

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J. BOCHNAK

J.-J. RISLER

Le théorème des zéros pour les variétés analytiques réelles de dimension 2

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 8, n° 3 (1975), p. 353-363

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1975_4_8_3_353_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LE THÉORÈME DES ZÉROS POUR LES VARIÉTÉS ANALYTIQUES RÉELLES DE DIMENSION 2

PAR J. BOCHNAK ET J.-J. RISLER

RÉSUMÉ. — Si N est une variété analytique réelle de dimension 2, et si $\mathcal{O}(N)$ désigne l'anneau des fonctions analytiques réelles globales sur N , nous donnons une caractérisation algébrique des idéaux de type fini de N ayant la propriété des zéros, et montrons que si N est compacte ou vérifie $H^1(N, \mathbb{Z}_2) = 0$ et si $f \in \mathcal{O}(N)$ est ≥ 0 , f est une somme de carrés dans $\mathcal{O}(N)$.

I. — Introduction et énoncé des résultats

a. LE THÉORÈME DES ZÉROS.

DÉFINITION I.1 (cf. [B] ou [R₂]). — Soient A un anneau commutatif, I un idéal de A .

a. On dit que I est *réel* (ou que I est un *R-idéal*) s'il vérifie la condition suivante : si f_1, \dots, f_p sont des éléments de A tels que $f_1^2 + \dots + f_p^2 \in I$, alors $f_i \in I$ ($1 \leq i \leq p$).

b. Si I est un idéal quelconque, on pose

$$\sqrt[{\mathbb{R}}]{I} = \{a \in A : \exists a_i \in A \text{ et } k \in \mathbb{N} \text{ tels que } a^{2k} + \sum_i a_i^2 \in I\}.$$

$\sqrt[{\mathbb{R}}]{I}$ est le plus petit idéal réel de A contenant I (racine réelle de I).

DÉFINITION I.2. — Soient N une variété analytique réelle paracompacte, $\mathcal{O}(N)$ l'anneau des fonctions analytiques sur N , I un idéal de $\mathcal{O}(N)$. On dit que I a la *propriété des zéros* si pour toute fonction $g \in \mathcal{O}(N)$ s'annulant sur $Z(I)$ [$Z(I) = \bigcap_{f \in I} f^{-1}(0)$ désignant l'ensemble des zéros de I], on a $g \in I$.

Un idéal ayant la propriété des zéros est évidemment réel; nous nous intéressons ici à la réciproque : un idéal réel a-t-il la propriété des zéros? Rappelons qu'un tel théorème

est vrai dans le cas des polynômes sur $\mathbf{R}^n [R_1]$ dans le cas des fonctions de Nash $[M]$, pour les germes de fonctions analytiques réelles en un point de $\mathbf{R}^n [R_1]$, pour les idéaux de l'anneau des fonctions C^∞ sur un ouvert de \mathbf{R}^n engendrés par un nombre fini de fonctions analytiques $[B]$, et dans certains cas pour les idéaux de fonctions différentiables fermés et de type fini $[R_2]$; cf. aussi le cas formel $[Me]$.

Nous allons démontrer un théorème analogue pour les idéaux de l'anneau $\mathcal{O}(N)$ en dimension 2.

THÉORÈME 1. — *Soient N une variété analytique réelle (paracompacte) de dimension 2, I un idéal de type fini de $\mathcal{O}(N)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a. I a la propriété des zéros dans $\mathcal{O}(N)$;

b. I est un idéal réel.

COROLLAIRE 1. — *Supposons N compacte et de dimension 2, et soit I un idéal de $\mathcal{O}(N)$; alors l'idéal de toutes les fonctions de $\mathcal{O}(N)$ nulles sur $Z(I)$ est égal à $\sqrt[I]{I}$.*

Il suffit en effet de remarquer que $\sqrt[I]{I}$ est de type fini puisque $\mathcal{O}(N)$ est noethérien $[F]$ et d'appliquer le théorème 1.

b. LE 17^e PROBLÈME DE HILBERT

Le 17^e problème de Hilbert était le suivant : soit $P \in \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme prenant des valeurs ≥ 0 sur \mathbf{R}^n ; P est-il une somme de carrés dans le corps des fractions $\mathbf{R}(X_1, \dots, X_n)$? Ce problème a été résolu par l'affirmative par E. Artin (cf. $[J]$).

Un théorème analogue est vrai pour les germes de fonctions analytiques en un point de $\mathbf{R}^n [R_1]$ et pour les fonctions de Nash $[M]$.

Nous allons démontrer ici le résultat suivant :

THÉORÈME 2. — *Soient N une variété analytique de dimension 2 compacte, ou paracompacte et vérifiant $H^1(N, \mathbf{Z}_2) = 0$ et $f: N \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction analytique positive sur N . Il existe alors $\varphi_i \in \mathcal{O}(N)$ ($i = 1, \dots, p$) telles que $f = \varphi_1^2 + \dots + \varphi_p^2$.*

Soit N une variété analytique de dimension 2; notons $p(N)$ le plus petit nombre entier tel que toute fonction de $\mathcal{O}(N)$ positive ou nulle sur N puisse s'exprimer comme somme de $p(N)$ carrés de fonctions de $\mathcal{O}(N)$.

Le nombre minimal de carrés nécessaires pour représenter un polynôme positif a été étudié dans de nombreux travaux (par exemple $[Ca]$, $[P]$). Dans le cas analytique on a :

THÉORÈME 3. — *Soit N une variété analytique réelle connexe de dimension 2. On a $p(N) = 2$ si $H^1(N, \mathbf{Z}_2) = H^2(N, \mathbf{Z}) = 0$, $p(S^2) = 3$ et $2 \leq p(N) \leq 7$ pour toute variété analytique compacte.*

Dans ce travail, $\mathcal{O}(N)$ désignera l'anneau des fonctions analytiques sur N , \mathcal{O}_x ou $\mathcal{O}_x(N)$ l'anneau des germes de fonctions analytiques en $x \in N$ et f_x (resp. I_x) le germe en x d'une fonction $f \in \mathcal{O}(N)$ [resp. d'un idéal $I \in \mathcal{O}(N)$].

**II. — Quelques propriétés algébriques des anneaux de fonctions analytiques
sur les variétés analytiques réelles de dimension 2**

a. Considérons d'abord quelques propriétés valables pour une variété analytique réelle N de dimension quelconque.

Rappelons que toute variété analytique réelle paracompacte se plonge analytiquement dans $\mathbf{R}^n [G]$; il en résulte que les théorèmes A et B de Cartan sont applicables [C]. Soient \mathcal{O} le faisceau des fonctions analytiques sur N , \mathcal{O}^* le faisceau des fonctions inversibles, \mathcal{M}^* le faisceau des « fonctions méromorphes », et $\mathcal{D} = \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*$ le faisceau des diviseurs sur N .

On a une suite exacte de faisceaux

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{e} \mathcal{O}^* \rightarrow \mathbf{Z}_2 \rightarrow 0,$$

où e est l'application exponentielle et \mathbf{Z}_2 le faisceau constant $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ sur N .

Comme d'après le théorème B, $H^1(N, \mathcal{O}) = H^2(N, \mathcal{O}) = 0$, on en déduit un isomorphisme : $H^1(N, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\sim} H^1(N, \mathbf{Z}_2)$, d'où une suite exacte

$$\Gamma(N, \mathcal{M}^*) \rightarrow \Gamma(N, \mathcal{D}) \rightarrow H^1(N, \mathbf{Z}_2)$$

(qui provient de la suite définissant les diviseurs :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}^* \rightarrow \mathcal{M}^* \rightarrow \mathcal{D} \rightarrow 0).$$

On peut opérer de manière analogue en considérant cette fois le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbf{C}}$ des fonctions analytiques sur N à valeurs complexes : la suite exacte de l'exponentielle s'écrit cette fois :

$$0 \rightarrow \mathbf{Z} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{C}} \xrightarrow{e} \mathcal{O}_{\mathbf{C}}^* \rightarrow 0,$$

d'où par le même procédé la suite exacte

$$\Gamma(N, \mathcal{M}_{\mathbf{C}}^*) \rightarrow \Gamma(N, \mathcal{D}_{\mathbf{C}}) \rightarrow H^2(N, \mathbf{Z}).$$

Si $x \in N$, un germe $\xi_x \in \mathcal{O}_x(N)$ est dit *elliptique* si l'on a $Z(\xi_x) = \{x\}$.

LEMME 1. — *Soient N une variété analytique réelle de dimension n , D un sous-ensemble discret de N . Pour chaque $x \in D$, soit ξ_x un germe elliptique dans $\mathcal{O}_x(N)$; il existe alors une fonction analytique $\varphi : N \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $Z(\varphi) = D$ et que les idéaux (φ_x) et (ξ_x) soient égaux dans $\mathcal{O}_x(N)$ [φ_x et ξ_x sont alors associés dans $\mathcal{O}_x(N)$].*

Démonstration. — Supposons d'abord que $N = \mathbf{R}^n$. Considérons le diviseur σ défini sur N par

$$\sigma(y) = \begin{cases} \mathcal{O}_y^* & \text{si } y \notin D, \\ \xi_y \mathcal{O}_y^* & \text{si } y \in D. \end{cases}$$

Comme $H^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{Z}_2) = 0$, le diviseur σ est défini par une section globale $\tilde{\sigma}$ de \mathcal{M}^* qui est dans ce cas la fonction cherchée.

Dans le cas général, on peut supposer N plongée analytiquement dans \mathbf{R}^m par le théorème de Grauert, et $\xi_x \geq 0, \forall x \in D$. Pour $x \in D$, soit $y_x = (y_{x,1}, \dots, y_{x,m})$ un système de coordonnées locales (analytiques) de \mathbf{R}^m tel que N soit définie au voisinage de x par

$$y_{x,n+1} = \dots = y_{x,m} = 0.$$

Posons

$$\tilde{\xi}_x = \xi_x + \sum_{i=n+1}^m y_{x,i}^2 \quad \text{dans } \mathcal{O}_x(\mathbf{R}^m).$$

[Le choix des coordonnées locales a identifié $\mathcal{O}_x(N)$ à un sous-anneau de $\mathcal{O}_x(\mathbf{R}^m)$.]

Il suffit maintenant d'appliquer la première partie de la démonstration aux germes elliptiques $\tilde{\xi}_x$ de \mathbf{R}^m , et de prendre la restriction à N de la fonction trouvée.

C. Q. F. D.

Rappelons maintenant un résultat de O. Forster sur les idéaux primaires; un idéal I de $\mathcal{O}(N)$ est dit *primaire* s'il vérifie la condition suivante : si f et $g \in \mathcal{O}(N)$, $fg \in I$ et $f \notin I$, il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $g^p \in I$.

On a alors :

LEMME 2 [F₀]. — Soient I un idéal primaire de $\mathcal{O}(N)$, f un élément de $\mathcal{O}(N)$. S'il existe $x \in Z(I)$ tel que $f_x \in I_x$, alors $f \in I$. [$Z(I)$ désigne l'ensemble des zéros de I , $f_x \in I_x$ les germes de f et I en x .]

Démonstration. — Considérons le faisceau d'idéaux $J = I : (f)$ ($\forall y \in N$, on a $J_y = \{ \varphi_y \in \mathcal{O}_y : \varphi_y f_y \in I_y \}$).

J est un faisceau cohérent, et l'on a $J_x = \mathcal{O}_x$. Il existe donc par le théorème A de Cartan une fonction $g \in J$ telle que $g(x) = 1$; on a par définition $fg \in I$, et si l'on avait $f \notin I$, on aurait $g^p \in I$ pour un entier p convenable, ce qui est absurde puisque $g(x) = 1$, et $x \in Z(I)$ par hypothèse.

Signalons enfin le résultat suivant dont nous aurons besoin :

LEMME 3. — Soient N une variété analytique de dimension n , \mathcal{P} un idéal premier de type fini de $\mathcal{O}(N)$. Alors $Z(\mathcal{P})$ est non vide et connexe.

Preuve. — Si l'on suppose $\mathcal{P} \neq (1)$, $Z(\mathcal{P})$ est évidemment non vide; pour montrer que $Z(\mathcal{P})$ est connexe, raisonnons par l'absurde : si l'on avait une décomposition : $Z(\mathcal{P}) = Y_1 \cup Y_2$, Y_1 et Y_2 étant fermés et vérifiant $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, il existerait deux fonctions g_1 et g_2 de $\mathcal{O}(N)$ telles que $Z(g_1) = Y_1$ et $Z(g_2) = Y_2$ d'après le théorème B de Cartan; si $\mathcal{P} = (f_1, \dots, f_k)$, posons :

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \sqrt{\sum_{i=1}^k f_i^2 + (g_1^2 - g_2^2)^2 + g_1^2 - g_2^2}, \\ \psi_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^k f_i^2 + (g_1^2 - g_2^2)^2 - g_1^2 + g_2^2}. \end{aligned}$$

ψ_1 et ψ_2 sont analytiques et n'appartiennent pas à \mathcal{P} puisque $Z(\psi_1) = Y_1$ et $Z(\psi_2) = Y_2$; mais $\psi_1 \psi_2 = \sum_{i=1}^k f_i^2 \in \mathcal{P}$, ce qui contredit le fait que \mathcal{P} est premier.

b. PROPRIÉTÉS SPÉCIALES A LA DIMENSION 2.

LEMME 4. — Soient N une variété analytique réelle de dimension 2, I un idéal de type fini de $\mathcal{O}(N)$; on peut alors écrire : $I = \bigcap_{i \in I} \mathcal{P}_i$, les \mathcal{P}_i étant des idéaux primaires et de type fini dans $\mathcal{O}(N)$ et vérifiant $\bigcap_{i \neq j} \mathcal{P}_i \not\subset \mathcal{P}_j$.

Démonstration. — Posons $B_I = \{x \in Z(I) : \exists \mathcal{P} \in A_{ss} \mathcal{O}_x/I_x \text{ tel que } Z(\mathcal{P}) = \{x\}\}$. Nous dirons que B_I est l'ensemble des points elliptiques de I : il est évidemment discret (si A est un anneau commutatif, $A_{ss}(A)$ désigne l'ensemble des idéaux premiers associés à A).

α . Soit $x \in B_I$; l'idéal I_x est alors de la forme $(\xi_x) \cap Q_x$, où $\xi_x \in \mathcal{O}_x$ et Q_x est un idéal \mathcal{M}_x -primaire ou égal à \mathcal{O}_x . Soit $\mathcal{P} \in \text{Ass}(\mathcal{O}_x/I_x)$ tel que \mathcal{P} soit elliptique : il existe alors un idéal de type fini $\tilde{\mathcal{P}}$ de $\mathcal{O}(N)$ tel que $Z(\tilde{\mathcal{P}}) = \{x\}$ et que $\tilde{\mathcal{P}}_x$ soit égal à la composante \mathcal{P} -primaire de I_x (pour la décomposition $I_x = \xi_x \cap Q_x$).

C'est en effet clair si $\mathcal{P} = \mathcal{M}_x$ car grâce au théorème A de Cartan il existe un idéal \tilde{Q} de type fini dans $\mathcal{O}(N)$ tel que $\tilde{Q}_x = Q_x$, et il existe un élément $f \in \mathcal{O}(N)$ tel que $f_x \in Q_x$ et tel que $Z(f) = \{x\}$ (lemme 1). Il suffit alors de poser $\tilde{\mathcal{P}} = (\tilde{Q}, f)$.

Dans le cas où \mathcal{P} est principal, cela résulte immédiatement du lemme 1. Notons $(\tilde{\mathcal{P}}_k)_{k \in K}$ la famille d'idéaux de $\mathcal{O}(N)$ ainsi obtenus (pour tous les points de B_I).

β . Soit maintenant $\overline{Z(I) - B_I} = \bigcup_{j \in J} Z_j$ la décomposition de $\overline{Z(I) - B_I}$ en sous-ensembles analytiques irréductibles de N [$\overline{Z(I) - B_I}$, adhérence de $Z(I) - B_I$, est égal à $Z(I)$ auquel on a enlevé les points isolés].

Montrons que l'idéal $\text{Id}(Z_j)$ des fonctions de $\mathcal{O}(N)$ nulles sur Z_j est de type fini; soit \tilde{N} un complexifié de N qui soit une variété de Stein (ce qui est possible : [G]), et \tilde{Z}_j une hypersurface analytique complexe de \tilde{N} complexifiée de Z_j (i. e. telle que $\tilde{Z}_j \cap N = Z_j$). L'idéal $\text{Id}(\tilde{Z}_j)$ est alors de type fini dans $\mathcal{O}_c(\tilde{N})$ (cf. [Co] : c'est l'idéal des sections globales d'un faisceau cohérent dont chaque fibre est engendrée par un élément). L'idéal $\text{Id}(Z_j)$ est alors engendré par les parties réelles et imaginaires des générateurs de $\text{Id}(\tilde{Z}_j)$; nous noterons $(f_{1,j}, \dots, f_{p_j,j})$ un système de générateurs de $\text{Id}(Z_j)$.

γ . Soit x un point de $Z_j \setminus B_I$ tel que $x \notin Z_k$ pour $k \neq j$; l'idéal I_x est alors principal et peut s'écrire : $I_x = (\xi_x^{n_{j,x}})$ où ξ_x est sans facteur multiple dans $\mathcal{O}_x(N)$ [ξ_x est un générateur de l'idéal du germe $(Z_j)_x$]. L'entier $n_{j,x}$ est alors indépendant du point x choisi (on peut en effet définir $n_{j,x}$ pour tout point $x \in Z_j$ de façon à ce que $n_{j,x}$ soit localement constant; on utilise alors le fait que Z_j est connexe).

Posons maintenant $Q_j = (f_{1,j}^{n_j}, \dots, f_{p_j,j}^{n_j})$; nous allons montrer que la famille d'idéaux $\{Q_j\}_{j \in J} \cup \{\tilde{\mathcal{P}}_k\}_{k \in K}$ répond à la question.

Les idéaux $\tilde{\mathcal{P}}_k$ sont primaires [car $Z(\tilde{\mathcal{P}}_k)$ est réduit à un point x et $(\tilde{\mathcal{P}}_k)_x$ est primaire par définition] ainsi que les idéaux Q_j , car si $fg \in Q_j$, f par exemple s'annule sur Z_j , et donc $f \in (f_{1,j}, \dots, f_{p_j,j})$ d'où $f^k \in Q_j$ pour un k convenable.

On a d'autre part évidemment

$$I_x = \left(\bigcap_j (Q_j)_x\right) \cap \left(\bigcap_k (\tilde{\mathcal{P}}_k)_x\right), \quad \forall x \in Z(I),$$

par construction. Remarquons maintenant que si I et J sont deux idéaux de $\mathcal{O}(N)$ tels que $I_x \subset J_x$, $\forall x \in N$, et si J est de type fini, alors $I \subset J$ d'après le théorème B de Cartan. On en déduit que $I \subset Q_j$, $\forall j$ et $I \subset \tilde{\mathcal{P}}_k$, $\forall k$, d'où $I \subset \left(\bigcap_j Q_j\right) \cap \left(\bigcap_k \tilde{\mathcal{P}}_k\right)$ et d'autre part $\left(\bigcap_j Q_j\right) \cap \left(\bigcap_k \tilde{\mathcal{P}}_k\right) \subset I$ puisque I est de type fini, ce qui achève de montrer le lemme.

LEMME 5. — Soient N une variété analytique paracompacte de dimension 2, V un sous-ensemble analytique fermé de N [qui est dans ce cas toujours l'ensemble des zéros d'un idéal de type fini de $\mathcal{O}(N)$].

Alors l'idéal $\text{Id}(V)$ des fonctions de $\mathcal{O}(N)$ nulles sur V est engendré par trois éléments.

Démonstration. — On sait que $\text{Id}(V)$ est de type fini (cf. La démonstration du lemme 4). Posons $\text{Id}(V) = (f_1, \dots, f_k)$.

Soit

$$V = \left(\bigcup_{i \in I} V_i\right) \cup \left(\bigcup_{j \in J} W_j\right)$$

la décomposition de V en composantes irréductibles (qui forment un ensemble dénombrable), les W_j étant des points isolés de V et les V_i de dimension 1.

Pour chaque $i \in I$, soit x_i un point de V_i ; l'ensemble des $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbf{R}^k$ tel que $\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i f_i\right)_{x_i}$ engendre $\text{Id}(V)_{x_i}$ (qui est principal) est un ouvert dense de \mathbf{R}^k ; il en est de même pour l'ensemble des λ tels que $\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i f_i\right)_{w_j}$ soit une coordonnée locale de $\mathcal{O}_{w_j}(N)$.

Le théorème de Baire montre alors qu'il est possible de trouver $\lambda \in \mathbf{R}^k$ tel que si l'on pose $g_1 = \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i$, $(g_1)_{x_i}$ engendre $\text{Id}(V)_{x_i}$, $\forall i$, et $(g_1)_{w_j}$ soit une coordonnée locale de $\mathcal{O}_{w_j}(N)$.

Mais comme $(g_1)_{x_i}$ engendre $\text{Id}(V)_{x_i}$, il engendre $\text{Id}(V)_y$ pour $y \in V_i \setminus S_i$ où S_i est au plus dénombrable; posons $D = \bigcup_{i \in I} S_i$, D est encore dénombrable, et le même raisonnement

permet de trouver un élément $g_2 = \sum_{i=1}^k \lambda'_i f_i$ tel que $(g_2)_y$ engendre $\text{Id}(V)_y$ pour $y \in D$, et tel que $(g_2)_{w_j}$ soit une coordonnée locale de $\mathcal{O}_{w_j}(N)$ transverse à $(g_1)_{w_j}$.

Si l'on pose maintenant $g_3 = \sum_{i=1}^k f_i^2$, on a alors

$$\text{Id}(V) = (g_1, g_2, g_3),$$

car

$$V = Z(g_1, g_2, g_3) \quad \text{et} \quad \text{Id}(V)_x = (g_1, g_2, g_3)_x, \quad \forall x \in V.$$

C. Q. F. D.

III. — Démonstrations des théorèmes

a. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.

LEMME 6. — Soit \mathcal{P} un idéal premier de l'anneau de série convergente $\mathbf{R}\{X_1, \dots, X_n\}$.

a. Si \mathcal{P} est un idéal réel, alors $\mathcal{P} \subset \mathbf{C}\{X_1, \dots, X_n\}$ est premier.

b. Si \mathcal{P} est de hauteur $n-1$ et si $\mathcal{P} \subset \mathbf{C}\{X_1, \dots, X_n\}$ est premier, alors \mathcal{P} est un idéal réel.

Démonstration. — a. Soit $\{f_j\}, j = 1, \dots, p$ un système de générateurs de \mathcal{P} et soient $a+ib$ et $c+id$ deux éléments dont le produit est dans $\mathcal{P} \subset \mathbf{C}\{X\}$:

$$(a+ib)(c+id) = \sum_{j=1}^p (\lambda_j + i\mu_j)f_j,$$

d'où

$$ac - bd = \sum \lambda_j f_j \quad \text{et} \quad ad + bc = \sum \mu_j f_j,$$

soit

$$a(c^2 + d^2) = \sum_j f_j (c\lambda_j + d\mu_j), \quad -b(c^2 + d^2) = \sum_j f_j (d\lambda_j - c\mu_j),$$

d'où immédiatement le résultat en utilisant le fait que \mathcal{P} est un idéal réel et premier.

b. Nous allons raisonner par récurrence sur le nombre minimal p d'éclatements ponctuels $[Z]$ nécessaires pour résoudre le germe de courbe complexe γ défini par l'idéal $\mathcal{P} \subset \mathbf{C}\{X\}$.

— Si $p = 0$, $Z(\mathcal{P} \subset \mathbf{C}\{X\})$ est un germe de courbe lisse dont les équations sont réelles : sa partie réelle est donc de dimension topologique 1 ce qui entraîne que \mathcal{P} est réel en vertu du lemme 1 $[R_1]$.

— Si $p > 0$, soit γ la transformée stricte de la courbe \mathbf{C}^n ; $\tilde{\gamma}$ est encore un germe de courbe irréductible défini par un idéal premier $\tilde{\mathcal{P}}$ de $\mathbf{C}\{Y\}$ dont un système de générateurs est réel; par hypothèse de récurrence, la partie réelle de $\tilde{\gamma}$ est de dimension topologique 1, et il en est de même pour la partie réelle de γ , l'éclatement étant un isomorphisme en dehors de l'origine; l'idéal \mathcal{P} est donc réel en vertu du lemme 1 $[R_1]$.

LEMME 7. — *a. Soit $\varphi \in \mathcal{O}_x$ un germe analytique en dimension 2, sans facteurs multiples, tel que $\varphi \geq 0$.*

φ est alors nécessairement elliptique et il existe φ_1 et φ_2 dans \mathcal{O}_x tels que $\varphi = \varphi_1^2 + \varphi_2^2$.

b. Soient N une variété analytique de dimension 2, telle que $H^2(N, \mathbb{Z}) = 0$, $\varphi : N \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction analytique ≥ 0 sur N telle que $Z(\varphi)$ soit discret. Il existe alors φ_1 et φ_2 dans $\mathcal{O}(N)$ telles que $\varphi = \varphi_1^2 + \varphi_2^2$.

c. Avec les mêmes hypothèses que dans b, mais en ne supposant plus que $H^2(N, \mathbb{Z}) = 0$, il existe φ_1, φ_2 et φ_3 dans $\mathcal{O}(N)$ telles que $\varphi = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2$.

Démonstration. — *a.* φ étant sans facteurs multiples, aucun des facteurs irréductibles de φ n'engendre un idéal réel, car ils gardent tous un signe constant au voisinage de x (cf. $[R_1]$ (prop. 3)). Chacun de ces facteurs f_j est alors réductible dans $\mathcal{O}_{c,x}$ (lemme 6), donc égal au produit de deux facteurs imaginaires conjugués dans $\mathcal{O}_{c,x} : f_j = \psi_j \bar{\psi}_j$. φ est donc le produit de deux termes imaginaires conjugués, i. e. une somme de deux carrés dans \mathcal{O}_x .

b. Si φ est une fonction analytique ≥ 0 sur N avec $\varphi^{-1}(0) = D$ (D étant discret), on peut écrire pour tout $x \in D : \varphi_x = \psi_x \bar{\psi}_x$ dans $\mathcal{O}_{c,x}(N) = \mathcal{O}_{c,x}$ d'après *a.*

Considérons sur N le diviseur σ à valeurs complexes défini par

$$\sigma(x) = \begin{cases} \psi_x \mathcal{O}_{c,x}^* & \text{si } x \in D, \\ \mathcal{O}_{c,x}^* & \text{si } x \notin D, \end{cases}$$

comme par hypothèse $H^2(N, \mathbb{Z}) = 0$, σ est le diviseur d'une fonction analytique ψ , φ et $\psi \bar{\psi}$ sont alors associés dans $\mathcal{O}(N)$, ce qui démontre le lemme dans ce cas puisque $\psi \bar{\psi}$ est une somme de deux carrés dans $\mathcal{O}(N)$ [$\psi \bar{\psi} = (\text{Re } \psi)^2 + (\text{Im } \psi)^2$].

c. Passons maintenant au cas général. Supposons d'abord que φ_x soit sans facteur multiple $\forall x \in D = Z(\varphi)$; soit \tilde{N} un complexifié de N qui soit une variété de Stein $[G]$ telle que φ s'étende en une fonction holomorphe sur \tilde{N} notée $\tilde{\varphi}$; soit $A = Z(\tilde{\varphi})$; si A_x désigne la composante connexe de A passant par x , on peut en outre supposer que $A_x \cap A_{x'} = \emptyset$ pour x et x' dans D , $x \neq x'$ et que pour $x \in D$, A_x est réunion de deux germes de sous-ensembles analytiques $A_{x,1}$ et $A_{x,2}$ [correspondant à la décomposition : $\tilde{\varphi}_x = \psi_x \bar{\psi}_x$ dans l'anneau $\mathcal{O}_x(\tilde{N})$].

L'ensemble $A_1 = \bigcup_{x \in D} A_{x,1}$ est ainsi une hypersurface complexe dans \tilde{N} ; le faisceau d'idéaux formés des fonctions nulles sur A_1 est donc localement principal; il en résulte que l'idéal $\text{Id } A_1$ des fonctions de $\mathcal{O}(N)$ nulles sur A_1 est de type fini (cf. $[Co]$), engendré par (f_1, \dots, f_p) . Soit $x \in D$: il résulte du théorème A de Cartan que l'ensemble des $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{C}^p$ tels que $\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i f_i \right)_x$ engendre $\text{Id } (A_1)_x$ est un ouvert dense de \mathbb{C}^p ; il existe donc, par le théorème de Baire, un élément $g = \sum \lambda_i f_i$ tel que g_x engendre $\text{Id } (A_1)_x, \forall x \in D$.

$g \bar{g}$ est alors une somme de deux carrés dans $\mathcal{O}(N)$ telle que $(g \bar{g})_x$ soit associé à $\varphi_x, \forall x \in D$; mais $g \bar{g}$ s'annule éventuellement en des points non dans D ; $\varphi^2 + g \bar{g}$

est alors une somme de trois carrés associée à φ dans $\mathcal{O}(\mathbb{N})$, puisque l'on a $Z(\varphi) = Z(\varphi^2 + g\bar{g})$, et que $\forall x \in Z(\varphi)$ les germes φ_x et $(\varphi^2 + g\bar{g})_x$ sont associés, ce qui entraîne que $\varphi = u(\varphi^2 + g\bar{g})$, u étant une fonction inversible dans $\mathcal{O}(\mathbb{N})$ et positive, donc un carré.

Dans le cas où φ_x n'est plus nécessairement sans facteurs multiples, on peut écrire $\forall x \in \mathbb{D} : \varphi_x = \alpha_x \beta_x^{2k_x} x$ où k_x est un entier ≥ 0 , α_x et β_x étant sans facteurs multiples. Il existe alors $f \in \mathcal{O}(\mathbb{N})$ telle que $Z(f) \subset \mathbb{D}$ et que f_x soit associée à $\beta_x^{k_x}$, $\forall x \in \mathbb{D}$ (lemme 1); φ est divisible par f^2 , et on applique la démonstration qui précède à $\hat{\varphi} = \varphi/f^2$ qui est telle que $\hat{\varphi}_x$ soit sans facteur multiple $\forall x \in \mathbb{D}$.

C. Q. F. D.

Pour montrer le théorème 1, il suffit évidemment de montrer que $b \Rightarrow a$, i. e. que si I est un idéal réel, I a la propriété des zéros dans $\mathcal{O}(\mathbb{N})$.

Supposons d'abord que I soit un idéal réel premier dans $\mathcal{O}(\mathbb{N})$. Deux cas sont possibles : ou $Z(I) = \{x\}$ pour $x \in \mathbb{N}$, ou $\dim Z(I) = 1$ et $Z(I)$ est connexe (lemme 3).

Si $\dim Z(I) = 1$, soit y un point lisse de $Z(I)$ tel que le générateur de I_y ne possède pas de facteur elliptique; si $f \in \mathcal{O}(\mathbb{N})$ s'annule sur $Z(I)$ il existe un entier k tel que $f_y^k \in I_y$, d'où $f^k \in I$ (lemme 2) et $f \in I$ puisque I est premier.

Si $Z(I) = \{x\}$, et si I_x est principal, I lui-même est principal (lemme 1) engendré par une fonction φ que l'on peut supposer ≥ 0 ; φ est alors une somme de carrés dans $\mathcal{O}(\mathbb{N})$ (lemme 7), ce qui est contradictoire avec l'hypothèse que I est un idéal réel.

Si $Z(I) = \{x\}$ et si I_x n'est pas principal, I_x peut s'écrire $\xi_x J_x$ où ξ_x est un germe elliptique et J_x un idéal primaire pour l'idéal maximal de $\mathcal{O}(\mathbb{N})_x$ (ξ_x est un p. g. c. d. des générateurs de I_x).

D'après le lemme 1, il existe $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{N})$ telle que $Z(\varphi) = \{x\}$ et que φ_x soit associé à ξ_x .

Si $\psi \in \mathcal{O}(\mathbb{N})$ induit une coordonnée locale de \mathbb{N} en x , il existe un entier k tel que $\psi^k \in J_x$; on a donc $\xi_x \psi^k \in I_x$, d'où $\varphi \psi^k \in I$ (lemme 2) d'où $\psi \in I$ puisque I est supposé premier, ce qui entraîne que I_x est l'idéal maximal de $\mathcal{O}(\mathbb{N})_x$.

Si maintenant f s'annule en x , on a $f_x \in I_x$ d'où $f \in I$ toujours d'après le lemme 2.

Dans le cas général, I est un idéal réel de type fini non nécessairement premier : on peut écrire $I = \bigcap_{i \in I} \mathcal{P}_i$, les \mathcal{P}_i étant premiers (car tout idéal réel est intersection d'idéaux premiers) et de type fini avec $\bigcap_{i \in j} \mathcal{P}_i \not\subset \mathcal{P}_j$ (lemme 4).

Mais si I est un idéal réel, il est facile de montrer que les \mathcal{P}_i aussi (cf. $[R_1]$) et il suffit d'appliquer ce qui précède.

C. Q. F. D.

b. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2. — Soient \mathbb{N} une variété analytique réelle et $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction ≥ 0 . Le lemme 1 montre que l'on peut écrire $f = \varphi g$, $Z(g)$ étant discret et φ_x sans facteur elliptique $\forall x \in Z(\varphi)$.

$Z(g)$ étant discret, g garde toujours un signe constant. On peut donc supposer $g(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{N}$, ce qui implique aussi $\varphi(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{N}$.

D'après le lemme 7, g est une somme de carrés dans $\mathcal{O}(\mathbb{N})$; pour montrer que f est une somme de carrés, il suffit de montrer que φ est une somme de carrés.

α . *Supposons* $H^1(\mathbb{N}, \mathbb{Z}_2) = 0$. — Montrons que φ est alors un carré : pour $x \in Z(\varphi)$, on a nécessairement $\varphi_x = \eta_x^2$ où $\eta_x \in \mathcal{O}_x$ puisque φ_x est ≥ 0 et sans facteur elliptique; le diviseur σ défini par

$$\sigma(x) = \begin{cases} \eta_x \mathcal{O}_x^* & \text{si } x \in Z(\varphi), \\ \mathcal{O}_x^* & \text{si } x \notin Z(\varphi) \end{cases}$$

est le diviseur d'une fonction $\tilde{\sigma} \in \mathcal{O}(\mathbb{N})$ (cf. la démonstration du lemme 1), et φ est associée à $\tilde{\sigma}^2$ dans $\mathcal{O}(\mathbb{N})$. Le théorème 2 est donc montré dans ce cas.

β . *Cas général* (\mathbb{N} compacte). — Dans ce cas φ n'est plus nécessairement un carré (rappelons que φ est ≥ 0 sur \mathbb{N} , et φ_x sans facteur elliptique $\forall x \in \mathbb{N}$).

Soit $Z(\varphi) = \bigcup_{i=1}^p Z_i$ la décomposition de $Z(\varphi)$ en sous-ensembles analytiques irréductibles (les Z_i sont en nombre fini car \mathbb{N} est supposée compacte).

Pour chaque i ($1 \leq i \leq p$), on peut définir un nombre entier n_i de la manière suivante : si $x \in Z_i$ et $\varphi_x = \eta^{2\alpha} \xi^{2\beta}$ dans $\mathcal{O}(\mathbb{N})_x$, η et ξ étant produits d'éléments premiers, $Z(\eta) \subset Z_i$ et $Z(\xi) \not\subset Z_i$, alors $\alpha = n_i$ (l'entier n_i que l'on définit ainsi en un point $x \in Z_i$ est en effet localement constant, donc constant puisque Z_i est connexe).

D'après le lemme 5, $\text{Id}(Z_i) = (g_{1,i}, g_{2,i}, g_{3,i}), (g_{1,i}, g_{2,i})_x$ engendrant $\text{Id}(Z_i)_x, \forall x \in Z_i$.

Il est alors immédiat de voir que $\forall x \in Z$, φ_x est associé à $\prod_{i=1}^p [(g_{1,i}^{n_i})^2 + (g_{2,i}^{n_i})^2]$. Remarquons que ce produit est une somme de deux carrés dans $\mathcal{O}(\mathbb{N})$:

$$\prod_{i=1}^p [(g_{1,i}^{n_i})^2 + (g_{2,i}^{n_i})^2] = \varphi_1^2 + \varphi_2^2$$

car un produit de sommes de deux carrés est une somme de deux carrés dans tout anneau commutatif A (il suffit de se placer dans $A[i]$ avec $i^2 = -1$).

φ est alors associée à $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi^2$ dans $\mathcal{O}(\mathbb{N})$, ce qui achève la démonstration du théorème 2.

c . **DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.** — Rappelons que si \mathbb{N} est une variété analytique réelle, $p(\mathbb{N})$ désigne le plus petit nombre entier tel que toute fonction de $\mathcal{O}(\mathbb{N})$ positive ou nulle sur \mathbb{N} puisse s'exprimer comme somme de $p(\mathbb{N})$ carrés de fonctions de $\mathcal{O}(\mathbb{N})$.

Il est d'abord clair que $p(\mathbb{N}) \geq 2$ pour toute variété analytique réelle \mathbb{N} , il suffit de prendre un germe elliptique en un point de \mathbb{N} qui corresponde au germe défini par $x^2 + y^2$ à l'origine de \mathbb{R}^2 .

α . *Montrons que* $p(\mathbb{N}) = 2$ si $H^1(\mathbb{N}, \mathbb{Z}_2) = H^2(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) = 0$. — Si $f \in \mathcal{O}(\mathbb{N})$ est ≥ 0 sur \mathbb{N} , f peut s'écrire : $f = \varphi g$, φ étant sans facteur elliptique, donc un carré de $\mathcal{O}(\mathbb{N})$ car $H^1(\mathbb{N}, \mathbb{Z}_2) = 0$ (démonstration du théorème 2), et $Z(g)$ étant discret, ce qui entraîne que g est une somme de deux carrés puisque $H^2(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) = 0$ (lemme 7, b). On a donc bien $p(\mathbb{N}) = 2$.

