlim (\mathbf{P}^n_{A/K}/M\,\mathbf{P}^n_{A/K}) = P_{A/K}, \end{aligned}$$

d'où l'on tire que $P_{A/K}$ est un anneau local noethérien, l'égalité (2) et aussi l'inégalité

$$H^{(s+1)}(P_{A/K}) = H^{(s+1)}(P_{A/k}/(db_1, \ldots, db_s)) \geqq H^{(1)}(P_{A/k}) \tag{5}$$

d'après le lemme de Bennett 1.2, ce qui fournit (3). Si L/K est séparable, (3) est une égalité par 2.8.

COROLLAIRE 2.11.2. — *Sous les hypothèses de* 2.11, *soit* k *un sous-corps de* K *tel que* K/k *soit séparable avec* rang $\Omega_{K/k} = s$. *Alors on a*

$$H^{(s+1)}(P_{A/K}) \geqq H^{(1)}(P_{A/k}) \tag{1}$$

et si $H_M^{(t(L/K))}(A) = H(P_{A/K})$, *alors* $H_M^{(t(L/k))}(A) = H(P_{A/k})$ *et* (1) *est une égalité.*

Maintenant que l'on sait que $P_{A/k}$ est noethérien, on prouve (1) comme 2.11 (5). On choisit un corps séparant $k' \subset k$ avec rang $\Omega_{k/k'} = t$ et l'on a

$$\mathrm{H}_{\mathrm{M}}^{(t(\mathrm{L}/\mathrm{K})+s+t+1)}(\mathrm{A}) = \mathrm{H}^{(1)}(P_{\mathrm{A}/k'}) \leqq \mathrm{H}^{(t+1)}(P_{\mathrm{A}/k}) \leqq \mathrm{H}^{(s+t+1)}(P_{\mathrm{A}/\mathrm{K}}) = \mathrm{H}_{\mathrm{M}}^{(t(\mathrm{L}/\mathrm{K})+t+s+1)}(\mathrm{A})$$

en appliquant 2.8 pour A/k', puis (1) deux fois, et l'hypothèse $\mathrm{H}_{\mathrm{M}}^{(t(\mathrm{L}/\mathrm{K}))}(\mathrm{A}) = \mathrm{H}(P_{\mathrm{A}/\mathrm{K}})$. Les termes extrêmes étant égaux, les inégalités sont des égalités, d'où la conclusion car $t(\mathrm{L}/k) = t(\mathrm{L}/\mathrm{K})+s$.

THÉORÈME 2.12. — *Soit* X *un schéma de type fini sur un corps* K. *Il existe un sous-corps* k *de* K *tel que* K/k *soit séparable avec* $\Omega_{\mathrm{K}/k}$ *de rang fini égal à* r *et tel que, pour tout* $x \in \mathrm{X}$, *si on note* $k(x)$ *le corps résiduel de* x *et que l'on pose*

$$(1) \qquad \mathbf{P}^n_{\mathrm{X}/k}(x) = k(x) \otimes_{O_{\mathrm{X}}} \mathbf{P}^n_{\mathrm{X}/k} \quad et \quad \mathbf{P}_{\mathrm{X}/k}(x) = \varprojlim \mathbf{P}^n_{\mathrm{X}/k}(x),$$

on ait

$$(2) \qquad \mathrm{H}_x^{(t(x,k))}(\mathrm{X}) = \mathrm{H}(\mathbf{P}_{\mathrm{X}/k}(x)) \quad où \quad t(x,k) = t(k(x)/k) \quad [2.9.1(1)].$$

2.12.1. Il est clair que $\mathbf{P}^n_{\mathrm{X}/k}$ est un O_{X}-module cohérent et d'après 2.11 appliqué à $O_{\mathrm{X},x}$, on sait que $\mathbf{P}_{\mathrm{X}/k}(x)$ est un anneau local noethérien avec

$$(3) \qquad \mathrm{H}^{(1)}(\mathbf{P}_{\mathrm{X}/k}(x)) = \sum \mathrm{T}^n \operatorname{rang}(\mathbf{P}^n_{\mathrm{X}/k}(x)).$$

LEMME 2.12.2. — *Soit* y *un point de* X, *soit* Y *le sous-schéma fermé réduit* $\mathrm{Y} = \overline{\{y\}}$ *de* X *et soit* $x \in \mathrm{Y}$.

(i) *Il existe un entier* $s \geqq 0$ *tel que*

$$(4) \qquad \mathrm{H}_x^{(t(x,\mathrm{K})+s)}(\mathrm{X}) \geqq \mathrm{H}_y^{(t(y,\mathrm{K})+s)}(\mathrm{X});$$

(ii) *Il existe un voisinage ouvert* U *de* y *dans* Y *tel que, pour tout* $x \in \mathrm{U}$, (4) *soit une égalité* (*pour un* s, *donc pour tout* s);

(iii) *Soit* k *un sous-corps de* K *tel que* K/k *soit différentiellement finie. Si l'on a* (2) *au point* x *pour le corps* k *et si* (4) *est une égalité, les* $O_{\mathrm{Y},x} \otimes_{O_{\mathrm{X}}} \mathbf{P}^n_{\mathrm{X}/k}$ *sont plats sur* $O_{\mathrm{Y},x}$ *pour* $n \geqq 0$ *et l'on a* (2) *au point* y *pour le corps* k;

(iv) *Soit* k *un sous-corps de* K *tel que* K/k *soit séparable, que l'on ait* (2) *au point* y *pour le corps* k *et tel que les* $O_{\mathrm{Y},x} \otimes_{O_{\mathrm{X}}} \mathbf{P}^n_{\mathrm{X}/k}$ *soient plats sur* $O_{\mathrm{Y},x}$ *pour* $n \geqq 0$. *Alors on a* (2) *au point* x *pour le corps* k *et* (4) *est une égalité.*

2.12.3. Pour prouver (i), on choisit un sous-corps k' de K qui soit séparant à la fois pour $k(x)$ et $k(y)$, en appliquant 2.8 et la semi-continuité du rang des $\mathbf{P}^n_{\mathrm{X}/k}$, on trouve

$$\mathrm{H}_x^{(t(x,k')+1)}(\mathrm{X}) = \mathrm{H}^{(1)}(\mathbf{P}_{\mathrm{X}/k'}(x)) \geqq \mathrm{H}^{(1)}(\mathbf{P}_{\mathrm{X}/k'}(y)) = \mathrm{H}_y^{(t(y,k')+1)}(\mathrm{X}),$$

d'où la conclusion avec $s = 1+t(\mathrm{K}/k')$ [2.9.1 (2)]. Pour prouver (iii) on peut supposer que $k' \subset k$ et en utilisant successivement (2) au point x pour le corps k, la semi-continuité du rang des $\mathbf{P}^n_{X/k}$, 2.11.2 (1) et 2.11 (3) où $k(y)/k'$, qui est séparable, remplace L/K, on trouve

$$\mathrm{H}_x^{(t(x,k)+1+r)}(\mathrm{X}) = \mathrm{H}^{(1+r)}(\mathbf{P}_{X/k}(x)) \geqq \mathrm{H}^{(1+r)}(\mathbf{P}_{X/k}(y)) \geqq \mathrm{H}^{(1)}(\mathbf{P}_{X/k'}(y)) = \mathrm{H}_y^{(t(y,k')+1)}(\mathrm{X}),$$

avec $r = t(k/k')$, et puisque (4) est une égalité, les termes extrêmes sont égaux, donc aussi $\mathrm{H}(\mathbf{P}_{X/k}(x))$ et $\mathrm{H}(\mathbf{P}_{X/k}(y))$, donc aussi les coefficients de T^n dans ces séries, d'où la conclusion. Pour prouver (iv), on applique (2) pour y et k, puis (4), puis 2.11 (3), ce qui donne

$$\mathrm{H}^{(r+1)}(\mathbf{P}_{X/k}(y)) = \mathrm{H}_y^{(t(y,k')+1)}(\mathrm{X}) \leqq \mathrm{H}_x^{(t(x,k')+1)}(\mathrm{X}) \leqq \mathrm{H}^{(r+1)}(\mathbf{P}_{X/k}(x))$$

et comme les termes extrêmes sont égaux par hypothèse de platitude, on a la conclusion. Enfin, pour prouver (ii), on choisit pour k un corps séparant pour $k(y)$ et pour U un voisinage ouvert de y dans Y tel que les $\mathcal{O}_\mathrm{U} \otimes_{\mathcal{O}_\mathrm{X}} \mathbf{P}^n_{X/k}$ soient plats sur $\mathcal{O}_\mathrm{U}$ et l'on applique (iv). Bien entendu, (i) et (ii) sont connus depuis Bennett [2], mais au point où nous en sommes, il serait grotesque de ne pas les redémontrer.

2.12.4. Pour prouver le théorème, on choisit un sous-corps k de K séparant pour un point maximal y de X, d'où un voisinage ouvert U de y où les $\mathbf{P}^n_{X/k}$ sont plats. D'après 2.12.2 (iv), on a (2) pour le corps k et tout $x \in \mathrm{U}$. D'après 2.11.2, ceci reste vrai pour tout sous-corps k' de k avec k/k' séparable, par exemple un corps séparant pour un point maximal de $\mathrm{X}-\mathrm{U}$, d'où le théorème par récurrence noethérienne.

3. **Présentation d'un anneau local**

On introduit un objet assez monstrueux appelé présentation d'un anneau local dont on prouve l'existence pour un anneau local complet d'égale caractéristique.

DÉFINITION 3.1. — *On dit que*

$$(\mathrm{S};\ \mathrm{R};\ z_1, \ldots, z_e;\ \mathrm{J};\ f_1, \ldots, f_m;\ n(1), \ldots, n(m);\ \mathrm{E};\ \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_e;\ q_1, \ldots, q_e;\ s_1, \ldots s_e)$$

est une présentation si

(*a*) R *et* S *sont des anneaux locaux noethériens réguliers d'idéaux maximaux* M *et* N *avec* $\mathrm{S} \subset \mathrm{R}$, $\mathrm{N} \subset \mathrm{M}$ *et l'on a*

(*a* 1) *l'extension résiduelle* $\mathrm{S/N} \to \mathrm{R/M}$ *est triviale et l'on pose* $k = \mathrm{S/N} = \mathrm{R/M}$;

(*a* 2) *le morphisme naturel* $\mathrm{gr}_\mathrm{N}(\mathrm{S}) \to \mathrm{gr}_\mathrm{M}(\mathrm{R})$ *est plat*;

(*a* 3) $(z_1, \ldots, z_e)$ *sont des coordonnées différentielles locales de* R/S [2.2 (iii)].

(*b*) J *est un idéal de* R *tel que, si l'on pose*

$$\mathrm{R}_0 = \mathrm{R/NR}, \qquad \mathrm{M}_0 = \mathrm{MR}_0, \qquad \mathrm{J}_0 = \mathrm{JR}_0, \qquad \mathrm{A} = \mathrm{R/J} \quad et \quad \mathrm{A}_0 = \mathrm{R}_0/\mathrm{J}_0,$$

alors

(*b* 1) $\mathrm{H}_\mathrm{M}(\mathrm{A}) = \mathrm{H}_\mathrm{M}^{(d)}(\mathrm{A}_0)$ *où* $d = \dim \mathrm{S}$, *autrement dit*, $\mathrm{gr}_\mathrm{M}(\mathrm{A})$ est plat sur $\mathrm{gr}_\mathrm{N}(\mathrm{S})$ (1.3).

(*c*) $f_1, \ldots, f_m$ *sont des éléments de* J, $n(1), \ldots, n(m)$ *des entiers et* E *une partie de* $\mathbf{N}^e$ *telle que* $E+\mathbf{N}^e \subset E$ *et l'on a*

(*c* 1) $v_{M_0}(f_{i,0}) = n(i)$, *où* $f_{i,0} = cl(f_i)$ *dans* J_0;

(*c* 2) $\mathrm{in}_{M_0}(J_0, R_0)$ *est engendré par les* $\mathrm{in}_{M_0}(f_{i,0})$;

(*c* 3) E *est l'exposant de l'idéal* J_0 *par rapport aux coordonnées différentielles* $(z_{1,0}, \ldots, z_{e,0})$ *de* R_0/k, *où* $z_{i,0} = cl(z_i)$ *dans* R_0;

(*c* 4) *Pour* $A \in E$, $1 \leqq i \leqq m$, *et* $|A| < n(i)$, *on a* $D_A^{(z)} f_i = 0$.

(*d*) *On considère les indéterminées* $X_{A,i}$, $A \in \mathbf{N}^e$, $1 \leqq i \leqq m$, $|A| < n(i)$. *Alors* $P_1, \ldots, P_e$ *sont des polynomes en les* $X_{A,i}$ *à coefficients dans* S *et chaque* P_i *est homogène de degré* q_i *si l'on donne à* $X_{A,i}$ *le degré* $n(i) - |A|$. *Enfin,* $s_1, \ldots, s_e$ *sont des éléments de* R *et l'on a*

(*d* 1) $s_j = P_j(D_A^{(z)} f_i)$, $1 \leqq j \leqq e$;

(*d* 2) $H_{M_0}(R_0/(s)R_0) = \prod_{1 \leqq i \leqq e} ((1-T^{q_i})/(1-T))$.

LEMME 3.2. — *Soient* R *et* S *avec les conditions* (*a*), *sauf* (*a* 3). *Soient* $z_1, \ldots, z_e$ *dans* R. *Il existe* $a_1, \ldots, a_e$ *dans* S *tels que les* $z_i + a_i = z'_i$ *appartiennent à* M. *En outre,* (*a* 3) *équivaut à chacune des conditions suivantes :*

(*a* 4) *les images* $z_{i,0}$ *des* z_i *dans* R_0 *sont des coordonnées différentielles locales de* R_0/k;

(*a* 5) *les images* $z'_{i,0}$ *des* z'_i *dans* R_0 *sont un système régulier de paramètres de* R_0.

La première assertion résulte de (*a* 1) seul. Pour la seconde, on montre comme en 2.2.2 que $\mathbf{P}^{n\wedge}_{R/S} \approx \mathbf{P}^{n\wedge}_{R^\wedge/S^\wedge}$, où $R^\wedge$ et $S^\wedge$ sont les complétés de R et S. Or, il résulte de (*a* 1) et (*a* 2) que $R^\wedge$ est un anneau de séries formelles sur $S^\wedge$, donc $\hat{R}$ admet des coordonnées $S^\wedge$-différentielles [2.4 (*a*)]; d'où la même conclusion pour R/S, et bien sûr pour R_0/k. De ceci il résulte que (*a* 3) [resp. (*a* 4)] signifie que 1 et les classes des dz_i (resp. $dz_{i,0}$) forment une base du *k*-espace vectoriel $\mathbf{P}^{1\wedge}_{R/S}/M\,\mathbf{P}^{1\wedge}_{R/S}$ (resp. $\mathbf{P}^{1\wedge}_{R_0/k}/M\,\mathbf{P}^{1\wedge}_{R_0/k}$). Or on a un isomorphisme naturel entre ces deux espaces qui identifie les classes des dz_i à celles des $dz_{i,0}$, d'où l'équivalence de (*a* 3) et (*a* 4). Par ailleurs, on a un isomorphisme naturel

$$R_0/M^2 R_0 \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^{1\wedge}_{R_0/k}/M\,\mathbf{P}^{1\wedge}_{R_0/k}$$

qui identifie la classe de z'_i et $dz_{i,0} = dz'_{i,0}$ (mod M), ce qui prouve l'équivalence de (*a* 4) et (*a* 5) car R_0 est régulier. On a donc

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{gr}_{M_0}(R_0) = k[Z_{1,0}, \ldots, Z_{e,0}], \qquad Z_{i,0} = \mathrm{in}_{M_0}(z'_{i,0}).$$

3.2.1. Nous pouvons maintenant expliquer la condition (*c* 3). Si $f \in R_0$, on appelle *exposant de* f *par rapport aux coordonnées différentielles* $(z_{1,0}, \ldots, z_{e,0})$ de R_0/k, le plus petit multi-indice $A \in \mathbf{N}^e$ pour l'ordre habituel

(1) $A \leqq B$ si $|A| < |B|$ ou si $|A| = |B|$ et $A \geqq B$ pour l'ordre lexicographique

tel que $D_A^{(z_0)} f \notin M_0$. Comme $D_A^{(z'_0)} = D_A^{(z_0)}$, la formule de Taylor pour les $z'_{i,0}$, montre que $D_A^{(z_0)} f$ modulo M_0 n'est autre que le terme dominant de la forme initiale

$$\mathrm{in}_{M_0}(f) \in k[Z_{1,0}, \ldots, Z_{e,0}].$$

Ceci dit, *l'exposant de l'idéal* J_0 par rapport aux coordonnées différentielles $z_{i,0}$ est, par définition, l'ensemble des exposants des éléments non nuls de J_0 et c'est aussi, d'après ce qu'on vient de voir, l'exposant de l'idéal initial $\mathrm{in}_{M_0}(J_0, R_0)$ par rapport aux variables $Z_{i,0}$ ce qui explique (*c* 3). L'important est que (*c* 3) et (*c* 4) gardent un sens indépendamment du choix des a_i.

PROPOSITION 3.3. — *Soit* A *un anneau local* complet *contenant un corps. Il existe une présentation notée comme en* 3.1 *avec* A = R/J.

3.3.1. On sait qu'il existe un anneau de séries formelles R, un idéal J de R et un isomorphisme $A \simeq R/J$; on remplace A par R/J, on note M l'idéal maximal de R, k son corps résiduel, on pose

$$(1)\qquad Z = \mathrm{Spec}(R), \qquad X = \mathrm{Spec}(A), \qquad x = \text{point fermé de } X$$

et on considère les k-schémas

$$(2)\qquad T_x(Z) \supset C_x(X) \supset F_x(X)$$

qui sont respectivement l'espace tangent de Zariski de Z, le cône tangent de X et le faîte de ce dernier (1.5). D'après 1.6 (4) ou [8], il existe des coordonnées homogènes $(Z_1, \ldots, Z_e; W_1, \ldots, W_d)$ de $T_x(Z)$, [par quoi on entend tout bêtement une base de M/M^2], ce qui donne

$$(3)\qquad \mathrm{gr}_M(R) = k[Z, W],$$

et des polynomes additifs $\sigma_1, \ldots, \sigma_e$, homogènes de degrés $q_1, \ldots, q_e$ (où q_i est une puissance de l'exposant caractéristique du corps de base, donc $q_i = 1$ en caractéristique nulle) telle que l'on ait

$$(4)\qquad \sigma_i = Z_i^{q_i} + t(Z_{i+1}, \ldots, Z_e, W_1, \ldots, W_d), \qquad 1 \leqq i \leqq e,$$

$$(5)\qquad F_x(X) = \mathrm{Spec}(k[Z, W]/(\sigma_1, \ldots, \sigma_e)).$$

On choisit maintenant un corps de représentants (encore noté k) de R et un système régulier de paramètres $(z_1, \ldots, z_e, w_1, \ldots, w_d)$ de R avec $Z_i = z_i \bmod M^2$ et $W_i = w_i \bmod M^2$, ce qui identifie R et $k[[z, w]]$. On pose maintenant $S = k[[w]]$. Il est immédiat que les conditions (*a* 1) et (*a* 2) sont satisfaites et pour (*a* 3) on invoque 2.4.

3.3.2. Posons

$$(1)\qquad S = \mathrm{Spec}(S) \quad \text{et} \quad \text{soit } s \text{ son point fermé.}$$

La condition (*b* 1) signifie que $C_x(X)$ est plat sur $T_s(S)$ et nous allons la vérifier. Si on pose

$$(2)\qquad I = \mathrm{in}_M(J, R) \qquad \text{et} \qquad I_\sigma = I \cap k[\sigma],$$

alors on a $I = I_\sigma k[Z, W]$, parce que les σ_i sont des équations du faîte de $C_x(X)$ [3.3.1 (5), 1.5 (3)]. Il faut voir que le morphisme $k[W] \to k[Z, W]/I$ est plat, or c'est le composé

$$k[W] \xrightarrow{u} k[\sigma, W]/I_\sigma k[\sigma, W] \xrightarrow{v} k[Z, W]/I.$$

Tout d'abord, u est plat car il se déduit par extension des scalaires de k à $k[\mathrm{W}]$ du morphisme (plat !) $k \to k[\sigma]/\mathrm{I}_\sigma$, ceci parce que les (σ, W) sont algébriquement indépendants à cause du caractère triangulaire de 3.3.1 (4). Par ailleurs, v est plat car il se déduit par réduction modulo I_σ du morphisme $k[\sigma, \mathrm{W}] \to k[\mathrm{Z}, \mathrm{W}]$ qui est plat, et même libre de base les

(3) $$\mathrm{Z}^{\mathrm{A}},\ \mathrm{A} \in \mathbf{N}^e, \qquad \mathrm{A} = (\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_e), \qquad \mathrm{A}_i < q_i,$$

toujours à cause de 3.3.1 (4). On a donc (b 1).

3.3.3. Il est maintenant possible de choisir une *base standard* de l'idéal J de R, normalisée par rapport aux variables $(z_1, \ldots, z_e, w_1, \ldots, w_d)$ ([7], lemme 17, p. 247), c'est-à-dire des éléments $f_1, \ldots, f_m$ de J tels que

(1) les $\mathrm{F}_i = \mathrm{in}_{\mathrm{M}}(f_i)$ engendrent l'idéal $\mathrm{in}_{\mathrm{M}}(\mathrm{J}, \mathrm{R})$;

(2) si $n(i) = v_{\mathrm{M}}(f_i)$, on a $n(1) \leqq n(2) \leqq \ldots \leqq n(m)$;

(3) si $f_i = \sum f_{i,\mathrm{A},\mathrm{B}}\, z^{\mathrm{A}} w^{\mathrm{B}}$, $f_{i,\mathrm{A},\mathrm{B}} \in k$, on a $f_{i,\mathrm{A},\mathrm{B}} = 0$ dès que

$$(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \exp((\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_{i-1}); \mathrm{Z}, \mathrm{W}),$$

exposant de l'idéal de $k[\mathrm{Z}, \mathrm{W}]$ engendré par $\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_{i-1}$.

Nous allons prouver les conditions (c 1) à (c 4). Posons

(4) $$\mathrm{F} = \exp(\mathrm{I}; \mathrm{Z}, \mathrm{W}), \qquad \mathrm{I} = \mathrm{in}_{\mathrm{M}}(\mathrm{J}, \mathrm{R}).$$

Je dis que

(5) $$\mathrm{D}^{(z,w)}_{\mathrm{A},\mathrm{B}} f_i = 0 \quad \text{si} \quad (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{F} \quad \text{et} \quad |(\mathrm{A}, \mathrm{B})| < n(i).$$

En effet, d'après (1), comme $|(\mathrm{A}, \mathrm{B})| < n(i)$, on a $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \exp((\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_{i-1}); \mathrm{Z}, \mathrm{W})$ d'où la conclusion par (3). Il en résulte évidemment que

(6) $$\mathrm{D}^{(\mathrm{Z},\mathrm{W})}_{\mathrm{A},\mathrm{B}} \mathrm{F}_i = 0 \quad \text{si} \quad (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathrm{F} \quad \text{et} \quad |(\mathrm{A}, \mathrm{B})| < n(i).$$

En vertu du lemme (1.6) donnant le calcul du faîte de $\mathrm{C}_x(\mathrm{X})$, il en résulte que

(7) $$\mathrm{F}_i \in k[\sigma].$$

Puisque $k[\sigma]$ est une algèbre de polynômes, on a une notion d'exposant et, en vertu de 3.3.1 (4), si $\mathrm{A} = \exp(f; \sigma)$, $f \in k[\sigma]$, on a

(8) $$\exp(f; \mathrm{Z}, \mathrm{W}) = (\mathrm{A}_1 q_1, \ldots, \mathrm{A}_e q_e, 0, \ldots, 0) \qquad \text{noté} \quad (\mathrm{A}.q, 0),$$

donc

(9) $$\deg(\mathrm{F}_i(\mathrm{Z}, \mathrm{W})) = \deg(\mathrm{F}_i(\mathrm{Z}, 0)),$$

qui est (c 1). On déduit (c 2) de (1) grâce à 1.4, car 1.4 (2) est (b 1) qui a été démontré et 1.4 (3) est (9). Pour en finir avec les conditions (c), on définit $\mathrm{E} \subset \mathbf{N}^e$ en imposant (c 3), autrement dit, d'après 3.2.1, E est l'exposant de l'idéal $\mathrm{in}_{\mathrm{M}_0}(\mathrm{J}_0, \mathrm{R}_0)$, c'est-à-dire, par transversalité (b 1), l'exposant de l'idéal $\mathrm{I}_0 = \mathrm{I}\,k[\mathrm{Z}]$ de $k[\mathrm{Z}]$. Comme on a défini F comme l'exposant de l'idéal I de $k[Z, W]$, il suffit de prouver que $F = E \times N^d$ pour obtenir (c 4) à partir de (5) car il est immédiat que $D_{A,0}^{(z,w)} = D_A^{(z)}$, où le premier terme est défini grâce aux coordonnées différentielles (z, w) de R/k et le second grâce aux coordonnées différentielles (z) de R/S. Or la série de Hilbert se calcule à partir de l'exposant et la condition numérique de transversalité (b 1) montre qu'il suffit de prouver que $F \supset E \times N^d$ pour avoir égalité et pour cela, il suffit de prouver que $F \supset E \times \{0\}$. Soit $A \in E$, il existe $f \in I_0$ avec $A = \exp(f)$; par transversalité, on sait que $I_0 = I/(W)I$, donc il existe $g \in I$ tel que $f = g(Z, 0)$, donc $\exp(g) = (A, 0)$, d'où la conclusion.

3.3.4. Il reste à prouver (d 1) et (d 2). Tout d'abord, nous savons que l'algèbre des invariants du faîte $F_x(X)$ est $k[\sigma]$, et les hypothèses de 1.7 sont satisfaites d'après 3.3.3 (6), ce qui assure que $k[\sigma]$ est engendrée par les $D_A^{(Z)} F_i$. On a donc des polynômes homogènes $P_1, \ldots, P_e$ en les variables $X_{A,i}$ à coefficients dans k avec

(1) $$\sigma_j = P_j(D_A^{(Z)} F_i), \qquad 1 \leqq j \leqq e.$$

Puisque l'on a choisi un corps de représentants, on peut poser

(2) $$s_j = P_j(D_A^{(z)} f_i), \qquad 1 \leqq j \leqq e,$$

ce qui donne (d 1). Puisque $f_i \in M^{n(i)}$ et que P_j est homogène de degré q_j, on a $s_j \in M^{q_j}$ et la classe de s_j dans M^{q_j}/M^{q_j+1} est σ_j qui n'est pas nulle, donc

(3) $$v_M(s_j) = q_j, \qquad \mathrm{in}_M(s_j) = \sigma_j.$$

Toujours d'après la forme triangulaire de 3.3.1 (4), les $(W_1, \ldots, W_d, \sigma_1, \ldots, \sigma_e)$ forment une suite régulière dans $k[Z, W] = \mathrm{gr}_M(R)$ et par le lemme de transversalité 1.2 (ii), on a

(4) $$H(R/(w, s)R) = H(R_0/(s)R_0) = \prod_{1 \leqq j \leqq e} ((1-T^{q_j})/(1-T)),$$

qui n'est autre que (d 2), ce qui prouve la proposition.

4. Étude locale d'une présentation

Ici nous récupérons, à partir des seules conditions figurant dans 3.1 la plupart des propriétés de la construction du paragraphe précédent et nous déterminons les centres d'éclatements « permis » pour une présentation [4.3 (i)].

LEMME 4.1. — *Soit une présentation notée comme dans* 3.1. *On suppose que* S *contient un corps. On a*

(i) $v_M(f_i) = n(i)$ *et les* $\mathrm{in}_M(f_i)$ *engendrent* $\mathrm{in}_M(J, R)$;

(ii) *Soient* $a_1, \ldots, a_e$ *dans* S *tels que* $z'_i = a_i + z_i \in M$ *et soit* $w_1, \ldots, w_d$ *un système régulier de paramètres de* S. *On pose*

(1) $$Z_i = \mathrm{in}_M(z'_i), \qquad W_i = \mathrm{in}_M(w_i),$$

(2) $$z'_{i,0} = cl(z'_i) \quad \textit{dans } R_0 \quad \textit{et} \quad Z_{i,0} = \mathrm{in}_{M_0}(z'_{i,0}) \quad (3.2).$$

Alors

$$\text{(3)} \qquad E = \exp(\mathrm{in}_{M_0}(J_0, R_0); Z_{1,0}, \ldots, Z_{e,0}),$$

$$\text{(4)} \qquad E \times \mathbf{N}^d = \exp(\mathrm{in}_M(J, R); Z_1, \ldots, Z_e, W_1, \ldots, W_d).$$

Comme on l'a vu en 3.2, les $z'_{i,0}$ forment un système régulier de paramètres de R_0 et les (z'_i, w_j) un système régulier de paramètres de R, ce qui donne un sens à (3) et (4), en outre, nous avons vu en 3.2.1 que (3) n'est autre que (c 3). En outre, raisonnant comme à la fin de 3.3.3, ce qui n'utilise que la condition numérique de transversalité (b 1), on prouve (4). D'après 1.4, pour voir que les $\mathrm{in}_M(f_i)$ engendrent $\mathrm{in}_M(J, R)$, il suffit de vérifier 1.4 (3), c'est-à-dire que $v_M(f_i) \geqq v_{M_0}(f_{i,0}) = n(i)$, car l'autre inégalité est évidente. Pour cela, on peut remplacer R et S par leurs *complétés*, ce qui permet de choisir un corps de représentants k de S, ce qui donne des isomorphismes

$$\text{(5)} \qquad S = k[[z']], \qquad R = k[[z', w]].$$

Il est trivial, mais essentiel, de noter que

$$\text{(6)} \qquad D_A^{(z)} = D_A^{(z')} = D_{A,0}^{(z',w)} : \quad R \to R, \qquad A \in \mathbf{N}^e,$$

où $D_A^{(z)}$ (resp. $D_{A,0}^{(z',w)}$) est l'opérateur différentiel attaché aux coordonnées différentielles (z) [resp. (z', w)] de R/S (resp. R/k). D'après (c 4), on en tire

$$\text{(7)} \qquad D_{(A,B)}^{(z',w)} f_i = 0 \qquad \text{si} \quad A \in E, \quad |(A, B)| < n(i).$$

En outre, on pose

$$\text{(8)} \qquad \zeta_i = dz'_i, \qquad \omega_i = dw_i,$$

pour chaque entier n, on considère l'isomorphisme

$$\text{(9)} \qquad u_n : \quad R[\zeta, \omega]/(\zeta, \omega)^{n+1} \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^{n\wedge}_{R/k}$$

le facteur direct

$$\text{(10)} \qquad E(n) = \oplus R.\zeta^A \omega^B, \qquad (A, B) \in \mathbf{N}^e \times \mathbf{N}^d, \quad A \notin E, \quad |(A, B)| \leqq n,$$

et le morphisme induit par (9) :

$$\text{(11)} \qquad v_n : \quad E(n) \to \mathbf{P}^{n\wedge}_{A/k}.$$

La condition (4) implique que (11) est un *isomorphisme modulo* M *pour tout* $n \geqq 0$. Par ailleurs, la condition (7) assure que $j^n_{R/k}(f_i) \in E(n)$ si $n < n(i)$ et comme f_i appartient à l'idéal J tel que A = R/J, alors $v_n(j^n_{R/k}(f_i)) = 0$, donc $j^n_{R/k}(f_i) \in ME(n)$, ce qui prouve que $j^n_{R/k}(f_i) \in M\mathbf{P}^{n\wedge}_{R/k}$, ce qui prouve que $v_M(f_i) \geqq n(i)$, ce qui prouve (i).

LEMME 4.2. — *Sous les hypothèses de* 4.1, *soit* $s_{i,0}$ *l'image de* s_i *dans* R_0. *On a*

(i) $v_M(s_i) = q_i$, *les* $\sigma_i = \mathrm{in}_M(s_i)$ *forment une suite régulière de* $\mathrm{gr}_M(R)$ *et engendrent* $\mathrm{in}_M((s)R, R)$;

(ii) $v_{M_0}(s_{i,0}) = q_i$, *les* $\mathrm{in}_{M_0}(s_{i,0})$ *forment une suite régulière de* $\mathrm{gr}_{M_0}(R_0)$, *ils engendrent* $\mathrm{in}_{M_0}((s)R_0, R_0)$ *et on a*

$$(1)\qquad H_M(R/(s)R) = H_M^{(d)}(R_0/(s)R_0) = (1-T)^{-d-e} \prod_{1 \leqq i \leqq e} (1-T^{q_i});$$

(iii) $\mathrm{gr}_M(R/(s)R)$ *est fini et plat sur* $\mathrm{gr}_N(S)$ *de* rang $\prod_{1 \leqq i \leqq e} q_i$.

A cause de (d 1) et 4.1 (i), on a $v_M(s_i) \geqq q_i$, ce qui donne en appliquant deux fois 1.2 :

$$H_M(R) \prod_{1 \leqq i \leqslant e} ((1-T^{q_i})/(1-T)) \leqq H_M^{(e)}(R/(s)R) \leqq H_M^{(e+d)}(R/(w, s)R).$$

D'après (d 2), les termes extrêmes sont égaux, donc $(\sigma_1, \ldots, \sigma_e, W_1, \ldots, W_d)$ est une suite régulière dans $\mathrm{gr}_M(R)$ et d'après 1.2, on a (i), (ii) et (1). La première égalité de (1) montre par 1.3 que $\mathrm{gr}_M(R/(s)R)$ est plat sur $\mathrm{gr}_N(S) = k[W]$ et son rang est fini et égal à $\prod q_i$, car c'est la longueur de $\mathrm{gr}_M(R/(s)R)/(W)\,\mathrm{gr}_M(R/(s)R)$ qui est la valeur en $T = 1$ du polynôme $H(R_0/(s)R_0) = \prod((1-T_{q_i})/(1-T))$, ce qui prouve (iii).

PROPOSITION 4.3. — *Soit une présentation notée comme en* 3.1 *et soit* P *un idéal premier tel que* R/P *soit régulier et* $J \subset P$.

(i) *Pour que* $\mathrm{gr}_P(A)$ *soit plat sur* R/P, *il faut et il suffit que* $f_i \in P^{n(i)}$ *pour* $1 \leqq i \leqq m$;

(ii) *S'il en est ainsi, on a* $s_i \in P^{q_i}$ *pour* $1 \leqq i \leqq e$, $\mathrm{gr}_P(R/(s)R)$ *est plat sur* R/P *et en outre le morphisme naturel* $S/P \cap S \to R/P$ *est un isomorphisme.*

4.3.1. Si $f_i \in P^{n(i)}$, alors $\mathrm{gr}_P(A)$ est plat sur R/P par le critère de platitude normale de Hironaka, car on a $v_M(f_i) = n(i)$ d'après 4.1 (i). Pour prouver la réciproque, on peut remplacer R et S par leurs complérés, choisir un corps de représentants k de S et admettre provisoirement que $\mathbf{P}^{n\wedge}_{A/k}/P\mathbf{P}^{n\wedge}_{A/k}$ est plat sur R/P pour $n \geqq 0$. Alors, le morphisme 4.1 (11), qui est un isomorphisme modulo M, fournit modulo P un morphisme qui est surjectif par le lemme de Nakayama :

$$(1)\qquad v'_n:\quad E(n)/PE(n) \to \mathbf{P}^{n\wedge}_{A/k}/P\,\mathbf{P}^{n\wedge}_{A/k}.$$

La source de (1) est libre sur R/P par construction et son but l'est par hypothèse de platitude; comme v'_n est un isomorphisme modulo M, c'est un isomorphisme. Or on a déjà vu dans 4.1 que si $n < n(i)$, alors on a $j^n_{R/k}(f_i) \in E(n)$ et $v_n(j^n_{R/k}(f_i)) = 0$; comme v'_n est injectif, on en tire que $j^{n\wedge}_{R/k}(f_i) \in P\mathbf{P}^n_{R/k}$. Le lemme 4.3.3 ci-dessous nous prouve à la fois que ceci assure que $f_i \in P^{n(i)}$ et le point laissé en suspens.

4.3.2. Pour prouver (ii), on note que $f_i \in P^{n(i)}$ assure que $s_i \in P^{q_i}$ car on a (d 1), comme on sait par 4.2 que $v_M(s_i) = q_i$ et que les $\mathrm{in}_M(s_i)$ engendrent $\mathrm{in}_M((s)R, R)$, on en tire par le lemme de platitude normale de Hironaka que $\mathrm{gr}_P(R/(s)R)$ est plat sur R/P. Enfin, comme $P \supset (s)R$, $\mathrm{gr}_M(R/P)$ est un quotient de $\mathrm{gr}_M(R/(s)R)$, donc, par 4.2 (iii), $\mathrm{gr}_M(R/P)$ est fini sur $\mathrm{gr}_N(S)$, mais comme il s'agit d'un morphisme homogène de degré zéro entre algèbres de polynômes, car S et R/P sont réguliers, ce morphisme ne peut être que surjectif, ce qui assure que $S \to R/P$ est surjectif, ce qui signifie que $S/P \cap S \to R/P$ est bijectif. Il reste à prouver le lemme suivant.

LEMME 4.2.3. — *Soit* R *un anneau local noethérien régulier qui contient un corps de représentants* k *et soit* P *un idéal de* R *tel que* R/P *soit régulier.*

(i) *Si* $f \in \mathrm{R}$ *et si* $j^n_{\mathrm{R}/k}(f) \in \mathrm{P}\mathbf{P}^{n\wedge}_{\mathrm{R}/k}$, *alors* $f \in \mathrm{P}^{n+1}$;

(ii) *Si* J *est un idéal de* R *et si* $\mathrm{gr}_{\mathrm{P}}(\mathrm{A})$ *est plat sur* R/P, *avec* A = R/J, *alors* $\mathbf{P}^{n\wedge}_{\mathrm{A}/k}/\mathrm{P}\mathbf{P}^{n\wedge}_{\mathrm{A}/k}$ *est plat sur* R/P *de rang égal à la longueur de* $\mathrm{A}/\mathrm{M}^{n+1}\mathrm{A}$ *où* M *est l'idéal maximal de* R.

Dans ceci, on note $\mathbf{P}^{n\wedge}_{\mathrm{R}/k}$ le séparé complété pour la topologie M-adique de $\mathbf{P}^n_{\mathrm{R}/k}$, *idem* si A remplace R. On choisit un système régulier de paramètres $(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s)$ de R tel que $\mathrm{P} = (x)$. On peut supposer que R est complet, choisir un corps de représentants k de R et on a

$$\mathrm{R} = k[[x, y]], \qquad \mathrm{R}/\mathrm{P} = k[[y]].$$

Par la formule de Taylor 2.5, si on pose $\xi_i = dx_i$ et $\eta_i = dy_i$, les morphismes

$$j^n_{\mathrm{R}/k}: \quad \mathrm{R} \to \mathbf{P}^{n\wedge}_{\mathrm{R}/k}/\mathrm{P}\,\mathbf{P}^{n\wedge}_{\mathrm{R}/k}$$

induisent par passage à la limite projective un morphisme

$$(1) \qquad g: \quad \mathrm{R} = k[[x, y]] \to \mathbf{R} = \varprojlim \mathbf{P}^{n\wedge}_{\mathrm{R}/k}/\mathrm{P}\,\mathbf{P}^{n\wedge}_{\mathrm{R}/k} = k[[y, \xi, \eta]],$$

avec $g(f) = f(\xi, y+\eta)$, d'où (i). Si A = R/J, si on pose $A = \mathbf{R}/g(\mathrm{J})\,\mathbf{R}$, on en tire que $A/(\xi, \eta)^{n+1} A$ muni de sa structure de $k[[y]]$-module naturelle est isomorphe à $\mathbf{P}^{n\wedge}_{\mathrm{A}/k}/\mathrm{P}\mathbf{P}^{n\wedge}_{\mathrm{A}/k}$. Puisque g est plat, $\mathrm{gr}_{(\xi)}(A) = (A/(\xi) A) \otimes \mathrm{gr}_{(x)}(\mathrm{A})$ est plat sur $A/(\xi) A$, donc par spécialisation de la platitude normale [7], $\mathrm{gr}_{(\xi, \eta)}(A)$ est plat sur $A/(\xi, \eta) A$, donc $\mathbf{P}^{n\wedge}_{\mathrm{A}/k}/\mathrm{P}\mathbf{P}^{n\wedge}_{\mathrm{A}/k}$ est plat sur A/P. Son rang est celui de $\mathbf{P}^{n\wedge}_{\mathrm{A}/k}/\mathrm{M}\mathbf{P}^{n\wedge}_{\mathrm{A}/k} \simeq \mathrm{A}/\mathrm{M}^{n+1}$, ce qui achève de prouver (ii).

4.3.4. Puisque $\mathrm{gr}_{\mathrm{M}}(\mathrm{R}) = \mathrm{gr}_{\mathrm{N}}(\mathrm{S})[\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_e]$, les Z_i sont des coordonnées différentielles globales de $\mathrm{gr}_{\mathrm{M}}(\mathrm{R})$ sur $\mathrm{gr}_{\mathrm{N}}(\mathrm{S})$, ce qui donne un sens aux opérateurs différentiels $\mathrm{D}^{(\mathrm{Z})}_{\mathrm{A}}$ de $\mathrm{gr}_{\mathrm{M}}(\mathrm{R})$ sur $\mathrm{gr}_{\mathrm{N}}(\mathrm{S})$. En outre, si $f \in \mathrm{M}^n$, alors la classe de $\mathrm{D}^{(z)}_{\mathrm{A}}(f)$ dans $\mathrm{gr}^{n-|\mathrm{A}|}_{\mathrm{M}}(\mathrm{R})$ est $\mathrm{D}^{(z)}_{\mathrm{A}}(\mathrm{F})$, où F est la classe de f dans $\mathrm{gr}^n_{\mathrm{M}}(\mathrm{R})$. Comme $v_{\mathrm{M}}(f_i) = n(i)$, $v_{\mathrm{M}}(s_j) = q_j$ et comme P_j est homogène de degré q_j, en posant $\mathrm{F}_i = \mathrm{in}_{\mathrm{M}}(f_i)$ et $\sigma_j = \mathrm{in}_{\mathrm{M}}(s_j)$, on a

$$(1) \qquad \sigma_j = \mathrm{P}_j(\mathrm{D}^{(\mathrm{Z})}_{\mathrm{A}}(\mathrm{F}_i)),$$

où, par abus de notations, on note encore P_j le polynôme déduit de P_j en réduisant ses coefficients modulo N.

5. Points proches d'une présentation

5.1. Cette partie sera sans doute plus facile à suivre si l'on emploie aussi un langage géométrique. Soit donc une présentation

$$(\mathrm{S}; \mathrm{R}; z_1, \ldots, z_e; \mathrm{J}; f_1, \ldots, f_m: n(1), \ldots, n(m); \mathrm{E}; \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_e; q_1, \ldots, q_e; s_1, \ldots, s_e).$$

On lui associe

$$(1) \qquad \mathrm{Z} = \mathrm{Spec}(\mathrm{R}), \quad \mathrm{X} = \mathrm{Spec}(\mathrm{R}/\mathrm{J}), \quad \mathrm{W} = \mathrm{Spec}(\mathrm{R}/(s)\mathrm{R}), \quad S = \mathrm{Spec}(\mathrm{S}),$$

le point fermé x de Z et le morphisme

$$\text{(2)} \qquad \pi:\ \mathrm{Z} \to S \quad \text{déduit de } \mathrm{S} \subset \mathrm{R}, \qquad \text{avec} \quad s = \pi(x).$$

Un sous-schéma fermé Y de X est dit *permis* s'il est régulier et si X est normalement plat sur Y; il lui correspond un idéal P de R, avec $\mathrm{P} \supset \mathrm{J}$, R/P régulier et $f_i \in \mathrm{P}^{n(i)}$ [*cf.* 4.3 (i)]. D'après 4.2 (i) et 4.3 (ii), Y est aussi permis pour W, et π induit un isomorphisme entre Y et $\pi(\mathrm{Y}) \subset S$. On peut ainsi éclater Y dans Z, X, W et $\pi(\mathrm{Y})$ dans S et l'on obtient un diagramme commutatif

$$\text{(3)} \qquad \begin{tikzcd}
\mathrm{X} \arrow[dr] & & & \mathrm{X}^0 \arrow[lll, "u_{\mathrm{X}}"'] \arrow[dr] & & \\
& \mathrm{Z} \arrow[dd, "\mu"'] & & & \mathrm{Z}^0 \arrow[lll, "u_{\mathrm{Z}}"'] \arrow[dd, dashed, "\pi^0"] & \\
& & \mathrm{W} \arrow[ul] & & & \mathrm{W}^0 \arrow[lll, "u_{\mathrm{W}}"'] \arrow[ul] \\
& S & & & S^0 \arrow[lll, "u_S"'] &
\end{tikzcd}$$

où les flèches sans nom sont des immersions fermées et π^0 une application rationnelle. Ceci dit, *un point proche* de x est un point x^0 de X^0, avec $u_{\mathrm{X}}(x^0) = x$ et

$$\text{(4)} \qquad \mathrm{H}_x(\mathrm{X}) = \mathrm{H}_{x^0}^{(t(x^0))}(\mathrm{X}^0), \qquad t(x^0) = t(k(x^0)/k),$$

où $k = \mathrm{R}/\mathrm{M} = \mathrm{S}/\mathrm{N}$ est le corps résiduel de $\mathrm{A} = \mathrm{R}/\mathrm{J} = \mathcal{O}_{\mathrm{X},x}$ et $k(x^0)$ celui de x^0. Comme on voit, la notion de point proche ne fait intervenir que l'anneau $\mathrm{A} = \mathrm{R}/\mathrm{J}$.

THÉORÈME 5.2. — *Avec les notations ci-dessus, soit x^0 un point proche de x. Si* S *contient un corps, on a*

(i) $x^0 \in \mathrm{W}^0$, *l'application rationnelle π^0 est définie au point x^0 et si on pose $s^0 = \pi^0(x^0)$, l'extension résiduelle $k(x^0)/k(s^0)$ est triviale et il existe $t \in \mathrm{Q} = \mathrm{P} \cap \mathrm{S}$ tel que*

$$\text{(1)} \qquad t\mathrm{R}^0 = \mathrm{PR}^0, \quad \textit{où } \mathrm{R}^0 = \mathcal{O}_{\mathrm{Z}^0, x^0} \qquad \textit{et} \qquad t\mathrm{S}^0 = \mathrm{QS}^0, \quad \textit{avec } \mathrm{S}^0 = \mathcal{O}_{S^0, s^0}.$$

En outre, il existe $b_1, \ldots, b_e$ dans S *tels que $z_i + b_i \in \mathrm{P}$ pour $1 \leqq i \leqq e$;*

(ii) *Si* S^0, R^0, *t et les b_i sont comme* (i), *si l'on pose dans* R^0

$$\text{(2)} \qquad z_i^0 = (z_i + b_i)/t, \qquad f_i^0 = f_i/t^{n(i)}, \qquad s_i^0 = s_i/t^{q_i},$$

et si l'on note J^0 *l'idéal de* $\mathrm{A}^0 = \mathcal{O}_{\mathrm{X}^0, x^0}$ *dans* R^0, *alors*

$$(\mathrm{S}^0;\ \mathrm{R}^0,\ z_1^0, \ldots, z_e^0;\ \mathrm{J}^0;\ f_1^0, \ldots, f_m^0;\ n(1), \ldots, n(m);$$
$$\mathrm{E};\ \mathrm{P}_1^0, \ldots, \mathrm{P}_e^0;\ q_1, \ldots, q_e;\ s_1^0, \ldots, s_e^0)$$

est une présentation, où P_i^0 est le polynôme dont les coefficients sont les images de ceux de P_i par le morphisme $\mathrm{S} \to \mathrm{S}^0$.

5.2.1. La démonstration est longue, mais l'on peut déjà noter que l'existence des b_i tient simplement au fait que $\mathrm{S}/\mathrm{Q} \to \mathrm{R}/\mathrm{P}$ est bijectif et que (2) a un sens en vertu de (1) car $z_i + b_i \in \mathrm{P}$, $f_i \in \mathrm{P}^{n(i)}$ et $s_i \in \mathrm{P}^{q_i}$ (4.3). En outre, par platitude normale, puisque les f_i

forment une base standard de l'idéal J et que $v_P(f_i) = v_M(f_i)$, on sait que $J^0 = (f_1^0, \ldots, f_m^0) R^0$. Commençons par étudier les fibres des divers éclatés. Puisque $Z^0 = \operatorname{Proj}(\operatorname{gr}_P(R))$, on a un morphisme lisse (cône projetant)

$$\mu_Z : \quad T_Y(Z)(x) - \{0\} \to Z^0(x),$$

où $T_Y(Z)(x)$ est la fibre en x de $T_Y(Z) = \operatorname{Spec}(\operatorname{gr}_P(R))$ et $Z^0(x)$ celle de $u_Z : Z^0 \to Z$. Par ailleurs, on a un morphisme lisse $\nu_Z : T_x(Z) \to T_Y(Z)(x)$, de fibre $T_x(Y)$, car Y et Z sont réguliers, d'où, par composition, un morphisme lisse

(3) $$\lambda_Z : \quad T_x(Z) - T_x(Y) \to Z^0(x).$$

Si on pose $C_x(X) = \operatorname{Spec}(\operatorname{gr}_M(A))$, comme X est normalement plat le long de Y, on a

(4) $$\lambda_Z^{-1}(X^0(x)) = C_x(X) - T_x(Y), \qquad \text{où} \quad X^0(x) = u_X^{-1}(x),$$

et λ_Z induit un morphisme lisse

(5) $$\lambda_X : \quad C_x(X) - T_x(Y) \to X^0(x).$$

Soit x' le point générique de $\lambda_X^{-1}(x^0)$, le corps résiduel $k(x')$ est transcendant pur sur $k(x^0)$ avec

(6) $$t(k(x')/k(x^0)) = r+1, \qquad r = \dim(Y),$$

et comme λ_X est lisse à fibres de dimension $1+r$, on en tire

(7) $$H_{x'}(C_x(X)) = H_{x^0}(X^0(x)).$$

En outre, comme le sommet ω de $C_x(X)$ appartient à l'adhérence de x', d'après 2.12.2(4), il existe un entier t' tel que

(8) $$H_\omega^{(t')}(C_x(X)) \geqq H_{x'}^{(t(k(x')/k)+t')}(C_x(X)),$$

et bien sûr

$$t(k(x')/k) = t(k(x')/k(x^0)) + t(k(x^0)/k) = \delta + r + 1, \qquad \text{où} \quad \delta = t(k(x^0)/k),$$

Or on a évidemment $H_x(X) = H_\omega(C_x(X))$ et comme M/P est engendré dans R/P par r éléments et que PR^0 est principal, MR^0 est engendré par $1+r$ éléments, d'où

$$H_{x^0}^{(1+r)}(X^0(x)) \geqq H_{x^0}(X^0) = H_x^{(-\delta)}(X),$$

où l'égalité est l'hypothèse que x^0 est un point proche. En comparant avec (7) et (8), on en tire

$$H_\omega^{(t')}(C_x(X)) \geqq H_{x'}^{(t'+\delta+r+1)}(C_x(X)) = H_{x^0}^{(t'+\delta+r+1)}(X^0(x)) \geqq H_x^{(t')}(X) = H_\omega^{(t')}(C_x(X)),$$

donc toutes ces inégalités sont des égalités et en particulier on a

(9) $$H_\omega(C_x(X)) = H_{x'}^{(t(k(x')/k))}(C_x(X)), \qquad t(k(x')/k) = \delta + r + 1.$$

LEMME 5.2.2. — *Avec les notations de* (5.2.1), *si on pose*

(1) $$F_i = \mathrm{in}_M(f_i), \qquad \sigma_i = \mathrm{in}_M(s_i),$$

on a

(2) $$v_{x'}(F_i) = n(i) \qquad et \qquad v_{x'}(\sigma_i) = q_i.$$

Un polynôme homogène de degré n admet une dérivée (divisée) d'ordre n qui est une constante non nulle, donc sa valuation est partout $\leqq n$; pour prouver (2), il suffit donc de prouver les inégalités correspondantes. Comme $\sigma_j = P_j(D_A^{(Z)} F_i)$ avec P_j homogène de degré q_i (4.3.4), il suffit de prouver que $v_{x'}(F_i) \geqq n(i)$. On introduit un sous-corps k' de k, séparant pour $k(x')/k$ (2.10), des coordonnées différentielles $(c_1, \ldots, c_r)$ de k/k', ce qui donne des coordonnées k'-différentielles globales $(Z_1, \ldots, Z_e, W_1, \ldots, W_d, c_1, \ldots, c_r)$ de $G = \mathrm{gr}_M(R)$, notations de 4.1, d'où des isomorphismes

(3) $$u_n : \ G[\zeta, \omega, \gamma]/(\zeta, \omega, \gamma)^{n+1} \xrightarrow{\sim} \mathbf{P}^n_{G/k'}, \qquad \gamma_i = dc_i.$$

On considère le facteur direct $H(n) = \oplus\, G\zeta^A \omega^B \gamma^C$, $A \notin E$, $|A| + |B| + |C| \leqq n$ de la source de u_n et le morphisme induit par u_n :

(4) $$v_n : \ H(n) \to \mathbf{P}^n_{G'/k'}, \qquad G' = \mathrm{gr}_M(R/J).$$

Le premier point est que v_n est un isomorphisme modulo l'idéal G_+ qui définit l'origine ω de $T_x(Z) = \mathrm{Spec}(G)$. En effet, d'après 4.1 (4), $E \times \mathbf{N}^d$ est l'exposant de $I = \mathrm{in}_M(R, J)$ par rapport aux variables (Z, W), d'où l'on déduit que $E \times \mathbf{N}^d \times \mathbf{N}^r$ est l'exposant de l'idéal du quotient

$$P_{G'/k'} = \varprojlim \mathbf{P}^n_{G'/k'}/G_+ \mathbf{P}^n_{G'/k'}$$

de

$$P_{G/k'} = \varprojlim \mathbf{P}^n_{G/k'}/G_+ \mathbf{P}^n_{G/k'} \approx \mathcal{O}_{G,\omega}[[\gamma]]$$

[2.8.2 (4)]. Si l'on introduit le sous-schéma réduit $U = \overline{\{x'\}}$ de $T_x(Z)$, comme $\omega \in U$ et que l'on a $H_\omega(C_x(X)) = H_{x'}^{(t(k(x')/k))}(C_x(X))$ [5.2.1 (9)], il résulte de 2.12.2 (iii) que $\mathcal{O}_{U,\omega} \otimes_G \mathbf{P}^n_{G'/k'}$ est plat sur $\mathcal{O}_{U,\omega}$ pour $n \geqq 0$. Il en résulte que le morphisme

$$v'_n : \ \mathcal{O}_{U,\omega} \otimes_G H(n) \to \mathcal{O}_{U,\omega} \otimes_G \mathbf{P}^n_{G'/k'}$$

induit par v_n est un isomorphisme pour $n \geqq 0$, car il est surjectif modulo G_+ et sa source et son but sont libres. Or on sait que $j^n_{G/k'}(F_i) \in H(n)$ si $n < n(i)$, car $D_A^{(Z)} F_i = 0$ si $A \in E$, $|A| < n(i)$ d'après (c 4), et bien sûr, $v_n(j^n_{G/k'}(F_i)) = 0$ car $F_i = \mathrm{in}_M(f_i)$ appartient à l'idéal de G' dans G. D'où l'on déduit que l'image de $j^n_{G/k'}(F_i)$ dans $\mathcal{O}_{U,\omega} \otimes_G \mathbf{P}^n_{G/k'}$ est nulle, donc aussi son image dans $k(x') \otimes_G \mathbf{P}^n_{G/k'}$. Comme $k(x')$ est séparable sur k' par construction, on en tire par le critère jacobien que $v_{x'}(F_i) \geqq n(i)$, d'où la conclusion.

LEMME 5.2.3. — *Soit* $\theta : T_x(Z) \to T_s(S)$, *le morphisme tangent à* $\pi : Z \to S$ *qui est lisse à fibres de dimension* e. *Soit* $y \in C_x(X)$ *tel que* $v_y(F_i) = n(i)$. *Alors* $y \in C_x(W)$, *l'extension résiduelle* $k(y)/k(\theta(y))$ *est triviale et* y *est le seul point de* $\theta^{-1}(\theta(y)) \cap C_x(W)$. *Si* $y \notin T_x(Y)$, *alors* $\theta(y) \notin T_s(\pi(Y))$.

Puisque $v_y(F_i) = n(i)$, alors $v_y(\sigma_j) = q_j$ car $\sigma_j = P_j(D_A^{(Z)} F_i)$ (4.3.4), donc $y \in C_x(W)$ car les σ_i sont les équations de $C_x(W)$ dans $T_x(Z)$ [4.2 (i)]. Comme $C_x(W)$ est fini sur $T_s(S)$ [4.2 (iii)], il en résulte que y est algébrique sur $\theta(y)$ et comme θ est lisse de dimension e, l'anneau local en y de la fibre $V = \theta^{-1}(\theta(y))$ est régulier de dimension e; si $\sigma'_i = \sigma_i \mid V$, on a encore $v_y(\sigma'_i) \geqq q_i$ et par le lemme 1.2 :

$$H_y^{(e)}(C_x(W) \cap V) \geqq (1-T)^{-e} \prod_{1 \leqq i \leqq e} ((1-T^{q_i})/(1-T)).$$

En multipliant par $(1-T)^e$ et en faisant $T = 1$, on trouve que la longueur de l'anneau local en y de $C_x(W) \cap V$ est $\geqq \prod q_i$. Par 4.2 (iii), $C_x(W)$ est plat sur $T_s(S)$ de rang $\prod q_i$, donc la longueur sur $k(\theta(y))$ de l'anneau (« global ») de la fibre $C_x(W) \cap V$ est $\prod q_i$, ce qui prouve à la fois que y est le seul point de $C_x(W) \cap V$ et que $k(y) = k(\theta(y))$. Comme π induit un isomorphisme $Y \xrightarrow{\sim} \pi(Y)$ [4.3 (ii)], θ induit un isomorphisme $T_x(Y) \xrightarrow{\sim} T_s(\pi(Y))$ donc si $\theta(y) \in T_s(\pi(Y))$, il existe $y' \in T_x(Y)$ avec $\theta(y') = \theta(y)$ et comme $T_x(Y) \subset C_x(W)$, on a $y' = y$, ce qui achève la preuve.

5.2.4. Soit à nouveau x' le point générique de $\lambda_X^{-1}(x^0)$ (5.2.1); d'après 5.2.2, on a $v_{x'}(F_i) = n(i)$ et d'après 5.2.3, on a $x' \in C_x(W)$ donc $x^0 \in W^0$. De plus $\theta(x') \notin T_s(\pi(Y))$; on peut donc choisir un système minimal de générateurs $(t, u_1, \ldots, u_f)$ de $P \cap S$, tel que $T = \mathrm{in}_M(t)$ soit non nul au point $s' = \theta(x')$. On a donc un système minimal de générateurs $(t, u_1, \ldots, u_f, z_1+b_1, \ldots, z_e+b_e)$ de P et deux ouverts affines de Z^0 et S^0, à savoir

(1) $$Z_t^0 = \mathrm{Spec}(R[z_1^0, \ldots, z_e^0, u_1^0, \ldots, u_f^0]/(z_i+b_i-tz_i^0, u_i-tu_i^0)),$$

(2) $$S_t^0 = \mathrm{Spec}(S[u_1^0, \ldots, u_f^0]/(u_i-tu_i^0))$$

ce qui prouve que l'application rationnelle $\pi^0 : Z^0 \to S^0$ est définie dans Z_t^0 tout entier et que le morphisme

(3) $$\pi_t^0 : \ Z_t^0 \to S_t^0$$

qu'elle induit est défini par l'inclusion évidente entre les anneaux de coordonnées. Comme T est non nul au point s', donc au point x', on en déduit que $x^0 \in Z_t^0$ et si on pose $s^0 = \pi_t^0(x^0)$, on a immédiatement 5.2. (1). Pour achever la preuve de 5.2. (i), il reste à voir que l'extension résiduelle $k(x^0)/k(s^0)$ est triviale. Pour cela, on complète (t, u) en un système régulier de paramètres $(t, u, v_1, \ldots, v_r)$ de S, $r = \dim(R/P)$, ce qui donne un système régulier de paramètres $(z_1+b_1, \ldots, z_e+b_e, t, u, v)$ de R et permet d'expliciter le morphisme λ_Z de 5.2.1 (3) au-dessus de $Z_t^0(x) = Z_t^0 \cap Z^0(x)$ comme le morphisme

(4) $$T_x(Z)_t = \mathrm{Spec}(k[Z, T, U, V, T^{-1}]) \xrightarrow{\lambda_Z} Z_t^0(x) = \mathrm{Spec}(k[z^0, u^0])$$

défini par le morphisme d'algèbres $z_i^0 \mapsto Z_i/T$, $u_i^0 \to U_i/T$, avec

$$Z_i = \mathrm{in}_M(z_i+b_i), \qquad T = \mathrm{in}_M(t), \qquad U_i = \mathrm{in}_M(u_i), \qquad V_i = \mathrm{in}_M(v_i)$$

et de considérer l'analogue de λ_Z :

(5) $$T_s(S)_t = \mathrm{Spec}(k[T, U, V, T^{-1}] \xrightarrow{\lambda_S} S_t^0(s) = \mathrm{Spec}(k[u^0])$$

défini par le morphisme d'algèbres $u_i^0 \mapsto U_i/T$. D'où un carré cartésien, où les flèches verticales sont induites par les inclusions d'algèbre évidentes

(6)
$$\begin{array}{ccc} T_x(Z)_t & \xrightarrow{\lambda_Z} & Z_t^0(x) \\ {\scriptstyle\theta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi_t^0(x)} \\ T_s(S)_t & \xrightarrow{\lambda_S} & S_t^0(s) \end{array}$$

et où θ est induit par le morphisme tangent à $\pi : Z \to S$ et $\pi_t^0(x)$ par $\pi_t^0 : Z_t^0 \to S_t^0$. Considérons le point x'' de $\lambda_Z^{-1}(x^0)$ où $T = 1$ et $V_1 = \ldots = V_r = 0$. Alors $k(x'') = k(x^0)$ et si $s'' = \theta(x'')$, on a aussi $\lambda_S(s'') = s^0$ et $k(s'') = k(s^0)$. En outre comme x'' est une spécialisation du point générique x' de $\lambda_Z^{-1}(x^0)$, on a $v_{x''}(F_i) \geqq v_{x'}(F_i) = n(i)$ d'après 5.2.2, donc d'après 5.2.3, $k(x'') = k(s'')$, d'où $k(x^0) = k(s^0)$, *ce qui achève la preuve de* 5.2 (i), et prouve la condition (*a* 1) pour la présentation introduite en 5.2 (ii). L'anneau local S' de $S_t^0(s) = \operatorname{Spec}(k[u_1^0, \ldots, u_f^0])$ au point s^0 est régulier de dimension $f-t(k(s^0)/k) = \dim(S)-r-1-\delta$ et comme $S' = S^0/NS^0$ et que NS^0 est engendré par la suite régulière $(t, v_1, \ldots, v_r)$, alors S^0 est régulier de dimension

(7)
$$\dim(S^0) = \dim(S)-\delta, \qquad \delta = t(k(x^0)/k).$$

De même, l'anneau local R' de $Z_t^0(x)$ au point x^0 est régulier de dimension $\dim(R)-1-r-\delta$ et comme $R' = R^0/MR^0$ et que MR^0 est engendré par la suite régulière $(t, v_1, \ldots, v_r)$, alors R^0 est régulier de dimension

(8)
$$\dim(R^0) = \dim(R)-\delta.$$

Soit N^0 l'idéal maximal de S^0. Alors $R_0^0 = R^0/N^0R^0$ est l'anneau local de

$$Z_t^0(s^0) = \operatorname{Spec}(k(s^0)[z_1^0, \ldots, z_e^0])$$

au point x^0 qui est rationnel sur s^0, donc R_0^0 est régulier de dimension e et comme

$$\dim(R^0)-\dim(S^0) = \dim(R)-\dim(S) = e,$$

on a la condition (*a* 2). Enfin, pour prouver (*a* 3), il suffit d'après 3.2 de prouver que les z_i^0 sont des coordonnées différentielles locales de $R_0^0/k(s^0)$, ce qui résulte du fait que ce sont des coordonnées différentielles globales de $Z_t^0(s^0)$. Ceci prouve les conditions (*a*).

5.2.5. Nous allons tout de suite prouver les conditions (*c* 4) et (*d* 1) en comparant les formules dans R/S et R^0/S^0. Avec les notations de 2.5, on a un carré commutatif

(1)
$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{D^{(z)}} & \hat{P}_{R/S} = \hat{R}[[\zeta]] \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varepsilon} \\ R^0 & \xrightarrow{D^{(z^0)}} & \hat{P}_{R^0/S^0} = \hat{R}^0[[\zeta^0]] \end{array}$$

avec $\zeta_i = dz_i$ et $\zeta_i^0 = dz_i^0$. Comme (1) commute, on a

(2)
$$\varepsilon(\zeta_i) = D^{(z^0)}(z_i)-z_i = D^{(z^0)}(tz_i^0-b_i)-(tz_i^0-b_i) = t\zeta_i^0$$

et pour tout $f \in \mathrm{R}$, comme $\mathrm{D}^{(z)} f = \sum \mathrm{D}_{\mathrm{A}}^{(z)}(f)\, \zeta^{\mathrm{A}}$, on en tire

$$(3) \qquad t^{|\mathrm{A}|}\, \mathrm{D}_{\mathrm{A}}^{(z)}(f) = \mathrm{D}_{\mathrm{A}}^{(z^0)}(f), \qquad \mathrm{A} \in \mathrm{N}^e.$$

En appliquant ceci aux f_i, on en tire

$$(4) \qquad \mathrm{D}_{\mathrm{A}}^{(z^0)}(f_i^0) = t^{|\mathrm{A}| - n(i)}\, \mathrm{D}_{\mathrm{A}}^{(z)}(f_i)$$

ce qui prouve (c 4) et, par homogénéité des polynômes P_j, on a également

$$\mathrm{P}_j^0(\mathrm{D}_{\mathrm{A}}^{(z^0)}(f_i^0)) = t^{-q_j}\, \mathrm{P}_j(\mathrm{D}_{\mathrm{A}}^{(z)}(f_i)) = s_j/t^{q_j} = s_j^0,$$

ce qui prouve (d 1).

5.2.6. Nous allons voir que les dernières conditions à vérifier, à savoir (b 1), (c 1), (c 2), (c 3) et (d 2) se déduisent tout bêtement par transport de structure des analogues pour la présentation de départ. Explicitons d'abord celles-ci. Elles font intervenir

$$(1) \qquad \mathrm{gr}_{\mathrm{M}_0}(\mathrm{R}_0) = k[\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_e]$$

et les $\mathrm{in}_{\mathrm{M}}(f_{i,0})$. Comme $v_{\mathrm{M}_0}(f_{i,0}) = n(i)$ par (c 1) et que $v_{\mathrm{M}}(f_i) = n(i)$ par 4.1 (i), on a

$$(2) \qquad \mathrm{in}_{\mathrm{M}_0}(f_{i,0}) = \mathrm{F}_i(\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_e, 0, 0, 0),$$

où l'on a posé

$$\mathrm{in}_{\mathrm{M}}(f_i) = \mathrm{F}_i(\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_e, \mathrm{T}, \mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_f, \mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_r)$$

et comme les $\mathrm{in}_{\mathrm{M}_0}(f_{i,0})$ engendrent $\mathrm{in}_{\mathrm{M}_0}(\mathrm{J}_0, \mathrm{R}_0)$ par (c 2), alors

$$(3) \qquad \mathrm{gr}_{\mathrm{M}_0}(\mathrm{R}_0/\mathrm{J}_0) = k[\mathrm{Z}]/(\mathrm{F}_1(\mathrm{Z}, 0), \ldots, \mathrm{F}_m(\mathrm{Z}, 0)).$$

Notons au passage que, comme $v_{\mathrm{P}}(f_i) = v_{\mathrm{M}}(f_i)$ [4.3 (i)], on a

$$(4) \qquad \mathrm{F}_i(\mathrm{Z}, \mathrm{T}, \mathrm{U}, \mathrm{V}) = \mathrm{F}_i(\mathrm{Z}, \mathrm{T}, \mathrm{U}, 0).$$

La condition (c 3) signifie donc que E est l'exposant de l'idéal $(\mathrm{F}_1(\mathrm{Z}, 0), \ldots, \mathrm{F}_e(\mathrm{Z}, 0))$ de $k[\mathrm{Z}]$ (*cf.* 3.2.1) et la condition (b 1) signifie que la série de Hilbert de l'algèbre (3) est

$$(5) \qquad \mathrm{H}(k[\mathrm{Z}]/(\mathrm{F}_i(\mathrm{Z}, 0))) = \mathrm{H}_x^{(-d)}(\mathrm{X}).$$

Enfin, d'après 4.2 (ii), on a $v_{\mathrm{M}}(s_i) = v_{\mathrm{M}_0}(s_{i,0}) = q_i$; si on pose

$$\sigma_i(\mathrm{Z}, \mathrm{T}, \mathrm{U}, \mathrm{V}) = \mathrm{in}_{\mathrm{M}}(s_i),$$

on a donc $\mathrm{in}_{\mathrm{M}_0}(s_{i,0}) = \sigma_i(\mathrm{Z}, 0, 0, 0)$ et comme en outre les $\sigma_i(\mathrm{Z}, 0)$ engendrent $\mathrm{in}_{\mathrm{M}_0}((s)\,\mathrm{R}_0, \mathrm{R}_0)$, on a

$$(6) \qquad \mathrm{gr}_{\mathrm{M}_0}(\mathrm{R}_0/(s)\,\mathrm{R}_0) = k[\mathrm{Z}]/(\sigma_1(\mathrm{Z}, 0), \ldots, \sigma_e(\mathrm{Z}, 0))$$

et la condition (d 2) s'écrit

(7) $$\mathrm{H}(k[\ ]/(\sigma_i(\mathrm{Z},0))) = \prod_{1 \leqq i \leqq e} ((1-\mathrm{T}^{q_i})/(1-\mathrm{T})).$$

Passons à la présentation associée au point proche x^0. On a un carré cartésien [5.2.4 (6)] et un point $x'' \in \mathrm{T}_x(\mathrm{Z})_t$ avec $\lambda_{\mathrm{Z}}(x'') = x^0$, $\theta(x'') = s''$ et $k(x'') = k(x^0) = k(s^0) = k(s'')$; on en déduit donc un isomorphisme de $k(s^0)$-schémas

(8) $$\mathrm{Z}_t^0(s^0) \simeq \theta^{-1}(s'') = \mathrm{Spec}(k(s'')[\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_e])$$

qui identifie $z_i^0 \mid \mathrm{Z}_t^0(s^0)$ à $\mathrm{Z}_i \mid \theta^{-1}(s'')$ car $\mathrm{T} \mid \theta^{-1}(s'') = 1$, et $f_i^0 \mid \mathrm{Z}_t^0(s^0)$ à $\mathrm{F}_i \mid \theta^{-1}(s'')$ parce que $v_{\mathrm{P}}(f_i) = v_{\mathrm{M}}(f_i) = n(i)$ et $f_i^0 = f_i/t^{n(i)}$. Introduisons les classes $d_1, \ldots, d_e$ de $\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_e$ dans $k(x'') = k(s'')$ et les variables

(9) $$\mathrm{Z}'_i = \mathrm{Z}_i - d_i,$$

je dis que

(10) $$\mathrm{F}_i \mid \theta^{-1}(s'') = \mathrm{F}_i(\mathrm{Z}'_1, \ldots, \mathrm{Z}'_e, 0).$$

En effet, par la formule de Taylor dans $k(s'')[\mathrm{Z}]$, comme x'' est rationnel sur s'', on a

$$\mathrm{F}_i \mid \theta^{-1}(s'') = \sum \mathrm{D}_{\mathrm{A}}^{(\mathrm{Z})} \mathrm{F}_i(x'').\mathrm{Z}'^{\mathrm{A}}.$$

Or F_i est homogène de degré $n(i)$, donc $\mathrm{D}_{\mathrm{A}}^{(\mathrm{Z})} \mathrm{F}_i = 0$ si $|\mathrm{A}| > n(i)$ et $\mathrm{D}_{\mathrm{A}}^{(\mathrm{Z})} \mathrm{F}_i$ est le coefficient de Z^{A} dans F_i si $|\mathrm{A}| = n(i)$. Enfin si $|\mathrm{A}| < n(i)$, on a $\mathrm{D}_{\mathrm{A}}^{(\mathrm{Z})} \mathrm{F}_i(x'') = 0$ car $v_{x''}(\mathrm{F}_i) = n(i)$ comme on l'a déjà vu, ce qui prouve (10). Comme $\lambda_{\mathrm{Z}}^{-1}(\mathrm{X}_t^0) = \mathrm{C}_x(\mathrm{X}) \cap \mathrm{T}_x(\mathrm{Z})_t$, on en tire

(11) $$\mathrm{X}_t^0(s^0) \simeq \theta^{-1}(s'') \cap \mathrm{C}_x(\mathrm{X}) = \mathrm{Spec}(k(s'')[\mathrm{Z}']/(\mathrm{F}_i(\mathrm{Z}', 0)))$$

et bien sûr, par cet isomorphisme, le point x^0 s'identifie au point où les Z'_i sont nuls, donc $\mathrm{X}_t^0(s^0)$ est un cône de sommet x^0. En comparant (11) et (3), on déduit de (5) que

(12) $$\mathrm{H}_{x^0}(\mathrm{X}_t^0(s^0)) = \mathrm{H}_x^{(-d)}(\mathrm{X})$$

et comme x^0 est un point proche de x et que $d^0 = d - \delta$ [5.2.4 (7)], cela donne $\mathrm{H}_{x^0}(\mathrm{X}_t^0(s^0)) = \mathrm{H}_{x^0}^{(-d^0)}(\mathrm{X}^0)$ qui n'est autre que (b 1) pour la présentation proche. Comme $f_i^0 \mid \mathrm{X}_t^0(s^0)$ s'identifie au polynôme $\mathrm{F}_i(\mathrm{Z}', 0)$ qui est homogène de degré $n(i)$, sa valuation est $n(i)$, ce qui est (c 1) et l'on a de même (c 2) et (c 3).

Il reste la condition (d 2). D'après 4.2 et 4.3 (ii), on a $v_{\mathrm{P}}(s_i) = v_{\mathrm{M}}(s_i) = q_i$ et les $\sigma_i = \mathrm{in}_{\mathrm{M}}(s_i)$ engendrent $\mathrm{in}_{\mathrm{M}}((s)\mathrm{R}, \mathrm{R})$, donc les s_i^0 sont les équations de W_t^0 dans Z_t^0 et l'anneau $\mathrm{R}_0^0/(s^0)\mathrm{R}_0^0$ qui intervient dans (d 2) est l'anneau local au point x^0 de $\mathrm{W}_t^0(s^0)$. Or, comme plus haut pour les f_i, l'isomorphisme (8) identifie $s_i^0 \mid \mathrm{Z}_t^0(s^0)$ à $\sigma_i \mid \theta^{-1}(s'')$ et comme $v_{x''}(\mathrm{F}_i) = n(i)$ et que $\sigma_j = \mathrm{P}_j(\mathrm{D}_{\mathrm{A}}^{(\mathrm{Z})}(\mathrm{F}_i))$, on a $v_{x''}(\sigma_j) = q_j$. Par le raisonnement qui prouve (10), on a donc

(13) $$\sigma_i \mid \theta^{-1}(s'') = \sigma_i(\mathrm{Z}'_1, \ldots, \mathrm{Z}'_e, 0)$$

et (8) induit un isomorphisme

$$(14) \qquad W_t^0(s^0) \simeq C_x(W) \cap \theta^{-1}(s'') = \operatorname{Spec}(k(s'')[Z']/(\sigma_i(Z', 0)))$$

qui applique x^0 au point où les Z_i' sont nuls. Donc $W_t^0(s^0)$ est un cône de sommet x^0 et (7) prouve (d 2), ce qui achève la démonstration du théorème.

COROLLAIRE 5.3. — *Si x^0 est un point proche de x dans X^0, c'est aussi un point proche de x dans W^0, l'on a des ouverts affines Z_t^0 et S_t^0 de Z^0 et S^0 où l'application rationnelle $\pi_t^0 : Z_t^0 \to S_t^0$ est définie et si on pose*

$$s^0 = \pi_t^0(x^0), \qquad Z_t^0(s^0) = \pi_t^{0^{-1}}(s^0), \qquad X_t^0(s^0) = X^0 \cap Z_t^0(s^0)$$

et

$$W_t^0(s^0) = W^0 \cap Z_t^0(s^0),$$

on a un isomorphisme de $k(s^0)$-schémas $Z_t^0(s^0) \simeq k(s^0) \times_k T_x(Z(s))$ qui induit des isomorphismes

$$(1) \qquad X_t^0(s^0) \simeq k(s^0) \times_k C_x(X(s)) \qquad \textit{et} \qquad W_t^0(s^0) \simeq k(s^0) \times_k C_x(W(s))$$

et identifie le point x^0 au sommet de ces cônes.

En appliquant 4.2 (1) à la présentation proche et à celle de départ, on a

$$H_{x^0}(W^0) = (1-T)^{-d^0-e} \prod_{1 \leqq i \leqq e} (1-T^{q_i}) = H_x^{(-\delta)}(W)$$

car $d-d^0 = \delta$ d'après 5.2.4 (7). Donc x^0 est un point proche de x dans W^0. La seconde assertion se déduit de 5.2.6 en comparant (11) et (3) d'une part, (14) et (6) d'autre part.

COROLLAIRE 5.4. — *Soit une présentation notée comme en* 5.1. *Soit* P *un idéal de* R *tel que* R/P *soit régulier et soit* $\pi^0 : Z^0 \to Z$ *l'éclaté de* $Z = \operatorname{Spec}(R)$ *de centre* $Y = \operatorname{Spec}(R/P)$.

(i) *Pour que* Y *soit permis pour* $X = \operatorname{Spec}(R/J)$ *il faut et il suffit que* $f_i \in P^{n(i)}$;

(ii) *S'il en est ainsi, si $x^0 \in Z^0$ se projette sur le point fermé x de Z et si $t \in R^0 = O_{Z^0, x^0}$ est tel que $PR^0 = tR^0$, pour que x^0 soit un point proche de x dans X^0, il faut et il suffit que $(f_i/t^{n(i)}) \in M^{0n(i)}$ où M^0 est l'idéal maximal de R^0.*

5.4.1. Tout d'abord, (i) répète 4.3 (i) pour éclairer les commentaires qui vont suivre. Ensuite, si x^0 est un point proche de x, 5.2 (ii) nous assure l'existence d'une présentation avec $f_i^0 = f_i/t^{n(i)}$ à une unité près et en lui appliquant 4.1 on trouve bien $f_i/t^{n(i)} \in M^{0n(i)}$.

5.4.2. Pour prouver la réciproque, il est inutile de supposer que les f_i sont sous-jacents à une présentation, il suffit de supposer que

(a) $v_P(f_i) = v_M(f_i) = n(i)$, $1 \leqq i \leqq m$,

(b) les $\operatorname{in}_M(f_i)$ engendrent $\operatorname{in}_M(J, R)$, (*c*) $v_{M^0}(f_i^0) \geqq n(i)$, où $f_i^0 = f_i/x_0^{n(i)}$, avec $x_0 \in P$ et $PR^0 = x_0 R^0$, pour conclure que x^0 est un point proche de x, c'est-à-dire :

$$(d) \qquad H_{M_0}(R^0/J^0) = H_M^{(-\delta)}(R/J), \qquad \delta = t(k^0/k)$$

et savoir en outre que

(*e*) les $\mathrm{in}_{M^0}(f_i^0)$ engendrent $\mathrm{in}_{M^0}(J^0, R^0)$.

Nous utilisons la variante que voici du lemme 1.3 :

LEMME 5.4.3. — *Soit* R *un anneau local régulier d'idéal maximal* M, *soit* $x_1, \ldots, x_d$ *une partie d'un système régulier de paramètres de* R, *soit* J *un idéal de* R *et soient* $f_1, \ldots, f_m$ *des éléments de* J. *On pose* $R' = R/(x)R$, $M' = MR'$, $J' = JR'$ *et on note* f_i' *l'image de* f_i *dans* R'. *On suppose que* $(x_1, \ldots, x_d)$ *est une suite régulière dans* R/J, *les* $\mathrm{in}_{M'}(f_i')$ *engendrent* $\mathrm{in}_{M'}(J', R')$ *et* $v_M(f_i) = v_{M'}(f_i') = n(i)$ *pour* $1 \leqq i \leqq m$. *Alors on a* $H_M(R/J) = H_{M'}^{(d)}(R'/J')$ *et les* $\mathrm{in}_M(f_i)$ *engendrent* $\mathrm{in}_M(J, R)$.

En introduisant $R'' = R/(x_1 R)$, on voit que l'on peut raisonner par récurrence sur d et supposer que $d = 1$. D'après 1.4, il suffit de prouver que $H_M(R/J) = H_{M'}^{(1)}(R'/J')$ et d'après 1.2 (ii), cela signifie que si $F \in (X_1) \cap \mathrm{in}_M(J, R)$, alors $F = X_1 G$ avec $G \in \mathrm{in}_M(J, R)$ et $X_1 = \mathrm{in}_M(x_1)$. Soit donc un tel F de degré n, on a $F = \mathrm{in}_M(f)$, $f \in J$ et comme $F \in (X_1)$, on a $v_{M'}(f') \geqq n+1$, où f' est l'image de f dans R'. Puisque les $\mathrm{in}_{M'}(f_i')$ engendrent $\mathrm{in}_{M'}(J', R')$, il existe des $a_i' \in M'^{n+1-n(i)}$ tels que $f' = \sum a_i' f_i'$. En relevant les a_i' en des $a_i \in M^{n+1-n(i)}$, on trouve que $F = \mathrm{in}_M(f - \sum a_i f_i)$ et comme $f - \sum a_i f_i \in x_1 R \cap J$ et que x_1 est non diviseur de zéro dans R/J, on a $f - \sum a_i f_i = x_1 g$, $g \in J$, d'où la conclusion.

5.4.4. Soit $(x_0, x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_r)$ un système régulier de paramètres de R tel que $x_0 R^0 = PR^0$ et $P = (x_0, x_1, \ldots, x_s)$. On a $MR^0 = (x_0, y_1, \ldots, y_r)R^0$ et je dis que

(*f*) $(x_0, y_1, \ldots, y_r)$ est une suite régulière dans R^0/J^0.

En effet, x_0 est non diviseur de zéro car R^0/J^0 est l'anneau local d'un éclaté et d'autre part $R^0/(J^0 + x_0 R^0)$ est un anneau local de $\mathrm{Proj}(\mathrm{gr}_P(R/J))$ lequel est plat sur R/P, car $\mathrm{gr}_P(R/J)$ l'est en vertu de (*a*) et (*b*), et $(y_1, \ldots, y_r)$ est un système régulier de paramètres de R/P.

Si l'on pose $R' = R^0/MR^0$, $M' = M^0 R'$, $J' = J^0 R'$ et que l'on note f_i' l'image de f_i^0 dans R', d'après 5.4.3 il suffit de prouver

(*g*) $v_M'(f_i') = n(i)$ et les $\mathrm{in}_{M'}(f_i')$ engendrent $\mathrm{in}_{M'}(J', R')$;

$$(h) \qquad H_{M'}(R'/J') = H_M^{(-1-r-\delta)}(R/J)$$

pour obtenir (*d*) et (*e*). Posons

$$(1) \qquad S = \mathrm{gr}_P(R)/M\mathrm{gr}_P(R) = k[X_0, X_1, \ldots, X_s], \qquad V = \mathrm{Proj}(S),$$

$$(2) \qquad G = \mathrm{gr}_P(R/J)/M\mathrm{gr}_P(R/J) = S/(F_1, \ldots, F_m)S, \qquad U = \mathrm{Proj}(G),$$

où, en vertu de (*a*) et (*b*), on a

$$(3) \qquad F_i = \mathrm{in}_M(f_i), \qquad \deg(F_i) = n(i).$$

Alors, on a un point ξ de V tel que $R' = O_{V,\xi}$ l'idéal de U dans $O_{V,\xi}$ étant J' avec en outre

$$f'_i = F_i/X_0^{n(i)}, \qquad v_\xi(f'_i) \geqq n(i), \qquad k^0 = k(\xi), \tag{4}$$

et comme $H^{(r)}(G) = H_M(R/J)$ par le critère numérique de platitude normale, la condition (h) s'écrit

$$H_{M'}(R'/J') = H^{(-1-\delta)}(G). \tag{h'}$$

5.4.6. Il reste à déduire (g) et (h') de (1), (2), (3) et (4). Pour cela on peut invoquer les lemmes 15 et 23 de [9], mais comme les démonstrations en sont compliquées et que nous avons promis une preuve autonome, indiquons rapidement comment réduire le problème au cas où l'extension résiduelle k^0/k est triviale, lequel se traite aisément par la formule de Taylor [*cf.* 5.2.6 (10)]. On écrit $k^0 = k[u_1, \ldots, u_n]/N$ où les u_i sont des indéterminées et N un idéal maximal, on pose $R'' = k[u]_N$ et l'on effectue les changements de base $k \to R'' \to k^0$, ce qui donne des morphismes de schémas $V \leftarrow V'' \leftarrow V^0$ (en sens inverse), l'on choisit un point ξ^0 de V^0 rationnel sur ξ et sur k^0, et l'on note ξ'' son image dans V''. Comme ξ^0 est rationnel sur k^0, on a les analogues de (g) et (h') au point ξ^0. On passe au point ξ'' par le lemme 5.4.3 où l'on prend pour les x_i un système régulier de paramètres de R'' et l'on revient au point ξ en notant que V'' est lisse sur V de dimension $n = \dim(R'') + t(k^0/k)$.

5.5. Points très proches. — La présentation attachée au paragraphe 3 à un anneau local complet possède une propriété que nous n'avons pas utilisée, à savoir :

(1) les σ_i, $1 \leqq i \leqq e$, sont des polynômes additifs;

(2) les σ_i engendrent l'idéal du faîte $F_x(X)$ de $C_x(X)$ dans $T_x(Z)$.

On dira qu'une présentation est *achevée* si elle satisfait à ces conditions. Cette notion permet d'étudier un invariant supplémentaire qui est

$$\tau_x(X, Z) = \operatorname{codim}(F_x(X), T_x(Z)) \tag{3}$$

qui intervient dans le *théorème de stabilité* ([7] p. 234 en car. 0 et [5] p. II-31 dans le cas général).

Lemme 5.5.1. — *Soit une présentation notée comme en* 3.1 *et* 5.1. *On a*

$$F_x(X) \subset F_x(W) \subset C_x(W). \tag{$\bigstar$}$$

Pour que la présentation soit achevée, *il faut et il suffit que*

(a) codim $(F_x(X), T_x(Z)) = $ codim $(F_x(X(s)), T_x(Z(s)))$;

(b) *les restrictions à* $T_x(Z(s))$ *des* σ_i *sont des polynomes additifs;*

(c) $F_x(X(s)) = C_x(W(s))$.

S'il en est ainsi, les inclusions de ($\bigstar$) *sont des égalités et* $\tau_x(X, Z) = e$.

Soit U l'algèbre des fonctions sur $T_x(Z)$ invariantes par $F_x(X)$. Puisque les F_i sont normalisés [4.1 (7)], on a $F_i \in U$ (1.6) et comme U est stable par dérivation, on a aussi $\sigma_j \in U$, $1 \leqq j \leqq e$, donc $F_x(X) \subset F_x(W)$ puisque les σ_j sont des équations de $C_x(W)$, [4.2 (i)], ce qui prouve (★). On a également

$$(\bigstar\bigstar) \qquad F_x(X) \cap T_x(Z(s)) \subset F_x(X(s)) \subset F_x(W(s)) \subset C_x(W(s)) = C_x(W) \cap T_x(Z(s)).$$

En effet, la première inclusion résulte de la description d'un faîte par le foncteur qu'il représente puisque l'on a $C_x(X) \cap T_x(Z(s)) = C_x(X(s))$ par transversalité; les deux autres se prouvent comme (★) puisque les restrictions des F_i à $T_x(Z(s))$ sont des équations normalisées de $C_x(X(s))$ et que celle des σ_j sont des équations de $C_x(W(s))$ [4.2 (ii)].

Si la présentation est achevée, (*b*) résulte de (1) et la condition (2) signifie que $F_x(X) = C_x(W)$, donc les inclusions de (★) et (★★) sont des égalités, d'où (*c*), puis (*a*) par 4.2.

Réciproquement, les conditions (*a*), (*b*) et (*c*) permettent d'appliquer le lemme ci-dessous avec $T = T_x(Z)$, $C = C_x(X)$, $T' = T_x(Z(s))$ et donc $C' = C \cap T = C_x(X(s))$.

LEMME 5.5.2. *Soit* C *un sous-cône d'un espace numérique* T (*spectre d'une algèbre de polynômes*) *sur un corps* k. *Soit* T′ *un sous-espace numérique de* T *avec* $d = \operatorname{codim}(T', T)$. *On pose* $C' = C \cap T$ *et on note* F *et* F′ *les faîtes de* C *et* C′. *Si* $H(C) = H^{(d)}(C')$ *et si* $\dim(F) = d + \dim(F')$, *alors* $F' = F \cap T'$. *En outre, si on a des polynômes* σ_j *sur* T *invariants par* F, *dont les restrictions* σ'_j *à* T *sont additifs et engendrent l'idéal de* F′ *dans* T′, *alors les* σ_j *sont additifs et engendrent l'idéal de* F *dans* T.

Cet énoncé, qui se trouve dans [5] (I, 6.9.3), est géométrique, autrement dit, on peut supposer que k est parfait. Alors $D = F_{\text{réd}}$ et $D' = F'_{\text{réd}}$ sont des sous-espaces numériques et la condition de dimension assure trivialement que $D' = D \cap T'$. L'inclusion $T' \to T$ induit donc un isomorphisme $(T'/D') \xrightarrow{\sim} (T/D)$ lequel induit une immersion fermée $(C'/D') \to (C/D)$. Cette dernière est aussi un isomorphisme d'après la condition de transversalité $H(C) = H^{(d)}(C')$. Comme le passage au quotient par un espace numérique est trivial (produit) il conserve le faîte et l'on a donc un isomorphisme (non canonique) $F \simeq F' \times A$, où A est un espace numérique de dimension d, donc $H(F) = H^{(d)}(F')$. Or on a $F' \supset F \cap T'$ et pour avoir égalité il suffit de prouver que $H^{(d)}(F') \leqq H^{(d)}(F \cap T')$, ce qui résulte de l'inégalité de Bennett $H(F) \leqq H^{(d)}(F \cap T')$. Donc $F' = F \cap T$. Le morphisme naturel $(T'/F') \to (T/F)$ est donc un isomorphisme, autrement dit, la surjection naturelle $A(T) \to A(T')$ de l'algèbre des fonctions sur T sur celle des fonctions sur T′ induit une bijection entre la sous-algèbre U des fonctions invariantes par F et celle U′ des fonctions invariantes par F′. Par hypothèse, le σ_j appartiennent à U et leurs images engendrent l'algèbre U′, donc les σ_j engendrent U. Enfin, les σ_j sont additifs car les σ'_j le sont et la projection $T \to T/F$ est un morphisme de groupe.

THÉORÈME 5.5.3. — *Soit* x^0 *un point proche d'une présentation notée comme en* 3.1 *et* 5.1. *Alors* $\tau_{x^0}(X^0, Z^0) \geqq \tau_x(X, Z)$. *Si la présentation de départ est achevée, pour que l'on ait égalité, il faut et il suffit que la présentation proche soit achevée. On dit alors que* x^0 *est un* point très proche.

Comme l'inégalité à démontrer ne dépend que de $X \subset Z$, on peut choisir une présentation achevée pour la démontrer. On a alors

$$\begin{aligned}\tau_x(X, Z) = e &= \operatorname{codim}(C_x(W), T_x(Z)) \\ &= \operatorname{codim}(C_{x^0}(W^0), T_{x^0}(Z^0)) \leqq \operatorname{codim}(F_{x^0}(X^0), T_{x^0}(Z^0)),\end{aligned}$$

où l'inégalité tient à $F_{x^0}(X^0) \subset C_{x^0}(W^0)$, donc $\tau_{x^0}(X^0, Z^0) \geqq \tau_x(X, Z)$. D'après 5.3, les objets tangents de la fibre de la présentation proche se déduisent de ceux de la présentation de départ par extension des scalaires du corps résiduel $k(x)$ au corps résiduel $k(x^0)$ et la présentation proche satisfait donc par transport de structure aux conditions (*b*) et (*c*) du premier lemme; la condition (*a*) signifie que $\tau_{x^0}(X^0, Z^0) = e$, d'où la conclusion.

Conclusion

Pour expliquer comment 3.3, 5.2 et 5.4 peuvent (éventuellement !) servir à la résolution des singularités en caractéristique $p > 0$, introduisons la notion de *donnée de simplification* : c'est

$$D = (Z, f_1, \ldots, f_m, n(1), \ldots, n(m)),$$

où Z est un schéma noethérien régulier, les f_i des idéaux inversibles de O_Z et les $n(i)$ des entiers. Un *centre d'éclatement permis* est un sous-schéma fermé régulier Y de Z tel que, pour tout $y \in Y$, on ait $f_i O_{Z,y} \subset P^{n(i)}$, où P est l'idéal de Y dans l'anneau local $O_{Z,y}$, et un point x de Z est *singulier* si $f_i O_{Z,x} \subset m_{Z,x}^{n(i)}$. *La transformée de* D *par éclatement de centre permis* Y est

$$D^0 = (Z^0, f_1^0, \ldots, f_m^0, n(1), \ldots, n(m)),$$

où Z^0 est l'éclaté de Z de centre Y, et $f_i^0 = f_i/(PO_{Z^0})^{n(i)}$ où P est le faisceau d'idéaux de Y dans Z.

Résoudre D *au-dessus d'un point singulier* x de Z, c'est trouver une suite d'éclatements permis $Z \leftarrow Z^0 \leftarrow Z^1 \ldots Z^n$ tel qu'aucun point de Z^n se projetant sur x ne soit singulier pour D^n. Ceci dit, soit X le spectre d'un anneau local complet A et x son point fermé. Grâce à 3.3, on trouve une présentation

$$(S; R; z_1, \ldots, z_e; J; f_1, \ldots, f_m; n(1), \ldots, n(m); \text{etc.})$$

de $A = R/J$ et donc une donnée de simplification

$$D = (Z = \operatorname{Spec}(R); f_1 O_Z, \ldots, f_m O_Z; n(1), \ldots, n(m)).$$

En appliquant 5.4 et 5.2 autant de fois que nécessaire, on voit que trouver une suite d'éclatements permis $X \leftarrow X^0 \ldots X^n$ tel qu'aucun point de X^n se projettant sur x ne soit un point proche de x revient à résoudre la donnée de simplification D au-dessus de x. En caractéristique nulle, on voit que W est étale sur S [4.2. (iii), où $q_i = 1$] et cela permet d'avoir le même énoncé pour une donnée de simplification *portée par* S qui est de dimension strictement inférieure à celle de Z. C'est là un des points clefs de la récurrence de Hironaka [7], et par suite rien ne prouve que les considérations ci-dessus seront utilisables. Malgré tout, en adaptant les raisonnements [7], on se convainc qu'il suffirait de savoir résoudre une donnée de simplification portée par $Z = \mathrm{Spec}(R)$, avec R local complet régulier de dimension N en admettant à la fois la résolution des singularités plongées en dimension $\leqq N-1$ et celle des données de simplification portées par un schéma de dimension $\leqq N-1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. ABHYANKAR, *Resolution of Singularities of Embedded Algebraic Surfaces*, Academic Press, New York, London, 1966.

[2] B.-M. BENNETT, *On the Characteristic Function of a Local Ring* (*Ann. of Math.*, vol. 91, 1970, p. 25-87).

[3] J. DIEUDONNÉ et A. GROTHENDIECK, *Éléments de Géométrie algébrique* (*Pub. Math. I. H. E. S.*, P. U. F., Paris, cité [EGA]).

[4] M. DEMAZURE et P. GABRIEL, *Groupes algébriques*, Masson, Paris, N. H. P. C., 1970.

[5] J. GIRAUD, *Étude locale des Singularités* (*Pub. Math.*, Orsay, 1972).

[6] J. GIRAUD, *Sur la théorie du contact maximal* (*Math. Zeit.*, vol. 137, 1974, p. 285-310).

[7] H. HIRONAKA, *Resolution of Singularities of an Algebraic Variety over a Field of Characteristic Zero: I-II* (*Ann. of Math.*, vol. 79, 1964, p. 109-236).

[8] H. HIRONAKA, *Additive Groups Associated with Points of a Projective Space* (*Ann. of Math.*, vol. 92, 1970, p. 327-334).

[9] H. HIRONAKA, *Certain Numerical Characters of Singularities* (*J. Math. Kyoto Univ.*, vol. 10-1, 1970, p. 151-187).

[10] H. HIRONAKA, *On the Equivalence of Singularities* (*Arithm. Alg. Geom.*, Harper and Row, New York, 1965).

[11] H. HIRONAKA, *Introduction to the Theory of Infinitely near Points* (*Memorias del Inst. Jorge Juan*, Madrid, 1974).

[12] M. LEJEUNE et B. TEISSIER, *Quelques calculs utiles pour la résolution des singularités* (*École Polytechnique*, Paris, 1972).

[13] M. LEJEUNE et B. TEISSIER, *Contribution à l'étude des singularités du point de vue du polygone de Newton* (*Thèse*, Paris, 1973).

[14] T. ODA, *Hironaka's Additive Group Scheme* (*Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, in honor of *Y. Akizuki*, Kinokuiya, Tokyo, 1973, p. 181-219).

[15] M. J. POMEROL, *Sur la strate de Samuel du sommet d'un cône*. (*Bull. Sc. Math.*, vol. 78, 1974, p. 173-182.)

(Manuscrit reçu le 21 octobre 1974.)

Jean GIRAUD,
Mathématiques,
Université de Paris-Sud,
91405 Orsay.