

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

S. ALINHAC

## **Non-unicité pour des opérateurs différentiels à caractéristiques complexes simples**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 4<sup>e</sup> série*, tome 13, n° 3 (1980), p. 385-393

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1980\\_4\\_13\\_3\\_385\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1980_4_13_3_385_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# NON-UNICITÉ POUR DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS A CARACTÉRISTIQUES COMPLEXES SIMPLES

PAR S. ALINHAC

## Introduction

Dans cet article, nous énonçons et prouvons (de façon constructive) un théorème de non-unicité pour des équations aux dérivées partielles (elliptiques ou non) à caractéristiques complexes simples (et à coefficients de classe  $C^\infty$ ). En particulier, il apparaît que les opérateurs elliptiques à caractéristiques simples, qui ont l'unicité de Cauchy à partir de toute hypersurface (d'après Calderón [8]), n'ont pas, en général, d'unicité forte à partir d'une sous-variété de codimension supérieure à un.

Cela souligne le caractère exceptionnel du résultat classique d'Aronszajn et Cordes ([5], [9]) et de la propriété de forte unicité en général.

## I. — Le résultat principal

Considérons au voisinage de l'origine dans  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ), une sous-variété  $M$ , de classe  $C^\infty$ , de codimension 2, que nous supposons donnée localement par les équations  $x=y=0$  [les coordonnées dans  $\mathbb{R}^n$  étant notées  $(x, y, t)$ ,  $t \in \mathbb{R}^{n-2}$ ].

Soit  $P = P(x, y, t, D_x, D_y, D_t)$  un opérateur différentiel d'ordre  $m$  ( $m \geq 2$ ) à coefficients de classe  $C^\infty$  près de 0, de symbole principal  $P_m(x, y, t, \xi, \eta, \tau)$ .

Rappelons qu'une fonction  $u$ , de classe  $C^\infty$ , est dite plate sur  $M$ , si pour tout  $\alpha$ ,  $D^\alpha u = 0$  sur  $M$ . Nous pouvons énoncer le théorème principal.

**THÉORÈME.** — *Supposons que  $p_m(0, 0, 0, 1, \eta, 0)$  possède deux racines simples non réelles et non conjuguées.*

*Alors il existe un voisinage  $V$  de 0, et des fonctions  $a \in C^\infty(V)$ ,  $u \in C^\infty(V)$ , plates sur  $M \cap V$ , telles que  $Pu - au = 0$  dans  $V$ , et  $\text{supp } u$  est un voisinage de 0.*

**Remarques.** — (i) Dans cet énoncé, on ne suppose pas que  $P$  est elliptique, ni même transversalement elliptique à  $M$ .

(ii) L'hypothèse du théorème est indépendante du choix des coordonnées, puisque c'est une propriété de  $p_m$  restreint au plan conormal à  $M$  en 0.

Précisons quelques termes. Nous dirons que  $P$  a la propriété de forte unicité en un point  $m$  d'une sous-variété  $M$  (de codimension quelconque), si «  $Pu=0$  et  $u$  plate sur  $M$  » près de  $m$ , implique «  $u \equiv 0$  près de  $m$  ». La forte unicité est dite stable si, pour toute fonction  $a$ , plate sur  $M$ , l'opérateur  $P+a$  a la forte unicité en  $M$ .

C'est un résultat classique d'Aronszajn [5] et Cordes [9] que si  $P$  est elliptique d'ordre 2, à coefficients réels (assez réguliers),  $P$  a la propriété de forte unicité stable en tout point. Ce théorème a été affiné par Alinhac et Baouendi [4] qui montrent que  $P$  a la forte unicité stable en 0 si  $P_2(0, D_x)$  est à coefficients réels.

Cela n'est plus vrai si on considère des opérateurs à coefficients peu réguliers; Alinhac et Baouendi [3] construisent un exemple, dans le plan, d'opérateur  $P$ , homogène d'ordre 2, à coefficients continus, satisfaisant  $P(0, D_x) = \Delta$ , qui n'a pas la forte unicité en 0.

Le théorème présenté ici, au contraire, suppose les coefficients  $C^\infty$ , et s'applique au cas où les coefficients en 0 ne sont pas réels; il fournit, en dimension 2, la réciproque suivante : si  $P$  est elliptique d'ordre 2 à caractéristiques simples,  $P$  a la forte unicité stable en 0 si et seulement si  $P_2(0, D_x)$  est à coefficients réels.

Plus généralement, on a le corollaire :

**COROLLAIRE.** — *Soit  $P$  un opérateur elliptique d'ordre 2 à caractéristiques simples. Si  $P_2(0, D_x)$  n'est pas à coefficients réels, il existe une sous-variété  $M$  de classe  $C^\infty$ , de codimension 2,  $M \ni 0$ , pour laquelle  $P$  n'a pas la forte unicité stable en 0.*

*Remarques.* — (i) En fait, dans ce corollaire, presque toutes les sous-variétés  $M$  (de codimension 2) conviennent.

(ii) D'après le théorème d'unicité de Calderón [8],  $P$  a la forte unicité stable en 0 pour tout hyperplan  $M$ .

Le résultat du corollaire est vrai aussi lorsque  $P$  est elliptique à caractéristiques simples, et d'ordre  $m \geq 3$ ; cela éclaire la condition du théorème 3 de [4] et montre que le résultat conjecturé par Sitnikova [10] n'est jamais vrai.

Il faut noter ici le contraste avec le cas où  $M$  est analytique réelle et  $P$  est à coefficients analytiques; on sait alors, d'après un travail de Baouendi et Zachmanoglou [6], que l'ellipticité de  $P$  transversalement à  $M$  implique la forte unicité de  $P$  en  $M$ .

Enfin, si  $P$  a des caractéristiques réelles simples (normales ou non à  $M$ ),  $P$  n'a que rarement la forte unicité en  $M$ . Cela résulte des travaux de Baouendi, Treves et Zachmanoglou [7] (dans le cas analytique) et de Alinhac et Baouendi [4] (dans le cas  $C^\infty$ ), si  $p_m$  est complexe; si  $p_m$  est réel, il est souvent possible de construire une hypersurface  $S \supset M$ , en laquelle  $P$  n'a pas l'unicité de Cauchy stable (*cf.* la discussion en [1], et la bibliographie citée à ce propos).

## II. — Preuve du théorème : construction des fonctions $u$ et $a$

1. LES PHASES ET LEUR GÉOMÉTRIE. — (a) Le problème étant local au voisinage d'un point de  $M$ , on peut supposer que ce point est l'origine et que

$$M = \{(x, y, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-2}, x=y=0\} \quad \text{localement.}$$

L'hypothèse du théorème signifie alors que le polynôme  $P_m(0, 0, 0, 1, X, 0)$  possède deux racines en  $X$  non réelles, simples et non conjuguées, notées  $\lambda_{\pm}^0$  [on a désigné par  $p_m(x, y, t, \xi, \eta, \tau)$  le symbole principal de l'opérateur  $P(x, y, t, D_x, D_y, D_t)$ ].

Si l'on pose  $p_m = \sum_{|\alpha|+|\beta|+|\gamma|=m} a_{\alpha\beta\gamma} \xi^{\alpha} \eta^{\beta} \tau^{\gamma}$ , on voit en appliquant le théorème des fonctions implicites à  $p_m$  considéré comme fonction des  $a_{\alpha\beta\gamma}$  et de  $(\xi, \eta, \tau)$  au point  $(a_{\alpha\beta\gamma}(0), (1, \lambda_{\pm}^0, \tau))$ , qu'il existe des fonctions  $\lambda_{\pm}(x, y, t, \xi, \tau)$ ,  $C^{\infty}$  et homogènes de degré 1 en  $(\xi, \tau)$  dans un voisinage conique de  $(0, 0, 0, 1, 0)$ , holomorphes en  $(\xi, \tau)$  au voisinage de  $(1, 0)$ , telles que  $\lambda_{\pm}(0, 0, 0, 1, 0) = \lambda_{\pm}^0$ , et

$$p_m(x, y, t, \xi, \lambda_{\pm}, \tau) \equiv 0.$$

(b) On considère le problème de Cauchy :

$$\frac{\partial}{\partial y} \varphi_{\pm} = \lambda_{\pm} \left( x, y, t, \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{\pm}, \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{\pm} \right),$$

$$\varphi_{\pm} |_{y=0} = x.$$

Comme  $\lambda_{\pm}$  est complexe, et la surface  $\{y=0\}$  est non caractéristique, on choisit pour  $\varphi_{\pm}$  l'une des fonctions  $C^{\infty}$  dont toutes les traces sur  $\{y=0\}$  sont formellement données par l'équation à résoudre, en sorte que l'on aura

$$\frac{\partial}{\partial y} \varphi_{\pm} - \lambda_{\pm} \left( x, y, t, \frac{\partial \varphi_{\pm}}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_{\pm}}{\partial t} \right) \text{ plate sur } \{y=0\}.$$

On a

$$\varphi_{\pm}(x, y, t) = x + y \lambda_{\pm}(x, 0, t, 1, 0) + O(y^2) = x + y \lambda_{\pm}(0, 0, t, 1, 0) + O(\rho^2),$$

où  $(\rho, \theta)$  sont les coordonnées polaires dans le plan  $(x, y)$ .

Notons que, comme  $\lambda_{\pm}$  est non réel, pour  $\rho \leq \rho_0$  :

$$\frac{1}{c} \rho \leq |\varphi_{\pm}(x, y, t)| \leq c \rho \quad (c > 0),$$

on posera

$$l_{\pm} = x + y \lambda_{\pm}(0, 0, t, 1, 0)$$

(« partie linéaire » de  $\varphi_{\pm}$ ), en sorte que  $\varphi_{\pm} = l_{\pm} (1 + O(\rho))$ .

(c) Posons (avec  $\alpha$  proche de 1 à choisir plus tard) :

$$s(\theta) = \left| \frac{\alpha l_{+}}{l_{-}} \right|$$

(où comme dans la suite, on omet d'écrire la dépendance en  $t$ , pour alléger).

– Soit  $\lambda_{\pm}(0,0,t,1,0) = b_{\pm} + ic_{\pm}$ ; si  $s$  est constante,  $s = \alpha$  (car  $l_+ = l_-$  sur  $y=0$ ), donc

$$|l_+|^2 = |l_-|^2, \quad \text{soit } 2(b_+ - b_-) \cos \theta + (c_+^2 - c_-^2) \sin \theta = 0$$

ce qui n'est possible que si  $b_+ = b_-$ ,  $c_+^2 = c_-^2$ ;

Par hypothèse, ceci est exclu pour  $t=0$ , donc aussi pour  $t$  petit;

– Par un calcul direct, on voit facilement que  $s'$  a au plus quatre zéros sur le cercle. Comme  $s$  est  $\pi$ -périodique, elle possède donc exactement deux maximums  $\theta_-$  et  $\theta_- + \pi$ , et deux minimums  $\theta_+$  et  $\theta_+ + \pi$  (dépendant de façon  $C^\infty$  de  $t$ ). On a

$$\frac{s}{\alpha}(\theta_-) \geq 1 \geq \frac{s}{\alpha}(\theta_+), \quad \frac{s}{\alpha}(\theta_-) > \frac{s}{\alpha}(\theta_+);$$

on peut donc choisir  $\alpha = \alpha_0$  pour obtenir

$$s(\theta_-) > 1 > s(\theta_+).$$

Il y a alors exactement quatre points  $\theta_i(\alpha)$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) où  $s=1$  et en ces points,  $s' \neq 0$ .

(d) Désignons par  $\chi_{\pm}(\theta)$  des fonctions  $C^\infty$  sur le cercle unité, indépendantes de  $t$ , nulles dans un petit voisinage  $V_{\pm}$  de  $\theta_{\pm}$  (valeurs pour  $t=0$ ), identiquement égales à 1 hors d'un voisinage un peu plus grand  $\tilde{V}_{\pm}$  (avec  $\tilde{V}_+ \cap \tilde{V}_- = \emptyset$ ; ces voisinages seront précisés ultérieurement).

Dorénavant, les phases  $\varphi_{\pm}$  ne seront considérées qu'en des points  $(x, y, t)$   $t$  petit,  $\theta \in \text{supp } \chi_{\pm}$ ,  $0 < \rho \leq \rho_0$  petit. Il est clair alors que les valeurs de  $\varphi_{\pm}$  évitent un rayon fixe dans  $\mathbb{C}$ , et l'on notera  $\arg \varphi_{\pm}$  des choix continus quelconques (éventuellement différents pour  $\varphi_+$  et  $\varphi_-$  mais déterminés une fois pour toutes dans la suite) de l'argument dans ces zones.

(e) Posons alors

$$Z = \frac{1}{\varphi_-^v} - \frac{1}{(\alpha \varphi_+)^v}, \quad v > 0 \text{ à choisir.}$$

On a

$$Z = \frac{1}{l_-^v} (1 + O(\rho))^v - \frac{1}{(\alpha l_+)^v} (1 + O(\rho))^v = \frac{1}{(\alpha l_+)^v} \left[ \frac{(\alpha l_+)^v}{(l_-)^v} - 1 + O(\rho) \right] = \frac{1}{(\alpha \rho)^v} f(\theta) + O(\rho),$$

avec

$$f(\theta) = \left( \frac{l_+}{\rho} \right)^{-v} \left[ \frac{(\alpha l_+)^v}{(l_-)^v} - 1 \right].$$

Calculons une expression approchée de  $\text{Re } f(\theta)$  :

$$\begin{aligned} \frac{(\alpha l_+)^v}{(l_-)^v} &= s^v [\cos v(\arg l_+ - \arg l_-) + i \sin v(\arg l_+ - \arg l_-)], \\ \left( \frac{l_+}{\rho} \right)^{-v} &= \frac{|l_+|^{-v}}{\rho} (\cos v \arg l_+ + i \sin v \arg l_+), \end{aligned}$$

d'où

$$\operatorname{Re} f(\theta) = \left( \frac{|l+1|}{\rho} \right)^{-v} (s^v - 1 + O(v^2)) = v(\log s + O(v)).$$

Cela montre, compte tenu des propriétés de  $s$  indiquées en (c), que pour  $0 < v \leq v_0$  assez petit,  $\operatorname{Re} f(\theta)$  possède sur le cercle exactement quatre zéros  $\theta_i(\alpha, v)$ , qui sont ceux, voisins des  $\theta_i(\alpha)$ , donnés par le théorème des fonctions implicites.

2. SOLUTIONS APPROCHÉES DANS LE NOYAU DE  $P$ . — Pour éviter de doubler les formules posons  $\tilde{\varphi}_+ = \alpha\varphi_+$ ,  $\tilde{\varphi}_- = \varphi_-$ .

(a) Nous cherchons des solutions approchées sous la forme familière de l'optique géométrique

$$v_{\pm} = \sum_{j=0}^{+\infty} a_{\pm}^j E_j(\tilde{\varphi}_{\pm}),$$

où les  $E_j$  satisfont  $E'_j = E_{j-1}$  pour  $j \geq 1$ . On a

$$P(a^j E_j(\varphi)) = \sum_{l=0}^m E_j^{(m-l)}(\varphi) L_l a^j,$$

où  $L_l$  est un opérateur différentiel d'ordre  $l$  (indépendant de  $j$ , mais dépendant de  $\varphi$ ). En particulier

$$\begin{aligned} L_0 &= i^{-m} p_m(\nabla\varphi), \\ L_1 &= i^{-m} \left[ p'_{m\xi}(\nabla\varphi) \cdot \frac{\partial}{\partial x} + p'_{m\eta}(\nabla\varphi) \frac{\partial}{\partial y} + p'_{m\tau} \frac{\partial}{\partial t} + q \right], \end{aligned}$$

où  $q$  est  $C^\infty$ ,

$$L_m = P.$$

La somme  $v_{\pm}$  est une solution formelle de  $P v_{\pm} = 0$  pourvu que les  $a_{\pm}^j$  vérifient les équations de transport

$$L_1 a_{\pm}^j = - \sum_{l=2}^m L_l a_{\pm}^{j-l+1} \quad (j=0, 1, \dots),$$

avec la convention  $a_{\pm}^p = 0$  pour  $p < 0$ .

Ici, on choisit  $E_0(z) = e^{-1/z^v}$  :

$$E_1(z) = \int_0^z E_0(s) ds, \quad \dots$$

Lorsque  $z$  évite un rayon de  $\mathbb{C}$  et  $v > 0$  est assez petit, les  $E_j(z)$  sont bien définies, plates en  $z=0$  [i. e.  $E_j(z) \sim 0$  dans son secteur de définition] et de plus

$$\left| \frac{E_j}{E_0} \right| \leq C_j |z|^j \quad (j \geq 1)$$

(pour plus de détails sur ce paragraphe, voir [7] ou [2]).

Comme  $\lambda_{\pm}^0$  est une racine simple, la surface  $\{y=0\}$  est non caractéristique pour  $L_1$  (près de 0), et l'on peut résoudre les équations de transport à une fonction plate sur  $\{y=0\}$  près [comme on l'a fait en 1 (a) avec les équations de phase], avec des données initiales  $a_{\pm}^0|_{y=0} = 1$ ,  $a_{\pm}^j|_{y=0} = 0$  ( $j > 1$ ).

(b) En répétant les arguments de [2], on montre que l'on peut choisir des fonctions  $C^{\infty}$  plates en  $M$  :

$$v_{\pm} \sim \sum_{j=0}^{+\infty} a_{\pm}^j E_j(\tilde{\varphi}_{\pm})$$

$$\left[ \text{ou de façon équivalente } v_{\pm} = E_0(\tilde{\varphi}_{\pm}) a_{\pm}, a_{\pm} \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_{\pm}^j \left( \frac{E_j}{E_0} \right) (\tilde{\varphi}_{\pm}) \right]$$

en sorte que  $P v_{\pm} = r_{\pm} v_{\pm}$  et  $r_{\pm}$  est  $C^{\infty}$  plate sur  $M$  (bien entendu,  $v_{\pm}$  n'ont de sens que sur support  $\chi_{\pm}$ ).

(c) Étudions l'ensemble  $E$  des points voisins de  $M$  où  $|v_+| = |v_-|$ . On écrit  $v_{\pm} = E_0(\tilde{\varphi}_{\pm}) a_{\pm}^0 (1 + \tilde{a}_{\pm})$ . De la construction même de  $v_{\pm}$  (cf. [2]) il résulte que  $a$  est une fonction  $C^1$ , nulle, ainsi que ses dérivées premières sur  $M$ ; elle est  $C^{\infty}$  hors de  $M$ , et toutes ses dérivées ont, au voisinage de  $M$ , une singularité au plus polynomiale en  $1/\rho$ .

Alors

$$\log \left| \frac{v_+}{v_-} \right| = \operatorname{Re} Z + \log \left| \frac{a_+^0}{a_-^0} \right| + \log \left| \frac{1 + \tilde{a}_+}{1 + \tilde{a}_-} \right| = \frac{1}{(\alpha\rho)^v} [\operatorname{Re} f(\theta) + O(\rho)] + O(\rho) \quad \text{d'après 1 (e).}$$

Les points  $(\rho, \theta)$  de  $E$  sont les solutions de

$$\operatorname{Re} f(\theta) = O(\rho),$$

où  $O(\rho)$  dénote précisément ici une fonction de classe  $C'$  en  $(\theta, \rho)$  qui est, ainsi que sa dérivée en  $\theta$ ,  $O(\rho)$ ; elle est de plus  $C^{\infty}$  pour  $\rho \neq 0$ , avec singularités polynomiales des dérivées. Cela montre que, pour  $\rho \leq \rho_0$  petit,  $\log |v_+/v_-|$  n'a pas d'autres zéros que les quatre « branches » différentiables  $\theta = \theta_i(\alpha, v, \rho)$ , avec  $\theta_i(\alpha, v, 0) = \theta_i(\alpha, v)$ , données par le théorème des fonctions implicites. Ici encore,  $\theta_i$  est  $C^{\infty}$  de  $\rho$  pour  $\rho \neq 0$  et ses dérivées sont à singularités polynomiales en  $\rho = 0$ .

3. MODIFICATION DES SOLUTIONS APPROCHÉES. — On pose  $u_{\pm} = v_{\pm} (1 + w_{\pm})$ , où  $w_{\pm}$  seront des fonctions  $C^{\infty}$  plates sur  $M$  choisies telles que  $P u_{\pm} = R_{\pm} u_{\pm}$ ,  $R_{\pm}$  étant  $C^{\infty}$  plates sur  $M$  et sur  $E$ .

(a) On a

$$P u_{\pm} = v_{\pm} P_m(w_{\pm}) + (1 + w_{\pm}) P v_{\pm} + \sum_{0 < l < m} (Q_{m-l} v_{\pm}) D^l w_{\pm},$$

où  $Q_{m-l}$  sont certains opérateurs d'ordre  $m-l$ , d'où

$$R_{\pm} = r_{\pm} + \frac{P_m(w_{\pm})}{1 + w_{\pm}} + \frac{1}{1 + w_{\pm}} \sum_{0 < l < m} \frac{Q_{m-l} v_{\pm}}{v_{\pm}} D^l w_{\pm}.$$

Les fonctions  $Q_{m-l} v_{\pm} / v_{\pm}$  sont  $C^{\infty}$  hors de  $M$ , et possèdent ainsi que leurs dérivées, des singularités au plus polynomiales près de  $M$ .

On choisit  $w_{\pm}$  nul sur  $E$ , ainsi que ses dérivées normales (sur chaque branche, hors de  $M$ ) d'ordre au plus  $m-1$ .

La condition  $R_{\pm}|_E = 0$  sera satisfaite pour un choix convenable de la dérivée normale d'ordre  $m$  de  $w_{\pm}$  pourvu que chacune des branches de  $E$  soit non caractéristique pour  $P$ .

(b) Un vecteur normal à la  $i$ -ième branche de  $E$  en  $0$  est le vecteur  $(-\sin \theta_i(\alpha, v), \cos \theta_i(\alpha, v), 0)$ .

D'après 1(c) et (e),

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial \alpha}(\alpha_0, 0) = \frac{d\theta_i}{d\alpha}(\alpha_0) \neq 0$$

donc pour  $v > 0$  assez petit,  $\partial \theta_i / \partial \alpha(\alpha_0, v) \neq 0$ .

Comme  $P$  ne possède, dans le plan  $\{t=0\}$ , qu'un nombre fini de vecteurs caractéristiques, on peut toujours supposer, quitte à remplacer  $\alpha_0$  par un  $\alpha$  arbitrairement proche, que  $E$  est non caractéristique pour  $P$ .

(c) Cela étant, on réalisera  $R_{\pm}$  nul sur  $E$  en prenant pour dérivée normale d'ordre  $m$  de  $w_{\pm}$  sur  $E$  la trace d'une fonction  $C^{\infty}$  plate en  $M$ . On voit alors que, grâce aux propriétés de  $E$  expliquées en 2(c), toute dérivée de  $w_{\pm}$ , normale d'ordre  $m$  et tangentielle d'ordre quelconque, calculée à partir de la dérivée normale d'ordre  $m$  de  $w_{\pm}$ , est en fait aussi la trace sur  $E$  d'une fonction  $C^{\infty}$  plate en  $M$ .

Pour annuler sur  $E$  les dérivées d'ordre supérieur de  $R_{\pm}$ , on procède de même avec les dérivées (d'ordre normal supérieur à  $m$ ) de  $w_{\pm}$ . On obtient ainsi une collection de « dérivées » de  $w_{\pm}$ , de tous ordres, dont chaque élément est la trace sur  $E$  d'une fonction  $C^{\infty}$  plate en  $M$  (différente pour chaque branche, bien entendu).

Cela permet de vérifier aisément les conditions de compatibilité de Whitney [11] pour cette collection et le fermé de  $E$ . Il existe donc des fonctions  $w_{\pm}$ ,  $C^{\infty}$  plates en  $M$ , avec les propriétés voulues.

4. FIN DE LA PREUVE DU THÉORÈME. — (a) Posons  $u = \chi_+ u_+ + \chi_- u_-$ . On choisit les fonctions de troncature  $\chi_{\pm}$  en sorte que, sur  $\tilde{V}_{\pm}$ ,  $\pm \operatorname{Re} f(\theta) \leq -\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ). Nous allons étudier  $a = Pu/u$  hors de  $M$ , et par secteurs en  $\theta$ .



Soit  $\eta > 0$  tel que, dans le secteur  $S_\eta^i$ ,

$$S_\eta^i = \{(\rho, \theta, t), |\theta - \theta_i(\alpha, v)| < \eta\},$$

on a

$$|\operatorname{Re} f'(\theta)| > \varepsilon_1 \geq 0 \quad \text{et} \quad \chi_\pm \equiv 1$$

au voisinage de  $\bar{S}_\eta^i$ .

En notant  $F(\theta, \rho) = (\alpha\rho)^v \log |v_+/v_-|$  on a, avec  $\theta^* \in S_\eta^i$ ,

$$\log \left| \frac{u_+}{u_-} \right| = \frac{1}{(\alpha\rho)^v} F(\theta, \rho) + \log \left| \frac{1+w_+}{1+w_-} \right| = (\theta - \theta_i(\rho)) \left[ \frac{1}{(\alpha\rho)^v} F'_\theta(\theta^*, \rho) + G(\theta, \rho) \right],$$

où  $G$  est bornée, et  $F'_\theta(\theta^*, \rho) = \operatorname{Re} f'(\theta^*) + O(\rho)$ . Pour  $\rho \leq \rho_0$  petit,  $\log |u_+/u_-|$  n'a donc pas d'autres zéros dans  $S_\eta^i$  que la  $i$ -ième branche de  $E$ .

Supposons par exemple que  $|u_+| \leq |u_-|$  pour  $\theta \geq \theta_i(\rho)$ ; alors

$$\begin{aligned} |u_+ + u_-| &= |u_-| \left| 1 + \frac{u_+}{u_-} \right| \geq |u_-| \left( 1 - \frac{|u_+|}{|u_-|} \right) \\ &\geq |u_-| \inf \left( 1/2, \frac{-1}{4} \log \left| \frac{u_+}{u_-} \right| \right) \geq |u_-| \inf \left( 1/2, \frac{C}{\rho^v} (\theta - \theta_i(\rho)) \right), \end{aligned}$$

pour  $C > 0$  [on a une estimation analogue pour  $\theta \leq \theta_i(\rho)$ ].

Donc, dans  $S_\eta^i$ ,

$$a = \frac{P u_+ + P u_-}{u_+ + u_-} = \frac{R_+ u_+ + R_- u_-}{u_+ + u_-},$$

est  $C^\infty$  (grâce aux propriétés de  $R_\pm$ ), et

$$|a| \leq \frac{|R_+| + |R_-|}{\inf(1/2, C/\rho^v |\theta - \theta_i(\rho)|)} \leq C_N \rho^N, \quad \text{pour tout } N.$$

On a aussi sans autres difficultés  $|D^\alpha a| \leq C_{N,\alpha} \rho^N$ , pour tout  $N$ .

(b) En dehors de la réunion des secteurs  $S_{\eta/2}^i$ , on a

$$\frac{1}{c} e^{\operatorname{Re} Z} \leq \left| \frac{u_+}{u_-} \right| \leq c e^{\operatorname{Re} Z} \quad (c > 0),$$

et en fait

$$\pm \operatorname{Re} Z \leq \frac{-C'}{\rho^v}$$

la où

$$\pm \left| \frac{u_+}{u_-} \right| \leq \pm 1.$$

Dans une zone où  $\chi_{\pm} \equiv 1$ , si par exemple  $|u_{+}/u_{-}| \leq 1$ ,

$$a = \frac{Pu}{u} = \frac{R_{+}u_{+} + R_{-}u_{-}}{u_{-}(1 + (u_{+}/u_{-}))}$$

est  $C^{\infty}$  et peut être estimée comme en (a).

(c) Supposons enfin  $\theta \in \tilde{V}_{+}$ , par exemple; alors  $\chi_{-} \equiv 1$ , et

$$Pu = \chi_{+}R_{+}u_{+} + R_{-}u_{-} + [P, \chi_{+}]u_{+}.$$

Près de  $\theta_{+}$ ,  $\operatorname{Re} Z \leq -C'/\rho^{\nu}$ , donc

$$\left| D^{\alpha} \frac{u_{+}}{u_{-}} \right| \leq C_{N, \alpha} \rho^N$$

(pour tout  $N$ ), et comme  $[P, \chi_{+}]$  a au plus des singularités en  $1/\rho^m$ ,  $a = Pu/u$  est  $C^{\infty}$  et peut être estimée comme en (a). On procède de même dans  $\tilde{V}_{-}$ , où  $\operatorname{Re} Z \geq C'/\rho^{\nu}$ .

La conjonction de (a), (b), (c) montre que  $a = Pu/u$  est  $C^{\infty}$  et plate sur  $M$  dans un voisinage de 0.

Enfin  $u$  est  $C^{\infty}$  et plate sur  $M$ , comme somme de deux telles fonctions, et la propriété de  $\operatorname{Supp} u$  résulte du fait que  $u$  n'a de zéros que sur  $E$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. ALINHAC, *Non-unicité pour des opérateurs à caractéristiques simples (Séminaire Goulaouic-Schwartz, 1979-1980, exposé n° 4)*.
- [2] S. ALINHAC et M. S. BAOUENDI, *Construction de solutions nulles et singulières pour des opérateurs de type principal (Séminaire Goulaouic-Schwartz, 1978-1979, exposé XXII, École polytechnique, Paris, et article à paraître)*.
- [3] S. ALINHAC et M. S. BAOUENDI, *Counter Examples to Strong Uniqueness for Elliptic Operators* (à paraître).
- [4] S. ALINHAC et M. S. BAOUENDI, *Uniqueness for the Characteristic Cauchy Problem and Strong Unique Continuation for Higher Order Partial Differential Inequalities [Amer. J. Math. (à paraître)]*.
- [5] N. ARONSZAJN, *A Unique Continuation Theorem for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations or Inequalities of Second Order [J. Math. pures et appl., t. 36, (9), 1957, p. 235-249]*.
- [6] M. S. BAOUENDI et E. C. ZACHMANOGLU, *Unique Continuation of Solutions of Partial Differential Equations and Inequalities from Manifolds of Any Dimension (Duke Math. J., vol. 45, 1978, p. 1-13)*.
- [7] M. S. BAOUENDI, F. TREVES et E. C. ZACHMANOGLU, *Flat Solutions and Singular Solutions of Homogeneous Linear Partial Differential Equations with Analytic Coefficients (Duke Math. J., vol. 46, 1979, p. 409-440)*.
- [8] A. P. CALDERÓN, *Existence and Uniqueness Theorems for Systems of Partial Differential Equations (Proc. Symp. Fluid Dynamics and Appl. Math., Univ. of Maryland, 1961, Gordon and Breach, New York, 1962, p. 147-195)*.
- [9] H. CORDES, *Über die Bestimmtheit der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen durch Anfangsvorgaben (Nachr. Akad. Wiss. Göttingen II, vol. a, 1956, p. 230-258)*.
- [10] E. G. SITNIKOVA, *A Strong Zero Theorem for an Elliptic Equation of High Order [Mat. Sbornik, vol. 81, (123), 1970; Math. U.S.S.R. Sbornik, vol. 10, 1978, p. 349-367]*.
- [11] H. WHITNEY, *Analytic Extensions of Differentiable Functions Defined in Closed Sets [Trans. Amer. Math. Soc., (36), 1934, p. 63-89]*.

(Manuscrit reçu le 7 janvier 1980).

S. ALINHAC,  
Université de Paris-Sud, 91405 Orsay.