

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JEAN-PIERRE WINTENBERGER

Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux ; applications

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 16, n° 1 (1983), p. 59-89

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1983_4_16_1_59_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LE CORPS DES NORMES DE CERTAINES EXTENSIONS INFINIES DE CORPS LOCAUX; APPLICATIONS

PAR JEAN-PIERRE WINTENBERGER

Dans tout cet article, p est un nombre premier fixé et tous les corps locaux considérés ont un corps résiduel parfait de caractéristique p .

Nous définissons tout d'abord la notion d'extension APF (arithmétiquement profinie) et strictement APF d'un corps local. Sont en particulier strictement APF les extensions galoisiennes totalement ramifiées et à groupe de Galois un groupe de Lie p -adique. Lorsque L/K est une extension APF infinie, nous lui associons un corps local $X_K(L)$ que nous appelons le corps des normes de L/K . Son groupe multiplicatif s'identifie à la limite projective des groupes multiplicatifs des extensions finies de K contenues dans L , les morphismes de transition étant la norme. Sa caractéristique est p .

Soit L/K une extension APF infinie et soit M une extension algébrique séparable de L . Nous associons à M une extension algébrique séparable $X_{L/K}(M)$ de $X_K(L)$. Dans une certaine mesure, la correspondance $M \rightarrow X_{L/K}(M)$ ramène l'étude des extensions séparables de L à celle des extensions séparables de $X_K(L)$. En particulier, si \bar{K} est une clôture séparable de K contenant L , $X_{L/K}(\bar{K})$ est une clôture séparable de $X_K(L)$ et les groupes de Galois des extensions \bar{K}/L et $X_{L/K}(\bar{K})/X_K(L)$ coïncident. D'autre part, nous munissons d'une structure de corps valué l'ensemble des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments du complété \hat{M} de M , vérifiant $x_{n+1}^p = x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous montrons que, lorsque L/K est strictement APF, le corps $R(\hat{M})$ ainsi défini s'identifie au complété de la clôture radicielle de $X_{L/K}(M)$. Lorsque K est de caractéristique p , nous identifions $R(\hat{M})$ à \hat{M} qui est donc parfait. Lorsque K est de caractéristique 0, nous construisons un homomorphisme surjectif de l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans l'anneau de valuation de $R(\hat{M})$ sur l'anneau de valuation de \hat{M} . Le corps $R(\hat{M})$ joue un grand rôle dans l'étude de certaines représentations p -adiques ([2], chap. V, § 1).

Voici le plan de ce travail :

1. Extensions APF et strictement APF
 - 1.1. Ramification
 - 1.2. Définitions et premières propriétés
 - 1.3. Extensions élémentaires
 - 1.4. La tour des extensions élémentaires d'une extension APF
2. Construction du corps $X_K(L)$
 - 2.1. Énoncé du théorème
 - 2.2. L'anneau $A_K(L)$
 - 2.3. Démonstration du théorème
3. Propriétés fonctorielles de $X_K(L)$
 - 3.1. Le foncteur $X_K(\)$
 - 3.2. Extensions de L et de $X_K(L)$
 - 3.3. Propriétés de ramification
 - 3.4. L'isomorphisme $X_{X_K(L)}(X_{L/K}(M)) \simeq X_K(M)$
4. Le corps $R(E)$
 - 4.1. Construction
 - 4.2. Le plongement $\Lambda_{L/K} : X_K(L) \rightarrow R(\hat{L})$ pour L/K extension strictement APF infinie
 - 4.3. Le corps $R(\hat{M})$ pour M extension algébrique séparable d'une extension strictement APF infinie.

Les résultats de cet article ont été exposés dans deux notes publiées en collaboration avec J.-M. Fontaine ([4] et [5]). C'est à lui que cet article doit beaucoup de ses idées. Je me suis largement inspiré d'un exposé rédigé [3] qu'il a fait au séminaire de Théorie des Nombres de Grenoble en 1971 et d'un cours de 3^e cycle qu'il a professé à Grenoble durant l'année 1976-1977.

Dans tout ce qui suit, si M est un corps valué, on désigne par A_M son anneau de valuation, par P_M l'idéal de A_M formé des éléments de valuation strictement positive et par k_M son corps résiduel. Si K est un corps local, on appelle v_K la valuation de K normalisée par $v_K(K^*) = \mathbb{Z}$. Si M est le complété d'une extension algébrique de K , on note encore v_K le prolongement de v_K à M .

1. Extensions arithmétiquement profinies

Soit K un corps local et \bar{K} une clôture séparable de K . Soit L une extension de K contenue dans \bar{K} . Si M est une extension de K contenue dans \bar{K} , on note G_M le groupe de Galois de \bar{K}/M .

1.1. RAMIFICATION.

1.1.1. Supposons tout d'abord L/K finie. Si σ est un K -plongement de L dans \overline{K} , on pose $i_L(\sigma) = \min_{x \in A_L} (v_L(\sigma x - x) - 1)$ (on convient que $i_L(\sigma) = +\infty$ si σ est l'inclusion). Si σ n'est pas l'inclusion, on voit facilement que pour une uniformisante quelconque π de L , on a

$$i_L(\sigma) \begin{cases} = v_L\left(\frac{\sigma\pi}{\pi} - 1\right) & \text{si } \sigma \text{ agit trivialement sur } k_L, \\ = -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par abus de notation, si L' est une extension de L contenue dans \overline{K} , si σ est un K -plongement de L' dans \overline{K} et si $\text{res}_L(\sigma)$ est la restriction à L de σ , on note encore $i_L(\sigma)$ le rationnel $i_L(\text{res}_L(\sigma))$.

Si, pour tout $t \geq -1$, on note γ_t le nombre des K -plongements σ de L dans \overline{K} qui vérifient $i_L(\sigma) \geq t$, on pose, pour $u \geq 0$:

$$\varphi_{L/K}(u) = \int_0^u \frac{\gamma_t dt}{\gamma_0}.$$

Pour $-1 \leq u \leq 0$, on pose $\varphi_{L/K}(u) = u$. La fonction $\varphi_{L/K}$ est une bijection croissante de $[-1, +\infty[$, continue et linéaire par morceaux; on note $\psi_{L/K}$ sa fonction réciproque.

Soit L' une extension finie de L contenue dans \overline{K} . On a ([9], p. 151-152) :

$$i_L(\sigma) + 1 = \sum_{\tau \rightarrow \sigma} \frac{(i_{L'}(\tau) + 1)}{e_{L'/L}},$$

où τ décrit les différents K -plongements de L' dans \overline{K} qui prolongent σ et où $e_{L'/L}$ est l'indice de ramification de L'/L . Si $j(\sigma) = \sup_{\tau \rightarrow \sigma} i_{L'}(\tau)$, on en déduit comme dans [7], lemme 4, p. 82 que $i_L(\sigma) = \varphi_{L'/L}(j(\sigma))$. On a d'autre part les formules de transitivité suivantes : $\varphi_{L'/K} = \varphi_{L/K} \circ \varphi_{L'/L}$ et $\psi_{L'/K} = \psi_{L'/L} \circ \psi_{L/K}$.

Remarque. — Les fonctions $\varphi_{L/K}$ et $\psi_{L/K}$ définies ci-dessus coïncident avec celles définies dans [7], chap. IV. Lorsque L/K est galoisienne de groupe de Galois G , il est défini dans [7], chap. IV, § 1 une fonction i_G ; on prendra garde que $i_L(\sigma) = i_G(\sigma) - 1$ pour tout $\sigma \in G$.

1.1.2. Supposons maintenant L/K galoisienne de groupe de Galois G . Comme dans [7], chap. IV, on note $(G^u)_{u \in \mathbf{R}, u \geq -1}$ les groupes de ramification en numérotation supérieure. Les G^u sont des sous-groupes fermés invariants de G et ils forment une filtration de G , décroissante, exhaustive (i. e. $G^{-1} = G$) et séparée (i. e. $\bigcap_{u \geq -1} G^u = \{1\}$); le groupe d'inertie est G^0 . Lorsque L/K est finie, on a : $G^u = \{\sigma \in G; i_L(\sigma) \geq \psi_{L/K}(u)\}$. Si K' est une extension galoisienne (resp. finie) de K contenue dans L et si $H = \text{Gal}(L/K')$, pour tout $u \geq -1$, on a $(G/H)^u = G^u H/H$ (resp. $H^u = H \cap G^{\varphi_{K'/K}(u)}$).

1.2. DÉFINITIONS ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS.

1.2.1. DÉFINITIONS. — Nous disons que l'extension L/K est *arithmétiquement profinie* (ou *APF*), si, pour tout $u \geq -1$, le groupe $G_K^u G_L$ est ouvert dans G_K (cela ne dépend pas, bien sûr, du choix de \overline{K}).

Si L/K est APF, on pose $G_L^0 = G_L \cap G_K^0$ et on définit une bijection de $[-1, +\infty[$, croissante, continue, linéaire par morceaux, en posant :

$$\Psi_{L/K}(u) \begin{cases} = \int_0^u (G_K^0 : G_L^0 G_K^v) dv & \text{si } u \geq 0, \\ = u & \text{si } -1 \leq u \leq 0. \end{cases}$$

Nous disons que l'extension L/K est *strictement APF* si :

$$\liminf_{u \rightarrow +\infty} \frac{\Psi_{L/K}(u)}{(G_K^0 : G_L^0 G_K^u)} > 0.$$

On note $i(L/K)$ la borne supérieure des $i \geq -1$ tels que $G_K^i G_L = G_K$. Si L/K est de plus une p -extension totalement ramifiée (i. e. si $i(L/K) > 0$), on pose :

$$c(L/K) = \inf_{u \geq i(L/K)} \frac{\Psi_{L/K}(u)}{(G_K^0 : G_L^0 G_K^u)};$$

L/K est donc strictement APF si et seulement si $c(L/K) > 0$. On vérifie immédiatement que $i(L/K)$ et $c(L/K)$ ne dépendent pas du choix de \overline{K} .

Si L/K est APF, on note $\varphi_{L/K}$ la fonction réciproque de $\Psi_{L/K}$. La fonction $\varphi_{L/K}$ est donc une bijection de $[-1, +\infty[$, croissante, continue et linéaire par morceaux. Les fonctions $\varphi_{L/K}$ et $\Psi_{L/K}$ ainsi définies, coïncident avec celles de 1.1.1 lorsque L/K est finie. Si L/K est finie et si L' est une extension APF de L contenue dans \overline{K} , les formules de transitivité du 1.1.1 se généralisent : on a $\varphi_{L'/K} = \varphi_{L/K} \circ \varphi_{L'/L}$ et $\Psi_{L'/K} = \Psi_{L'/L} \circ \Psi_{L/K}$.

1.2.2. *Exemples.* — Toute extension finie séparable d'un corps local est strictement APF. Toute extension galoisienne d'un corps local K , à extension résiduelle finie et dont le groupe de Galois est un groupe de Lie p -adique (en particulier toute extension abélienne à extension résiduelle finie d'une extension finie de \mathbf{Q}_p) est strictement APF : si K est de caractéristique 0, cela est un résultat de S. Sen [6]; si K est de caractéristique p cela résulte d'un analogue du travail de S. Sen ([10] et [11]).

1.2.3. PROPOSITION. — Soit M et N deux extensions de K contenues dans \overline{K} avec $M \subset N$. Alors :

- (i) si M/K est finie, N/K est (strictement) APF si et seulement si N/M l'est;
- (ii) Si N/M est finie, N/K est (strictement) APF si et seulement si M/K l'est;
- (iii) si N/K est (strictement) APF, M/K l'est;
- (iv) si N/K est APF (resp. si N/K est APF et $i(N/K) > 0$) on a $i(M/K) \geq i(N/K)$ (resp. $c(M/K) \geq c(N/K)$); si de plus M/K est finie, on a $i(N/M) \geq \Psi_{M/K}(i(N/K)) \geq i(N/K)$ (resp. $c(N/M) \geq c(N/K)$).

1.2.4. *Démonstration.* — La partie des (i), (ii) et (iii) concernant le caractère APF des extensions résulte immédiatement de ce que pour tout $u \geq -1$, on a :

$$(G_K : G_N G_K^u) = (G_K : G_M G_K^u) (G_M : (G_M \cap G_K^u) G_N).$$

Montrons la partie du (iv) concernant les extensions APF. Si N/K est APF, on a $G_K^{i(N/K)} G_N = G_K$, *a fortiori* $G_K^{i(N/K)} G_M = G_K$ d'où $i(M/K) \geq i(N/K)$. Si de plus M/K est finie, on a $G_K^{i(N/K)} \cap G_M = G_M^{\psi_{M/K}(i(N/K))}$ d'où $G_M^{\psi_{M/K}(i(N/K))} G_N = (G_K^{i(N/K)} \cap G_M) G_N = G_M$, et donc $i(N/M) \geq \psi_{M/K}(i(N/K))$; comme clairement $\psi_{M/K}(i(N/K)) \geq i(N/K)$, on a bien $i(N/M) \geq \psi_{M/K}(i(N/K)) \geq i(N/K)$.

Occupons-nous maintenant des extensions strictement APF. Supposons donc que N/K est APF et que $i(N/K) > 0$. Pour tout $u \geq 0$, on a :

$$\psi_{N/K}(u) = \int_0^u (G_K^0 : G_N^0 G_K^v) dv$$

et $\psi_{M/K}(u) = \int_0^u (G_K^0 : G_M^0 G_K^v) dv$. Comme pour tout $v \geq 0$

$$(G_K^0 : G_N^0 G_K^v) = (G_K^0 : G_M^0 G_K^v) (G_M^0 : (G_M^0 \cap G_K^v) G_N^0)$$

et que la fonction $v \mapsto (G_M^0 : (G_M^0 \cap G_K^v) G_N^0)$ est croissante, on en déduit que :

$$\psi_{N/K}(u) \leq \psi_{M/K}(u) (G_M^0 : (G_M^0 \cap G_K^u) G_N^0).$$

Appliquant de nouveau l'égalité ci-dessus avec $v = u$, on voit que

$$\frac{\psi_{M/K}(u)}{(G_K^0 : G_M^0 G_K^u)} \geq \frac{\psi_{N/K}(u)}{(G_K^0 : G_N^0 G_K^u)}.$$

Comme d'autre part $\psi_{M/K}(u) \leq \psi_{N/K}(u)$, on voit que si M/K est finie, on a :

$$\frac{\psi_{M/K}(u)}{(G_K^0 : G_M^0 G_K^u)} \leq \frac{\psi_{N/K}(u) \times [M : K]}{(G_K^0 : G_N^0 G_K^u)}.$$

Il résulte immédiatement de ces deux dernières inégalités le (ii), le (iii) et l'inégalité $c(M/K) \geq c(N/K)$ (pour cette dernière inégalité, il faut utiliser que $0 < i(N/K) \leq i(M/K)$).

Supposons maintenant de plus M/K finie. Comme pour tout $u \geq 0$, on a $G_K^u \cap G_M^0 = G_M^{\psi_{M/K}(u)}$ on voit que

$$(G_M^0 : G_N^0 G_M^{\psi_{M/K}(u)}) \leq (G_K^0 : G_N^0 G_K^u) \leq (G_M^0 : G_N^0 G_M^{\psi_{M/K}(u)}) \times [M : K];$$

comme de plus $\psi_{N/K}(u) = \psi_{N/M}(\psi_{M/K}(u))$, on a :

$$\frac{1}{[M : K]} \times \frac{\psi_{N/M}(\psi_{M/K}(u))}{(G_M^0 : G_M^{\psi_{M/K}(u)} G_N^0)} \leq \frac{\psi_{N/K}(u)}{(G_K^0 : G_N^0 G_K^u)} \leq \frac{\psi_{N/M}(\psi_{M/K}(u))}{(G_M^0 : G_M^{\psi_{M/K}(u)} G_N^0)}.$$

On en déduit le (i). Comme on a prouvé que $i(N/M) \geq \psi_{M/K}(i(N/K))$, il en résulte aussi immédiatement que $c(N/M) \geq c(N/K)$ et cela achève la démonstration de la proposition.

1.3. EXTENSIONS ÉLÉMENTAIRES

1.3.1. DÉFINITION. — Supposons L/K finie. Soit i un rationnel > 0 . Nous disons que l'extension L/K est élémentaire de niveau i si $G_K^i G_L = G_K$ et $G_K^{i+\varepsilon} G_L = G_L$ pour tout $\varepsilon > 0$. Il résulte immédiatement des propriétés rappelées au 1.1 que L/K est élémentaire de niveau i si et seulement si pour tout K -plongement σ de L dans \overline{K} distinct de l'inclusion on a $i_L(\sigma) = i$ (en particulier la définition ne dépend pas du choix de \overline{K}). Si L/K est élémentaire de niveau i , elle est totalement ramifiée, et comme le quotient $G_K^i/G_K^{i+\varepsilon}$ est un pro- p -groupe, le degré de L/K est une puissance de p . Si de plus L/K est galoisienne, i est un entier et le groupe de Galois $\text{Gal}(L/K)$ est somme directe de groupes cycliques d'ordre p ([7], cor. 3, p. 75).

1.3.2. Remarque. — Supposons L/K élémentaire de niveau $i > 0$ et de degré p^r . Posons $i = i_0/d$ avec i_0 et $d \in \mathbf{N}^*$ premiers entre eux. Alors on peut montrer les propriétés suivantes : d divise $p^r - 1$ (donc d est premier à p), la plus petite extension galoisienne L' de K contenant L et contenue dans \overline{K} est la composée de L et d'une extension K' de K , modérément ramifiée et d'indice de ramification d . De plus LK'/K' est élémentaire de niveau i_0 .

1.4. LA TOUR DES EXTENSIONS ÉLÉMENTAIRES D'UNE EXTENSION APF.

1.4.1. Supposons L/K APF. Soit B l'ensemble des $b \in \mathbf{R}_+^*$ tels que $G_K^{b+\varepsilon} G_L \neq G_K^b G_L$ pour tout $\varepsilon > 0$. Il est immédiat de voir que pour tout $x \geq -1$, $B \cap [-1, x]$ est fini et que, lorsque L/K est infinie, B est infini (lorsque L/K est finie, B est bien sûr fini). Ordonnons les éléments de B en une suite strictement croissante $(b_n)_{0 < n < m}$ où $m \in \mathbf{N}^*$ si L/K est finie et $m = +\infty$ si L/K est infinie; lorsque L/K est infinie on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$. Posons $i_n = \psi_{L/K}(b_n)$ et soit K_n le corps des points fixes de \overline{K} par $G_K^{b_n} G_L$; si L/K est finie, posons $K_m = L$. Notons K_0 l'extension maximale non ramifiée de K contenue dans L . On montre facilement les propriétés suivantes :

(a) pour tout $n \in \mathbf{N}$ avec $n < m$, K_n/K est finie, $K_n \subset K_{n+1}$, et $\bigcup_{\substack{n \in \mathbf{N} \\ n \leq m}} K_n = L$;

(b) K_1/K_0 est totalement ramifiée de degré premier à p ; pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ avec $n < m$, K_{n+1}/K_n est élémentaire de niveau i_n , et $i_n = i(K_{n+1}/K_n) = i(L/K_n)$;

(c) si L/K est infinie, $\lim_{n \rightarrow +\infty} i_n = +\infty$.

La suite $(K_n)_{n \in \mathbf{N}, n \leq m}$ est appelée la tour des extensions élémentaires de L/K (on vérifie immédiatement que ces propriétés caractérisent la tour $(K_n)_{n \in \mathbf{N}, n \leq m}$ indépendamment du choix de \overline{K}). On vérifie immédiatement que L/K est strictement APF si et seulement si il existe une constante $c > 0$ avec $i_n/[K_{n+1} : K] > c$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $n < m$. De plus, si $i(L/K) > 0$ i. e. si $K = K_1$, on a :

$$i(L/K) = i_1 \quad \text{et} \quad c(L/K) = \inf_{0 < n < m} \frac{i_n}{[K_{n+1} : K]}.$$

1.4.2. *Remarque.* — Réciproquement, soit $m \in \mathbf{N}^* \cup \{+\infty\}$, $(K_n)_{n \in \mathbf{N}, n \leq m}$ une suite croissante d'extensions finies de K et $(i_n)_{0 < n < m}$ une suite strictement croissante (tendant vers $+\infty$ si $m = +\infty$) de nombres rationnels vérifiant :

- l'extension K_0/K est non ramifiée;
- l'extension K_1/K_0 est totalement ramifiée de degré premier à p ;
- pour $0 < n < m$ l'extension K_{n+1}/K_n est élémentaire de niveau i_n .

Soit $L = \cup K_n$. Posons $d = [K_1 : K_0]$ et pour $0 < n < m$,

$$p^n = [K_{n+1} : K_n] \quad \text{et} \quad b_n = d^{-1} [i_1 + (i_2 - i_1)p^{-r_1} + \dots + (i_n - i_{n-1})p^{-r_1 - r_2 - \dots - r_{n-1}}].$$

Alors l'extension L/K est APF si et seulement si ou bien $m \neq +\infty$, ou bien $m = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$. Si L/K est APF, la suite des K_n est la tour des extensions élémentaires de L/K .

2. Construction du corps $X_K(L)$

2.1. ÉNONCÉ DU THÉORÈME.

2.1.1. Si L est une extension algébrique séparable d'un corps K , nous notons $\mathcal{E}_{L/K}$ l'ensemble ordonné filtrant des extensions finies de K contenues dans L et nous posons :

$$X_K(L)^* = \lim_{E \in \mathcal{E}_{L/K}} E^*,$$

l'application de transition de E'^* à E^* (si $E \subset E'$) étant la norme de E' à E que l'on note $N_{E'/E}$. On pose $X_K(L) = X_K(L)^* \cup \{0\}$. Se donner un élément $\alpha \in X_K(L)$ revient donc à se donner une famille $(\alpha_E)_{E \in \mathcal{E}_{L/K}}$ avec $\alpha_E \in E$ et $N_{E'/E}(\alpha_{E'}) = \alpha_E$ si $E \subset E'$.

2.1.2. Dans toute la suite de ce paragraphe, L est une extension APF infinie d'un corps local K . On note K_0 (resp. K_1) l'extension maximale non ramifiée (resp. modérément ramifiée) de K contenue dans L ; ce sont des extensions finies de K .

Si $\alpha \in X_K(L)$, $v_E(\alpha_E)$ pour $E \in \mathcal{E}_{L/K_0}$ ne dépend pas de E : on pose $v(\alpha) = v_E(\alpha_E)$.

Soit d'autre part x un élément du corps résiduel k_L de L . Soit $[x]$ le représentant multiplicatif de x dans K_0 . Pour $E \in \mathcal{E}_{L/K_1}$ on note x_E la racine $[E : K_1]$ -ième de $[x]$ (cela a bien un sens puisque $[E : K_1]$ est une puissance de p). Pour $E \subset E'$, on a :

$$x_E = x_{E'}^{[E' : E]} = N_{E'/E}(x_{E'})$$

et comme \mathcal{E}_{L/K_1} est cofinal dans $\mathcal{E}_{L/K}$, $(x_E)_{E \in \mathcal{E}_{L/K_1}}$ définit un élément de $X_K(L)$ que nous notons $f_{L/K}(x)$.

2.1.3. THÉORÈME. — (i) Soit α et $\beta \in X_K(L)$. Alors pour tout $E \in \mathcal{E}_{L/K}$ les $N_{E'/E}(\alpha_{E'} + \beta_{E'})$ (pour $E' \supset E$) convergent (suivant le filtre des sections de $\mathcal{E}_{L/E}$) vers un élément $\gamma_E \in E$ et $\alpha + \beta = (\gamma_E)_{E \in \mathcal{E}_{L/K}}$ est un élément de $X_K(L)$.

(ii) Muni de l'addition de la multiplication et de v précédemment définies, $X_K(L)$ est un corps local de caractéristique p et $v(X_K(L)^*) = \mathbb{Z}$. L'application $f_{L/K}$ est un plongement du corps résiduel k_L de L dans $X_K(L)$ et elle induit un isomorphisme de k_L sur le corps résiduel de $X_K(L)$.

2.1.4. Remarque. — Si $K' \in \mathcal{E}_{L/K}$, $\mathcal{E}_{L/K'}$ est cofinal dans $\mathcal{E}_{L/K}$ et les corps $X_K(L)$ et $X_{K'}(L)$ s'identifient. Si p' est la plus grande puissance de p qui divise l'indice de ramification de l'extension K'/K et si σ désigne le Frobenius absolu sur k_L , on prendra garde que $f_{L/K'} = f_{L/K} \circ \sigma'$.

2.2. L'ANNEAU $A_K(L)$. — Nous allons maintenant donner une autre description de $X_K(L)$ et en déduire le théorème 2.1.3.

2.2.1. PROPOSITION. — Soit E un corps local et soit E' une extension finie séparable non triviale, totalement ramifiée et de degré une puissance de p de E . Soit $N_{E'/E}$ la norme de E' à E ; posons $i = i(E'/E)$ (cf. n° 1.2). Alors :

(i) si $\alpha, \beta \in A_{E'}$, on a :

$$v_E(N_{E'/E}(\alpha + \beta) - N_{E'/E}(\alpha) - N_{E'/E}(\beta)) \geq \frac{(p-1)i}{p};$$

(ii) si $a \in A_E$, il existe $\alpha \in A_{E'}$ tel que :

$$v_E(N_{E'/E}(\alpha) - a) \geq \frac{(p-1)i}{p}.$$

2.2.2. Démonstration.

2.2.2.1. LEMME. — Soit E'' une extension de E contenue dans E' . Alors si le (i) de la proposition est vrai pour E''/E et E'/E'' , il l'est pour E'/E .

2.2.2.2. Démonstration. — Soit α et $\beta \in A_{E'}$. On a :

$$N_{E'/E''}(\alpha + \beta) = N_{E'/E''}(\alpha) + N_{E'/E''}(\beta) + \gamma \quad \text{avec} \quad v_{E''}(\gamma) \geq \frac{(p-1)i(E'/E'')}{p}.$$

D'où

$$N_{E'/E}(\alpha + \beta) = N_{E'/E}(\alpha) + N_{E'/E}(\beta) + N_{E'/E}(\gamma) + \gamma' \quad \text{avec} \quad v_E(\gamma') \geq \frac{(p-1)i(E'/E)}{p}.$$

Comme E''/E est totalement ramifiée et comme

$$v_{E''}(\gamma) \geq \frac{(p-1)i(E'/E'')}{p},$$

on a :

$$v_E(N_{E'/E}(\gamma)) \geq \frac{(p-1)i(E'/E'')}{p}.$$

Comme d'après la proposition 1.2.3 $i(E'/E'') \geq i(E'/E)$ et $i(E''/E) \geq i(E'/E)$, on voit que :

$$v_E(N_{E''/E}(\gamma) + \gamma') \geq \frac{(p-1)i(E'/E)}{p},$$

d'où :

$$v_E(N_{E'/E}(\alpha + \beta) - N_{E'/E}(\alpha) - N_{E'/E}(\beta)) \geq \frac{(p-1)i(E'/E)}{p},$$

ce qui prouve le lemme.

2.2.2.3. LEMME. — *Le (i) de la proposition est vrai lorsque E'/E est cyclique de degré p .*

2.2.2.4. *Démonstration.* — Supposons par exemple $\alpha \neq 0$ et $v_E(\beta/\alpha) \geq 0$. Si $T_{E'/E}$ est la trace de E'/E , on sait d'après [7], lemme 5, p. 91 que :

$$N_{E'/E}\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) = 1 + N_{E'/E}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \pmod{T_{E'/E}(A_{E'})}.$$

Si $i = i(E'/E)$ on sait ([7], lemme 4, p. 91) que pour $x \in A_{E'}$, $v_E(T_{E'/E}(x))$ est supérieure ou égale à la partie entière de $((p-1)(i+1))/p$, d'où facilement :

$$v_E(T_{E'/E}(x)) \geq \frac{(p-1)i}{p}.$$

On voit donc que :

$$v_E\left(N_{E'/E}\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) - 1 - N_{E'/E}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\right) \geq \frac{(p-1)i}{p}$$

d'où :

$$v_E(N_{E'/E}(\alpha + \beta) - N_{E'/E}(\alpha) - N_{E'/E}(\beta)) \geq \frac{(p-1)i}{p},$$

ce qui prouve le lemme.

2.2.2.5. Montrons le (i) de la proposition. Soit F une clôture galoisienne de E' sur E et soit F_1 l'extension maximale modérément ramifiée de E contenue dans F . Puisque E'/E est une p -extension totalement ramifiée, E' et F_1 sont linéairement disjointes sur E ; on a donc :

$$N_{E'/E}(\alpha + \beta) - N_{E'/E}(\alpha) - N_{E'/E}(\beta) = N_{E'F_1/F_1}(\alpha + \beta) - N_{E'F_1/F_1}(\alpha) - N_{E'F_1/F_1}(\beta).$$

Comme le groupe de Galois $\text{Gal}(F/F_1)$ est un p -groupe, $E'F_1$ est réunion d'une suite croissante d'extensions de F_1 , chacune d'entre elles étant cyclique de degré p sur la précédente. Il résulte alors des lemmes 2.2.2.1 et 2.2.2.3 que le (i) de la proposition est vrai pour $F_1 E'/F_1$. On a donc :

$$v_{F_1}(N_{E'/E}(\alpha + \beta) - N_{E'/E}(\alpha) - N_{E'/E}(\beta)) \geq \frac{(p-1)i(F_1 E'/F_1)}{p}.$$

Un raisonnement facile prouve que si e est l'indice de ramification de F_1/E , on a $i(F_1 E'/F_1) = e \times i(E'/E)$. On déduit alors de l'inégalité ci-dessus que :

$$v_E(N_{E'/E}(\alpha + \beta) - N_{E'/E}(\alpha) - N_{E'/E}(\beta)) \geq \frac{(p-1)i}{p},$$

i. e. le (i) de la proposition.

2.2.2.6. Prouvons le (ii). Soit $a \in A_E$. Soit π' une uniformisante de E' . Alors $\pi = N_{E'/E}(\pi')$ est une uniformisante de E . Soit $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ la suite des éléments de k_E telle que $a = \sum_{i=0}^{+\infty} [x_i] \pi^i$ (pour $x \in k_E$, $[x]$ désigne le représentant multiplicatif de x dans A_E). Soit $\alpha = \sum_{i=0}^{+\infty} [x_i^{1/[E':E]}] \pi'^i$. D'après le (i) de la proposition, on a :

$$v_E(N_{E'/E}(\alpha) - \sum_{i=0}^{+\infty} [x_i] \pi^i) \geq \frac{(p-1)i}{p},$$

c'est-à-dire :

$$v_E(N_{E'/E}(\alpha) - a) \geq \frac{(p-1)i}{p}.$$

Cela prouve le (ii).

2.2.3. Revenons à l'extension L/K . Pour $E \in \mathcal{E}_{L/K_1}$, soit $r(E)$ le plus petit entier supérieur ou égal à $((p-1)i(L/E))/p$.

2.2.3.1. LEMME. — La famille des $r(E)$, pour $E \in \mathcal{E}_{L/K_1}$, est croissante. Elle tend vers $+\infty$ (selon le filtre des sections de \mathcal{E}_{L/K_1}).

2.2.3.2. Démonstration. — La famille des $i(L/E)$, pour $E \in \mathcal{E}_{L/K_1}$ est croissante, cf. proposition 1.2.3; il en est de même de la famille des $r(E)$. Si $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la tour des extensions élémentaires de L/K , cf. 1.4, on voit facilement que $i(L/K_n) = i(K_{n+1}/K_n)$. Comme, cf. 1.4,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} i(K_{n+1}/K_n) = +\infty$ et que $r(E)$ est croissante on a $\lim r(E) = +\infty$ et cela achève de prouver le lemme.

2.2.3.3. Soit $(s(E))_{E \in \mathcal{E}_{L/K_1}}$ une famille croissante d'entiers telle que $0 < s(E) \leq r(E)$ et $\lim s(E) = +\infty$ (une telle famille existe d'après le lemme précédent). Pour tout $E \in \mathcal{E}_{L/K_1}$, on pose $\bar{A}_E = A_E/P_E^{s(E)}$. Pour $E' \supset E$ la norme $N_{E'/E}$ induit, cf. prop. 2.2.1, un homomorphisme d'anneaux surjectif de $A_{E'}$ sur \bar{A}_E . Comme $s(E') \geq s(E)$, son noyau contient $P_E^{s(E)}$ et $N_{E'/E}$ induit un homomorphisme d'anneaux de $\bar{A}_{E'}$ sur \bar{A}_E ; on pose $A_K(L) = \varprojlim \bar{A}_E$.

Soit $a = (\bar{a}_E) \in A_K(L)$. Si $a \neq 0$, il existe $E \in \mathcal{E}_{L/K_1}$ tel que $\bar{a}_E \neq 0$. Pour $E' \in \mathcal{E}_{L/E}$, soit $\hat{a}_{E'}$ un relèvement de \bar{a}_E dans $A_{E'}$. Il est facile de voir que pour $E' \in \mathcal{E}_{L/E}$, $v_{E'}(\hat{a}_{E'})$ ne dépend pas de E' ni du choix des relèvements $\hat{a}_{E'}$. On pose $w(a) = v_{E'}(\hat{a}_{E'})$. Si $a = 0$, on pose $w(a) = +\infty$.

Soit $x \in k_L$. Pour tout $E \in \mathcal{E}_{L/K_1}$, soit x_E la racine $[E : K_1]$ -ième de x , $[x_E]$ le représentant multiplicatif de x_E dans A_E et $\overline{[x_E]}$ l'image de $[x_E]$ dans $\overline{A_E}$. Il est immédiat que

$$(\overline{[x_E]})_{E \in \mathcal{E}_{L/K_1}} \in A_K(L); \text{ on pose } f(x) = (\overline{[x_E]})_{E \in \mathcal{E}_{L/K_1}}.$$

2.2.4. PROPOSITION. — $A_K(L)$ est un anneau de caractéristique p . La fonction $w : A_K(L) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ est surjective; c'est une valuation pour laquelle $A_K(L)$ est séparé et complet. L'application f est un plongement du corps k_L dans l'anneau $A_K(L)$ et elle induit un isomorphisme de k_L sur le corps résiduel de $A_K(L)$.

2.2.5. Démonstration. — Prouvons que $A_K(L)$ est de caractéristique p . Si $\overline{p_E}$ est l'image de p dans $\overline{A_E}$, on a $p = (\overline{p_E})_{E \in \mathcal{E}_{L/K_1}}$ dans $A_K(L)$. Si p n'était pas nul, il existerait $E \in \mathcal{E}_{L/K_1}$ tel que pour $E' \supset E$ on ait $v_{E'}(p) = w(p)$; cela est absurde et $A_K(L)$ est bien de caractéristique p (cela résulte aussi de ce que :

$$\frac{(p-1)i(L/E)}{p} \leq v_E(p) \text{ pour tout } E \in \mathcal{E}_{L/K_1},$$

ce que l'on montre facilement en utilisant l'exercice 3, p. 79 de [7]).

La surjectivité de w résulte de la surjectivité des homomorphismes de transition $\overline{A_{E'}} \rightarrow \overline{A_E}$. On vérifie que w est une valuation. Comme $w(a) = +\infty$ équivaut à $a = 0$, $A_K(L)$ est séparé; il est complet car w induit la topologie limite projective, les $\overline{A_E}$ étant munis de la topologie discrète. Si x et $y \in k_L$, on a $[x_E] + [y_E] \equiv [(x+y)_E] \pmod{p}$, donc $\overline{[x_E]} + \overline{[y_E]} = \overline{[(x+y)_E]}$ et f est bien additive. Il est alors clair que f est un plongement et qu'il induit un isomorphisme de k_L sur le corps résiduel de $A_K(L)$. Cela prouve la proposition.

2.3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. — Le théorème 2.1.3 se déduit alors facilement du résultat suivant :

2.3.1. PROPOSITION. — Soit $A_{X_K(L)}$ l'ensemble des $\alpha = (\alpha_E)_{E \in \mathcal{E}_{L/K}}$ de $X_K(L)$ tels que $v(\alpha) \geq 0$. L'application ξ , qui à $\alpha \in A_{X_K(L)}$ associe $(\overline{\alpha_E})_{E \in \mathcal{E}_{L/K_1}}$ (où $\overline{\alpha_E}$ désigne l'image de α_E dans $\overline{A_E}$) est une bijection de $A_{X_K(L)}$ sur $A_K(L)$. Soit η son application réciproque. Si $a \in A_K(L)$ et si pour tout $E' \in \mathcal{E}_{L/K_1}$, $\hat{a}_{E'}$ est un relèvement de $\overline{a_{E'}}$ dans $A_{E'}$, pour tout $E \in \mathcal{E}_{L/K_1}$, on a

$$\eta(a)_E = \lim_{E' \in \mathcal{E}_{L/E}} N_{E'/E}(\hat{a}_{E'}).$$

2.3.2. Démonstration.

2.3.2.1. LEMME. — Soit E un corps local, E' une extension finie de E , séparable, totalement ramifiée, et d'ordre une puissance de p . Soit $N_{E'/E}$ la norme de E' à E . Soit t un réel ≥ 0 . Soit α et $\beta \in A_{E'}$ tels que $v_{E'}(\alpha - \beta) \geq t$. Alors :

$$v_E(N_{E'/E}(\alpha) - N_{E'/E}(\beta)) \geq \varphi_{E'/E}(t).$$

2.3.2.2. Démonstration. — Si $v_{E'}(\beta) \geq t$, on a $v_{E'}(\alpha) \geq t$ et le lemme est clair. Supposons $v_{E'}(\beta) < t$. On a :

$$v_{E'}\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) \geq t - v_{E'}(\beta).$$

Lorsque E'/E est galoisienne, il en résulte ([7], prop. 8, p. 99) que :

$$v_E \left(N_{E'/E} \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) \right) \geq \varphi_{E'/E}(t - v_{E'}(\beta));$$

dans le cas général, on se ramène, comme au 2.2.2.5, au cas cyclique de degré p et on a encore cette inégalité. On voit facilement que $\varphi_{E'/E}(t - v_{E'}(\beta)) + v_{E'}(\beta) \geq \varphi_{E'/E}(t)$ et donc :

$v_E(N_{E'/E}(\alpha) - N_{E'/E}(\beta)) \geq \varphi_{E'/E}(t)$ ce qui prouve le lemme.

2.3.2.3. Montrons la proposition. Soit $a \in A_K(L)$; pour tout $E \in \mathcal{E}_{L/K_1}$, soit \hat{a}_E un relèvement de \bar{a}_E dans A_E . Soit $E \in \mathcal{E}_{L/K_1}$. Pour $E'' \supset E' \supset E$, on a $v_{E'}(N_{E''/E'}(\hat{a}_{E''}) - \hat{a}_{E'}) \geq s(E')$ et donc, d'après le lemme précédent, $v_E(N_{E''/E}(\hat{a}_{E''}) - N_{E'/E}(\hat{a}_{E'})) \geq \varphi_{E'/E}(s(E'))$. Comme pour tout $u \geq -1$, $\varphi_{E'/E}(u) \geq \varphi_{L/E}(u)$, il en résulte que :

$$v_E(N_{E''/E}(\hat{a}_{E''}) - N_{E'/E}(\hat{a}_{E'})) \geq \varphi_{L/E}(s(E')).$$

Comme $\lim s(E') = +\infty$, il en résulte que la famille des $N_{E'/E}(\hat{a}_{E'})$ converge dans A_E .

Si $(\hat{a}'_E)_{E \in \mathcal{E}_{L/K_1}}$ est une autre famille de relèvements des \bar{a}_E , on voit facilement de même que :

$$v_E(N_{E'/E}(\hat{a}'_{E'}) - N_{E'/E}(\hat{a}_{E'})) \geq \varphi_{L/E}(s(E'))$$

pour tout $E' \in \mathcal{E}_{L/E}$, et donc $\alpha_E = \lim N_{E'/E}(\hat{a}_{E'})$ ne dépend pas du choix des $\hat{a}_{E'}$. Clairement, les α_E définissent un élément α de $A_{X_K(L)}$. De plus, l'application $a \rightarrow \alpha$ est une application réciproque de ξ . L'application ξ est donc bijective et si η est son application réciproque, on a bien $\eta(a)_E = \lim N_{E'/E}(\hat{a}_{E'})$.

2.3.3. Remarques.

2.3.3.1. Il résulte de l'isomorphisme de la proposition précédente que si α et $\beta \in A_{X_K(L)}$, on a $(\alpha + \beta)_E \equiv \alpha_E + \beta_E \pmod{P_E^{(E)}}$. Réciproquement, si E est une famille cofinale dans \mathcal{E}_{L/K_1} , si $(s'(E))_{E \in \mathcal{E}_{L/K_1}}$ est une famille d'entiers avec $\lim s'(E) = +\infty$, et si α, β et $\gamma \in A_{X_K(L)}$ vérifient $v_E(\alpha_E + \beta_E - \gamma_E) \geq s'(E)$ pour tout $E \in \mathcal{E}_{L/K_1}$, alors $\gamma = \alpha + \beta$. De plus il résulte de la surjectivité des projections $A_K(L) \rightarrow \bar{A}_E$ que pour tout $E \in \mathcal{E}_{L/K_1}$ et tout $x \in A_E$, il existe $\alpha \in A_{X_K(L)}$ avec $v_E(x - \alpha_E) \geq r(E)$.

2.3.3.2. Soit π une uniformisante de $X_K(L)$. Grâce au théorème 2.1.3, on peut associer à tout $\alpha \in A_{X_K(L)}$ une série $f_\alpha \in k_L[[X]]$. Elle est caractérisée par la propriété suivante : si $f_{\alpha, E}$ est la série dont les coefficients sont les racines $[E : K_1]$ -ième de ceux de f_α , on a $\alpha_E \equiv f_{\alpha, E}(\pi_E) \pmod{P_E^{(E)}}$. Dans certains cas, on peut faire beaucoup mieux. Prenons pour K une extension finie de \mathbf{Q}_p . Soit F un corps tel que $\mathbf{Q}_p \subset F \subset K$ avec K/F non ramifiée. Soit Γ un groupe formel de Lubin-Tate associé à F et à une uniformisante ω de F . Soit $(\omega_n)_{n \in \mathbf{N}}$ un élément primitif du module de Tate $T_\omega(\Gamma)$ de Γ (i.e. si $[\omega]$ est l'endomorphisme de Γ associé à ω , on a, dans une clôture algébrique de K , $[\omega](\omega_{n+1}) = \omega_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, $[\omega](\omega_0) = 0$ et $\omega_0 \neq 0$). Prenons pour L l'extension engendrée sur K par les ω_n . Alors Coleman ([1]) a prouvé que pour $\alpha \in A_{X_K(L)}$, il existe $g_\alpha \in A_K[[X]]$ telle que $\alpha_{K(\omega_n)} = g_\alpha^{\varphi^{-n}}(\omega_n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, où φ est le Frobenius de K/F . On peut montrer que pour un choix convenable de l'uniformisante π de $X_K(L)$, f_α est la réduction de g_α (plus précisément, avec

les notations du 2.2, si $\bar{\omega}_n$ est l'image de ω_n dans $\overline{A_{K(\omega_n)}}$, la suite $(\bar{\omega}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définit un élément de $A_K(L)$ et il faut choisir pour π l'élément de $X_K(L)$ correspondant à $(\bar{\omega}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans l'isomorphisme entre $A_K(L)$ et $A_{X_K(L)}$.

3. Propriétés fonctorielles de $X_K(L)$.

Dans tout ce paragraphe, K est un corps local et L une extension APF infinie de K .

3.1. LE FONCTEUR $X_K(\)$.

3.1.1. Soit L' une autre extension APF infinie de K et soit $\tau : L \rightarrow L'$ un K -plongement fini séparable. Notons \mathcal{E}'_τ l'ensemble des $E' \in \mathcal{E}_{L'/K}$ tels que l'application canonique de $\tau L \otimes E'$ dans L' soit un isomorphisme. On définit une application $X_K(\tau) : X_K(L) \rightarrow X_K(L')$ en associant à $(\alpha_E)_{E \in \mathcal{E}_{L/K}} \in X_K(L)$ l'élément $(\beta_{E'})_{E' \in \mathcal{E}'_\tau}$ défini par :

$$\beta_{E'} = \tau \alpha_{\tau^{-1}E'} \quad \text{si } E' \in \mathcal{E}'_\tau$$

(si $E', E'' \in \mathcal{E}'_\tau$ avec $E' \subset E''$, on voit que pour tout $\alpha \in \tau^{-1}E''$, $N_{E''/E'}(\tau\alpha) = \tau N_{\tau^{-1}E''/\tau^{-1}E'}(\alpha)$ et on a donc bien $N_{E''/E'}(\beta_{E''}) = \beta_{E'}$; on a bien défini un élément de $X_K(L')$ car \mathcal{E}'_τ est cofinal dans $\mathcal{E}_{L'/K}$).

3.1.2. THÉORÈME. — *L'application $X_K(\tau)$ est un plongement continu fini et séparable de $X_K(L)$ dans $X_K(L')$. Le degré de $X_K(L')$ sur l'image de $X_K(L)$ est égal au degré de L' sur τL . Si $L'/\tau L$ est galoisienne, $X_K(L')/X_K(\tau)(X_K(L))$ l'est et l'application $\sigma \mapsto X_K(\sigma)$ identifie $\text{Gal}(L'/\tau L)$ à $\text{Gal}(X_K(L')/X_K(\tau)(X_K(L)))$.*

3.1.3. Démonstration.

3.1.3.1. LEMME. — *Supposons $L'/\tau L$ galoisienne. Alors le groupe de Galois $\text{Gal}(L'/\tau L)$ agit fidèlement sur $X_K(L')$.*

3.1.3.2. Démonstration. — Soit $\sigma \in \text{Gal}(L'/\tau L)$ tel que $X_K(\sigma) = 1$. Notons K'_0 l'extension maximale non ramifiée de K contenue dans L' et soit $E' \in \mathcal{E}'_\tau$ tel que $E' \supset K'_0$. Comme le corps résiduel de $X_K(L')$ s'identifie à celui de L' , σ agit trivialement sur $k_{L'}$ et comme $k_L = k_{E'}$, la restriction de σ à E' appartient au sous-groupe d'inertie $\text{Gal}(E'/\tau(L) \cap E')^0$ de $\text{Gal}(E'/\tau(L) \cap E')$. Soit π' une uniformisante de $X_K(L')$. Comme $X_K(\sigma)(\pi') = \pi'$, on a $\sigma \pi'_{E'} = \pi'_{E'}$; comme $\pi'_{E'}$ est une uniformisante de E' et que $\sigma \in \text{Gal}(E'/\tau(L) \cap E')^0$, on voit que la restriction de σ à E' est triviale. Comme $\mathcal{E}'_\tau \cap \mathcal{E}_{L'/K}$ est cofinal dans $\mathcal{E}_{L'/K}$, il en résulte que $\sigma = 1$. Cela prouve le lemme.

3.1.3.3. Démontrons le théorème. On voit immédiatement que $X_K(\tau)$ est un plongement continu de $X_K(L)$ dans $X_K(L')$. Supposons tout d'abord $L'/\tau L$ galoisienne. On voit facilement que $X_K(\tau)(X_K(L))$ est le corps des points fixes de $X_K(L')$ sous l'action de $\text{Gal}(L'/\tau L)$. Comme, d'après le lemme précédent, le groupe $\text{Gal}(L'/\tau L)$ agit fidèlement sur $X_K(L')$, il en résulte que $X_K(L')/X_K(\tau)(X_K(L))$ est galoisienne et que l'application $\sigma \rightarrow X_K(\sigma)$ identifie $\text{Gal}(L'/\tau L)$ à son groupe de Galois. Cela prouve le théorème lorsque $L'/\tau L$ est

galoisienne. Lorsque $L'/\tau L$ est seulement supposée séparable, on voit facilement, en plongeant L' dans une extension galoisienne de τL , que $X_K(L')/X_K(\tau)(X_K(L))$ est séparable et de même degré que $L'/\tau L$. Cela prouve le théorème.

3.2. EXTENSIONS DE L ET DE $X_K(L)$.

3.2.1. Dans tout le n° 3.2, L/K est une extension APF infinie. Pour toute extension algébrique séparable M de L , on note $X_{L/K}(M)$ la limite inductive des $X_K(L')$, pour $L' \in \mathcal{E}_{M/L}$. Si M/L est finie, $X_{L/K}(M)$ s'identifie donc à $X_K(M)$.

On peut considérer, de manière évidente, $X_{L/K}$ comme un foncteur de la catégorie des extensions algébriques séparables de L (les flèches étant les L -plongements algébriques séparables) dans celle des extensions algébriques séparables de $X_K(L)$ (les flèches étant les $X_K(L)$ -plongements algébriques séparables). Ce foncteur induit une équivalence de catégories. Autrement dit :

3.2.2. THÉORÈME. — (i) Si X' est une extension algébrique séparable de $X_K(L)$, il existe une extension algébrique séparable M de L et un $X_K(L)$ -isomorphisme de $X_{L/K}(M)$ sur X' .

(ii) Si M_1 et M_2 sont deux extensions algébriques séparables de L , l'ensemble des L -plongements algébriques séparables de M_1 dans M_2 s'identifie à celui des $X_K(L)$ -plongements algébriques séparables de $X_{L/K}(M_1)$ dans $X_{L/K}(M_2)$.

Par suite :

3.2.3. COROLLAIRE. — Soit \bar{K} une clôture séparable de K contenant L . Alors $\bar{X} = X_{L/K}(\bar{K})$ est une clôture séparable de $X_K(L)$ et $\text{Gal}(\bar{K}/L)$ s'identifie à $\text{Gal}(\bar{X}/X_K(L))$.

3.2.4. Remarque. — Supposons de plus L/K galoisienne. On prouvera plus loin (cor. 3.3.4) que $\text{Gal}(L/K)$ agit fidèlement sur $X_K(L)$. Il est alors facile de voir que $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ s'identifie au groupe des automorphismes de \bar{X} qui laissent stable $X_K(L)$ et induisent sur $X_K(L)$ un automorphisme qui est dans l'image de $\text{Gal}(L/K)$.

3.2.5. Démonstration du (i) du théorème 3.2.2

3.2.5.1. Soit \bar{K} une clôture séparable de K contenant L . On voit facilement qu'il s'agit de montrer que $X_{L/K}(\bar{K})$ est une clôture séparable de $X_K(L)$, ou encore que tout polynôme séparable non constant $f(X)$, à coefficients dans $X_{L/K}(\bar{K})$ a une racine dans $X_{L/K}(\bar{K})$. Un tel polynôme est à coefficients dans un $X_K(L')$, pour L' extension finie de L contenue dans \bar{K} . Quitte à changer de notations, on peut supposer que $L' = L$. Il est clair aussi que l'on peut supposer que f est un polynôme unitaire à coefficients dans $A_{X_K(L)}$.

Soit donc $f(X) = X^k + \sum_{i=0}^{i=k-1} a_i X^i \in A_{X_K(L)}[X]$ un polynôme unitaire séparable de degré k et à coefficients dans $A_{X_K(L)}$. Notons $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de \mathcal{E}_{L/K_1} (K_1 désignant l'extension maximale modérément ramifiée de K contenue dans L) vérifiant $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = L$. Pour tout n , notons $f_n \in A_{E_n}[T]$ le polynôme $X^k + \sum_{i=0}^{i=k-1} a_{i E_n} X^i$. Notons $d(f)$ et $d(f_n)$ les discriminants de f et f_n respectivement.

3.2.5.2. LEMME. — Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_0$ on ait $v_{X_K(L)}(d(f)) = v_{E_n}(d(f_n))$.

3.2.5.3. Démonstration. — Notons r_n le plus petit entier $\geq ((p-1)i(L/E_n))/p$. On sait d'après le lemme 2.2.3.1 que $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = +\infty$. Soit alors n_0 tel que pour $n \geq n_0$ on ait $r_n > v_{X_K(L)}(d(f))$. Soit $n \geq n_0$. Comme L/E_n est totalement ramifiée, on a :

$$v_{X_K(L)}(d(f)) = v_{E_n}(d(f)_{E_n}).$$

Il résulte de la remarque 2.3.3.1 que :

$$v_{E_n}(d(f)_{E_n}) - d(f_n) \geq r_n.$$

Comme :

$$v_{E_n}(d(f)_{E_n}) = v_{X_K(L)}(d(f)) < r_n,$$

on en déduit que :

$$v_{E_n}(d(f_n)) = v_{X_K(L)}(d(f))$$

et cela prouve le lemme.

3.2.5.4. En particulier, pour $n \geq n_0$, f_n est séparable. Soit alors x_n une racine de f_n dans \bar{K} . Notons $E'_n = E_n(x_n)$, $L'_n = L(x_n)$.

LEMME. — Il existe $n_1 \geq n_0$ tel que pour $n \geq n_1$, les extensions E'_n/E_n et L/E_n sont linéairement disjointes et $i(L'_n/E'_n) = \psi_{E'_n/E_n}(i(L/E_n))$.

3.2.5.5. Démonstration. — Soit $n_1 \geq n_0$ tel que $i(L/E_n) \geq kv_{X_K(L)}(d(f))$ pour $n \geq n_1$. Soit $n \geq n_1$. Montrons tout d'abord que $\text{Gal}(\bar{K}/E_n)^{i(L/E_n)} \subset \text{Gal}(\bar{K}/E'_n)$. Soit $\sigma \in \text{Gal}(\bar{K}/E_n)^{i(L/E_n)}$. On a, cf. 1.1.1, $i_{E'_n}(\sigma) \geq \psi_{E'_n/E_n}(i(L/E_n))$ et donc $i_{E'_n}(\sigma) \geq i(L/E_n)$. Puisque $i(L/E_n) \geq kv_{X_K(L)}(d(f))$, on en déduit que $i_{E'_n}(\sigma) \geq kv_{X_K(L)}(d(f))$. Comme $n \geq n_0$, on sait d'après le lemme précédent que $v_{X_K(L)}(d(f)) = v_{E_n}(d(f_n))$; donc $i_{E'_n}(\sigma) \geq kv_{E_n}(d(f_n))$, d'où $i_{E'_n}(\sigma) \geq v_{E'_n}(d(f_n))$. Puisque $i_{E'_n}(\sigma) = \min_{x \in \Lambda_{E'_n}} (v_{E'_n}(\sigma x - x) - 1)$, on en déduit que $v_{E'_n}(\sigma x_n - x_n) > v_{E'_n}(d(f_n))$. Il en résulte immédiatement que $\sigma x_n = x_n$ et $\sigma \in \text{Gal}(\bar{K}/E'_n)$. On a donc bien $\text{Gal}(\bar{K}/E_n)^{i(L/E_n)} \subset \text{Gal}(\bar{K}/E'_n)$.

Montrons que L/E_n et E'_n/E_n sont linéairement disjointes. Soit S le corps des points fixes de \bar{K} par $\text{Gal}(\bar{K}/E_n)^{i(L/E_n)}$. Par définition de $i(L/E_n)$ on a $\text{Gal}(\bar{K}/E_n)^{i(L/E_n)} \text{Gal}(\bar{K}/L) = \text{Gal}(\bar{K}/E_n)$, donc $S \cap L = E_n$. Il en résulte que S et L sont linéairement disjointes sur E_n . Comme $\text{Gal}(\bar{K}/E_n)^{i(L/E_n)} \subset \text{Gal}(\bar{K}/E'_n)$, on a $E'_n \subset S$ et il en résulte que E'_n/E_n et L/E_n sont linéairement disjointes.

Reste à montrer que $i(L'_n/E'_n) = \psi_{E'_n/E_n}(i(L/E_n))$. Pour tout $u \geq -1$, on a $\text{Gal}(\bar{K}/E_n)^u \cap \text{Gal}(\bar{K}/E'_n) = \text{Gal}(\bar{K}/E'_n)^{\psi_{E'_n/E_n}(u)}$; comme $\text{Gal}(\bar{K}/E_n)^{i(L/E_n)} \subset \text{Gal}(\bar{K}/E'_n)$, on en déduit que, pour $u \leq i(L/E_n)$, $\text{Gal}(\bar{K}/E_n)^u = \text{Gal}(\bar{K}/E'_n)^{\psi_{E'_n/E_n}(u)}$. Si Γ (resp. Γ')

désigne l'ensemble des E_n -plongements (resp. des E'_n -plongements) de L (resp. de L'_n) dans \overline{K} , si pour tout $u \geq -1$ on note Γ^u (resp. Γ'^u) l'image de $\text{Gal}(\overline{K}/E_n)^u$ (resp. $\text{Gal}(\overline{K}/E'_n)^u$) dans Γ (resp. Γ'), on en déduit facilement que, pour $u \leq i(L/E_n)$, $\Gamma^{\psi_{E'_n/E_n}(u)}$ s'envoie sur Γ^u dans la bijection canonique de Γ' sur Γ . Puisque $i(L/E_n) = \sup_{u \geq -1} \{\Gamma^u = \Gamma\}$ et $i(L'_n/E'_n) = \sup_{u \geq -1} \{\Gamma'^u = \Gamma'\}$, on en déduit que $i(L'_n/E'_n) = \psi_{E'_n/E_n}(i(L/E_n))$. Cela achève la démonstration du lemme.

3.2.5.6. Soit r'_n le plus petit entier $\geq ((p-1)i(L'_n/E'_n))/p$, P'_n l'idéal maximal de $A_{E'_n}$ et $\overline{A}'_n = A_{E'_n}/P'^n_n$. On sait, cf. n° 2.2, que la projection $A_{X_K(L'_n)} \rightarrow \overline{A}'_n$ est surjective; notons alors \hat{x}_n un relèvement dans $A_{X_K(L'_n)} \subset A_{X_{L/K}(\overline{K})}$ de l'image de x_n dans \overline{A}'_n .

LEMME. — On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(\hat{x}_n) = 0$.

3.2.5.7. Démonstration. — Soit $n \geq n_1$. On a $v_{X_K(L)}(f(\hat{x}_n)) \geq v_{X_K(L'_n)}(f(\hat{x}_n)) \times k^{-1}$. Comme $i(L'_n/E'_n) = \psi_{E'_n/E_n}(i(L/E_n)) > -1$, l'extension L'_n/E'_n est totalement ramifiée et on a $v_{X_K(L'_n)}(f(\hat{x}_n)) = v_{E'_n}(f(\hat{x}_n)_{E'_n})$. Donc :

$$(I) \quad v_{X_K(L)}(f(\hat{x}_n)) \geq v_{E_n}(f(\hat{x}_n)_{E_n}) \times k^{-1}.$$

Comme $f(X) = X^k + \sum_{i=0}^{i=k-1} a_i X^i$, on a :

$$v_{E'_n} \left(f(\hat{x}_n)_{E'_n} - \hat{x}_{nE'_n}^k - \sum_{i=0}^{i=k-1} a_{iE'_n} \hat{x}_{nE'_n}^i \right) \geq r'_n.$$

Comme L/E_n et E'_n/E_n sont linéairement disjointes on a $a_{iE'_n} = a_{iE_n}$ et donc $v_{E'_n}(f(\hat{x}_n)_{E'_n} - f_n(\hat{x}_{nE'_n})) \geq r'_n$. Comme \hat{x}_n a été choisi tel que $v_{E_n}(\hat{x}_{nE'_n} - x_n) \geq r'_n$, on en déduit que $v_{E'_n}(f(\hat{x}_n)_{E'_n} - f_n(x_n)) \geq r'_n$. Comme x_n est une racine de f_n , on voit que $v_{E'_n}(f(\hat{x}_n)_{E'_n}) \geq r'_n$. De (I) on déduit alors que $v_{X_K(L)}(f(\hat{x}_n)) \geq r'_n \times k^{-1}$. Comme $r'_n \geq ((p-1)i(L'_n/E'_n))/p$, que d'autre part, on sait d'après le lemme précédent que $i(L'_n/E'_n) = \psi_{E'_n/E_n}(i(L/E_n))$ on en déduit que : $v_{X_K(L)}(f(\hat{x}_n)) \geq ((p-1)i(L/E_n))/p \times k$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} i(L/E_n) = +\infty$,

on voit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(\hat{x}_n) = 0$ et cela prouve le lemme.

3.2.5.8. Soit \overline{X} une clôture séparable de $X_K(L)$ contenant $X_{L/K}(\overline{K})$. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(\hat{x}_n) = 0$, on peut extraire de la suite $(\hat{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite $(\hat{x}_{h(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers une racine $x \in \overline{X}$ de f . Il résulte du lemme de Krasner que, pour n suffisamment grand, on a $x \in X_K(L)$ ($\hat{x}_{h(n)} = X_K(L'_{h(n)})$) et donc $x \in X_{L/K}(\overline{K})$. Le polynôme f a donc une racine dans $X_{L/K}(\overline{K})$. Cela prouve le (i) du théorème.

3.2.6. Démonstration du (ii) du théorème. — Si P est un corps et Q et R deux extensions de P , notons $\Gamma_P(Q, R)$ l'ensemble des P -plongements de Q dans R .

Soit M et M' deux extensions séparables de L . Il s'agit de prouver que le foncteur $X_{L/K}$ induit une bijection de $\Gamma_L(M, M')$ dans $\Gamma_{X_K(L)}(X_{L/K}(M), X_{L/K}(M'))$. Soit M'' une extension galoisienne de L telle qu'il existe un L -plongement τ de M dans M'' et un L -plongement τ' de M' dans M'' . Clairement, d'une part les ensembles $\Gamma_L(M, M')$ et $\Gamma_{\mathbf{a}}(\tau M, \tau' M')$, d'autre part les ensembles $\Gamma_{X_K(L)}(X_{L/K}(M), X_{L/K}(M'))$ et $\Gamma_{X_K(L)}(X_{L/K}(\tau M), X_{L/K}(\tau' M'))$ s'identifient. On est donc ramené au cas où M et M' sont contenues dans une même extension galoisienne M'' de L . Dans ce cas, posons $G = \text{Gal}(M''/L)$, $H = \text{Gal}(M''/M)$ et $H' = \text{Gal}(M''/M')$. On sait, cf. théorème 3.1.2, que pour toute extension galoisienne finie E de L contenue dans M'' , le foncteur $X_{L/K}$ identifie $\text{Gal}(E/L)$ avec $\text{Gal}(X_K(E)/X_K(L))$; il en résulte immédiatement que $X_{L/K}$ identifie $\text{Gal}(M''/L) = G$ avec $\text{Gal}(X_{L/K}(M'')/X_K(L))$; de même, il identifie $\text{Gal}(X_{L/K}(M'')/X_{L/K}(M))$ avec H et $\text{Gal}(X_{L/K}(M'')/X_{L/K}(M'))$ avec H' . Les ensembles $\Gamma_L(M, M')$ et $\Gamma_{X_K(L)}(X_{L/K}(M), X_{L/K}(M'))$ s'identifient alors tous deux à l'ensemble des classes à gauche modulo H des éléments $\sigma \in G$ vérifiant $\sigma^{-1}H'\sigma \subset H$; cela prouve le (ii).

3.3. PROPRIÉTÉS DE RAMIFICATION.

3.3.1. Si X est un corps local et si σ est un automorphisme continu de X , on pose :

$$i_X(\sigma) = \begin{cases} -1 & \text{si } \sigma \text{ n'opère pas trivialement sur le corps résiduel,} \\ v_X\left(\frac{\sigma\pi}{\pi} - 1\right) & \text{sinon,} \end{cases}$$

où π est une uniformisante quelconque de X (on vérifie immédiatement que cette définition ne dépend pas du choix de π). Cette définition généralise la définition du 1.1.1 au cas où σ n'est pas nécessairement d'ordre fini.

Si G est un groupe d'automorphismes continus de X et si u est un réel ≥ -1 , on note $G_u = \{\sigma \in G; i_X(\sigma) \geq u\}$. Les G_u sont distingués et ils forment une filtration décroissante, exhaustive (i. e. $G_{-1} = G$) et séparée de G . Cette définition généralise la définition usuelle des groupes de ramification en numérotation inférieure ([7], chap. IV, § 1) au cas où G n'est pas nécessairement fini.

3.3.2. PROPOSITION. — Soit σ un K -automorphisme de L . Alors il existe $E \in \mathcal{E}_{L/K}$ tel que pour $E' \in \mathcal{E}_{L/E}$ on ait $i_{E'}(\sigma) = i_{X_K(L)}(X_K(\sigma))$.

3.3.3. Démonstration. — Si $\sigma = 1$, c'est clair. Supposons désormais que $\sigma \neq 1$.

3.3.3.1. Montrons tout d'abord qu'il existe $E \in \mathcal{E}_{L/K}$ tel que pour $E' \in \mathcal{E}_{L/E}$ on ait $i_{E'}(\sigma) = i_E(\sigma)$. Soit $F \in \mathcal{E}_{L/K}$ tel que $i_F(\sigma) < +\infty$. Il résulte du 1.1.1 que pour $E' \supset F$, on a $i_{E'}(\sigma) \leq \psi_{E'/F}(\Gamma_F(\sigma))$. On vérifie facilement que pour tout $u \geq -1$, on a $\psi_{E'/F}(u) \leq \psi_{L/F}(u)$, donc $i_{E'}(\sigma) \leq \psi_{L/F}(i_F(\sigma))$ et les $i_{E'}(\sigma)$ pour $E' \supset F$ sont bornés.

Soit alors $E \in \mathcal{E}_{L/F}$ tel que L/E soit totalement ramifiée et que $i(L/E) > i_E(\sigma)$ (un tel E existe car on a vu au lemme 2.2.3.1 que $\lim i(L/E) = +\infty$). Soit $E' \in \mathcal{E}_{L/E}$. Soit M une extension galoisienne de K contenant E' et soit Γ les différents σE -plongements de $\sigma E'$ dans M . L'extension L/E étant totalement ramifiée, l'indice de ramification de E'/E est $[E' : E]$ et, cf. 1.1.2, on a :

$$i_E(\sigma) = [E' : E]^{-1} \times \sum_{\tau \in \Gamma} i_{E'}(\tau\sigma).$$

On a $i_{\sigma E'}(\tau) \geq i(\sigma E'/\sigma E) = i(E'/E)$. On sait, cf. prop. 1.2.3, que $i(E'/E) \geq i(L/E)$. Comme on a imposé à E que $i(L/E) > i_E(\sigma)$, on voit que $i_{\sigma E'}(\tau) > i_E(\sigma)$. Il en résulte facilement que les $i_E(\tau\sigma)$ sont tous égaux à $i_E(\sigma)$ et on déduit alors de l'égalité ci-dessus que $i_E(\sigma) = i_{E'}(\sigma)$.

3.3.3.2. Reste à prouver que la valeur commune de $i_E(\sigma)$, pour $E' \in \mathcal{E}_{L/E}$ est $i_{X_K(L)}(X_K(\sigma))$. Si σ n'agit pas trivialement sur le corps résiduel $k_L = k_{X_K(L)}$, c'est clair. Nous supposons donc désormais que les $i_E(\sigma)$ et donc $i_{X_K(L)}(X_K(\sigma))$ sont ≥ 0 . Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la tour des extensions élémentaires de L/K , cf. n° 1.4. Désignons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par r_n le plus petit entier $\geq ((p-1)i(L/K_n))/p$. Soit $n \geq 1$ suffisamment grand pour que $K_n \supset E$ et $r_n > i_{K_n}(\sigma) + 1$. Il suffit de prouver que $i_{K_n}(\sigma) = i_{X_K(L)}(X_K(\sigma))$. Soit $\pi = (\pi_{E'})_{E' \in \mathcal{E}_{L/K}}$ une uniformisante de $X_K(L)$. On a $i_{X_K(L)}(X_K(\sigma)) = v_{X_K(L)}(\sigma\pi - \pi) - 1$ et donc :

$$(I) \quad i_{X_K(L)}(X_K(\sigma)) = v_{K_n}((\sigma\pi - \pi)_{K_n}) - 1.$$

On sait, cf. remarque 2.3.3.1 que $v_{K_n}((\sigma\pi - \pi)_{K_n} - (\sigma\pi)_{K_n} + \pi_{K_n}) \geq r_n$. Clairement $\sigma K_n = K_n$, donc $(\sigma\pi)_{K_n} = \sigma(\pi_{K_n})$ et par suite :

$$(II) \quad v_{K_n}((\sigma\pi - \pi)_{K_n} - \sigma(\pi_{K_n}) + \pi_{K_n}) \geq r_n.$$

Comme on a $v_{K_n}(\sigma(\pi_{K_n}) - \pi_{K_n}) = i_{K_n}(\sigma) + 1$ et que l'on a imposé que $r_n > i_{K_n}(\sigma) + 1$, on déduit de (II) que $v_{K_n}((\sigma\pi - \pi)_{K_n}) = v_{K_n}(\sigma(\pi_{K_n}) - \pi_{K_n})$, soit avec (I) : $i_{X_K(L)}(X_K(\sigma)) = i_{K_n}(\sigma)$. Cela achève de prouver la proposition.

3.3.4. COROLLAIRE. — Supposons L/K galoisienne. Alors $G = \text{Gal}(L/K)$ agit fidèlement sur $X_K(L)$ et il s'identifie ainsi à un sous-groupe fermé du groupe $\text{Aut}(X_K(L))$ des automorphismes continus de $X_K(L)$ (on munit $\text{Aut}(X_K(L))$ de la topologie définie par la filtration associée à la fonction $i_{X_K(L)}$). De plus, la filtration de G par les groupes de ramification $(G^u)_{u \geq -1}$ se lit sur $X_K(L)$: pour tout $u \geq -1$, on a $G^u = G_{\psi_{L/K}(u)}$, c'est-à-dire (cf. 3.3.1) : $G^u = \{ \sigma \in G, i_{X_K(L)}(X_K(\sigma)) \geq \psi_{L/K}(u) \}$.

3.3.5. Démonstration. — Il résulte immédiatement de la proposition précédente que $i_{X_K(L)}(X_K(\sigma)) = +\infty$ équivaut à $\sigma = 1$ et donc G agit fidèlement sur $X_K(L)$. Notons \mathcal{E}_g l'ensemble des $E \in \mathcal{E}_{L/K}$ tels que E/K soit galoisienne. Soit u un réel ≥ -1 . On a $G^u = \varprojlim_{E \in \mathcal{E}_g} \text{Gal}(E/K)^u$ et $\text{Gal}(E/K)^u = \text{Gal}(E/K)_{\psi_{E/K}(u)}$ pour tout $E \in \mathcal{E}_g$. Soit $F \in \mathcal{E}_{L/K}$ tel que $\text{Gal}(L/F) \subset G^u$. On voit facilement que pour $E' \in \mathcal{E}_g$ avec $E' \supset F$, on a $\psi_{E'/K}(u) = \psi_{L/K}(u)$. Par suite $G^u = \varprojlim_{E' \in \mathcal{E}_g \cap \mathcal{E}_{L/F}} \text{Gal}(E'/K)_{\psi_{L/K}(u)}$. Comme d'après la proposition précédente, on sait qu'il existe $E \in \mathcal{E}_{L/K}$ tel que pour $E' \in \mathcal{E}_{L/E}$, on ait $i_{E'}(\sigma) = i_{X_K(L)}(X_K(\sigma))$, on en déduit que l'on a bien :

$$G^u = \{ \sigma \in G; i_{X_K(L)}(X_K(\sigma)) \geq \psi_{L/K}(u) \}.$$

On voit alors immédiatement que la topologie de G , considéré comme groupe de Galois, coïncide avec celle induite par la topologie de $\text{Aut}(X_K(L))$. G est donc bien fermé dans $\text{Aut}(X_K(L))$ et le corollaire est complètement démontré.

3.3.6. COROLLAIRE. — Soit M une extension galoisienne de K contenant L . Posons $G = \text{Gal}(M/K)$ et $H = \text{Gal}(M/L)$. Notons $(H^u)_{u \geq -1}$ la filtration de ramification en numérotation supérieure de H considéré comme groupe de Galois de $X_{L/K}(M)/X_K(L)$. Alors pour tout $u \geq -1$, on a $H^{\psi_{L/K}(u)} = G^u \cap H$.

3.3.7. Démonstration. — Soit u un réel ≥ -1 . On voit facilement qu'il existe $E_0 \in \mathcal{E}_{L/K}$ tel que pour tout $E \in \mathcal{E}_{L/E_0}$, on ait $\psi_{L/K}(u) = \psi_{E/K}(u)$. Soit $(E_\lambda^{(0)})_{\lambda \in \Lambda}$ une famille d'extensions galoisiennes finies de K contenues dans M , contenant E_0 , et telle que $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda^{(0)} = M$. Pour tout $\lambda \in \Lambda$ soit $F_\lambda = E_\lambda^{(0)} L$. Comme F_λ/L est galoisienne et finie, il résulte immédiatement de la proposition 3.3.2 qu'il existe $E_\lambda^{(1)} \in \mathcal{E}_{F_\lambda/E_\lambda^{(0)}}$ tel que les extensions $E_\lambda^{(1)}/E_\lambda^{(1)} \cap L$ et $L/E_\lambda^{(1)} \cap L$ soient linéairement disjointes, que $E_\lambda^{(1)} L = F_\lambda$, que $E_\lambda^{(1)}/E_\lambda^{(1)} \cap L$ soit galoisienne et que les groupes de Galois $\text{Gal}(E_\lambda^{(1)}/E_\lambda^{(1)} \cap L)$ et $\text{Gal}(X_K(F_\lambda)/X_K(L))$ s'identifient avec leurs filtrations de ramification.

Posons $v = \psi_{L/K}(u)$. Soit $\sigma \in H$. Il s'agit de prouver que $\sigma \in H^v \Leftrightarrow \sigma \in G^u$. Comme $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda = M$, on a $\sigma \in H^v \Leftrightarrow \forall \lambda \in \Lambda$,

$$i_{X_K(F_\lambda)}(X_{L/K}(\sigma)) \geq \psi_{X_K(F_\lambda)/X_K(L)}(v).$$

Comme $X_{L/K}$ identifie $\text{Gal}(E_\lambda^{(1)}/E_\lambda^{(1)} \cap L)$ et $\text{Gal}(X_K(F_\lambda)/X_K(L))$ avec leurs filtrations de ramification, on en déduit que $\sigma \in H^v \Leftrightarrow \forall \lambda \in \Lambda$, $i_{E_\lambda^{(1)}}(\sigma) \geq \psi_{E_\lambda^{(1)}/E_\lambda^{(1)} \cap L}(v)$. Comme les $E_\lambda^{(1)}$ contiennent E_0 , on a $v = \psi_{E_\lambda^{(1)} \cap L/K}(u)$, et on en déduit que $\sigma \in H^v \Leftrightarrow i_{E_\lambda^{(1)}}(\sigma) \geq \psi_{E_\lambda^{(1)}/K}(u)$. Comme $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda^{(1)} = M$, il en résulte que $\sigma \in H^v \Leftrightarrow \sigma \in G^u$, ce qui prouve la proposition.

3.4. L'ISOMORPHISME $X_K(M) \simeq X_{X_K(L)}(X_{L/K}(M))$.

3.4.1. PROPOSITION. — Soit M une extension algébrique séparable de L . L'extension M/K est APF si et seulement si $X_{L/K}(M)/X_K(L)$ l'est. S'il en est ainsi, $X_K(M)$ s'identifie à $X_{X_K(L)}(X_{L/K}(M))$.

3.4.2. Démonstration.

3.4.2.1. Soit M' une extension galoisienne de K contenant M . Notons $G = \text{Gal}(M'/K)$, $H = \text{Gal}(M'/L)$ et $H' = \text{Gal}(M'/M)$. On sait, d'après la proposition précédente, que si $(H^u)_{u \geq -1}$ est la filtration de ramification de H identifié à $\text{Gal}(X_{L/K}(M')/X_K(L))$, on a pour tout $u \geq -1$: $G^u \cap H = H^{\psi_{L/K}(u)}$. Par suite pour $u \geq -1$:

$$(G : H' G^u) = (G : H G^u)(H : H^{\psi_{L/K}(u)} H').$$

Comme L/K est APF, $(G : H G^u)$ est fini et donc $(G : H' G^u)$ est fini si et seulement si $(H : H^{\psi_{L/K}(u)} H')$ l'est. Par suite M/K est APF si et seulement si $X_{L/K}(M)/X_K(L)$ l'est. Cela prouve la première partie de la proposition.

Supposons désormais que M/K et donc $X_{L/K}(M)/X_K(L)$ sont APF. Soit $\alpha \in X_K(M)$. Pour tout $F \in \mathcal{E}_{M/L}$, posons $\alpha_F = (\alpha_E)_{E \in \mathcal{E}_{F/K}} \in X_K(F)$. Si $F' \in \mathcal{E}_{M/L}$ avec $F \subset F'$, comme les différents F -plongements de F' dans M s'identifient aux différents $X_K(F)$ -plongements de $X_K(F')$ dans $X_{L/K}(M)$, on a $N_{X_K(F')/X_K(F)}(\alpha_{F'}) = \alpha_F$. Par suite les α_F définissent un

élément $j(\alpha)$ de $X_{X_K(L)}(X_{L/K}(M))$. On voit immédiatement que j est une bijection de $X_K(M)$ dans $X_{X_K(L)}(X_{L/K}(M))$. Clairement j est multiplicative et pour tout $\alpha \in X_K(M)$ on a $v_{X_K(M)}(\alpha) = v_{X_{X_K(L)}(X_{L/K}(M))}(j(\alpha))$.

Reste à prouver que j est additive. Comme elle est multiplicative, il suffit de prouver que si $\alpha \in A_{X_K(M)}$ et si $\beta = 1 + \alpha$ on a $j(\beta) = j(1) + j(\alpha)$. Grâce à la remarque 2.3.3.1, cela résulte du lemme suivant :

3.4.2.2. LEMME. — $v_{X_K(F)}(\beta_F - 1 - \alpha_F)$ tend vers $+\infty$ (selon le filtre des sections de $\mathcal{E}_{M/L}$).

3.4.2.3. Démonstration. — Soit $A > 0$. Il s'agit de trouver $F \in \mathcal{E}_{M/L}$ tel que pour $F' \in \mathcal{E}_{M/F}$, on ait $v_{X_K(F')}(\beta_{F'} - 1 - \alpha_{F'}) \geq A$. Soit $E \in \mathcal{E}_{M/K}$ avec $((p-1)i(M/E))/p \geq A$ et montrons que l'on peut prendre $F = EL$. Soit pour cela $F' \in \mathcal{E}_{M/F}$. Comme $i(M/E) > -1$, M/E est totalement ramifiée. Il en est de même de F'/E et donc :

$$v_{X_K(F')}(\beta_{F'} - 1 - \alpha_{F'}) = v_E((\beta_{F'} - 1 - \alpha_{F'})_E).$$

On sait d'après la remarque 2.3.3.1, que :

$$v_E((\beta_{F'} - 1 - \alpha_{F'})_E - \beta_E + 1 + \alpha_E) \geq ((p-1)i(F/E))/p.$$

On sait, d'après la proposition 1.2.3, que $i(F/E) \geq i(M/E)$ et comme d'autre part, $((p-1)i(M/E))/p \geq A$, on en déduit que

$$v_E((\beta_{F'} - 1 - \alpha_{F'})_E - \beta_E + 1 + \alpha_E) \geq A.$$

Il s'agit donc de prouver que $v_E(\beta_E - 1 - \alpha_E) \geq A$. Mais on a de même

$$v_E(\beta_E - 1 - \alpha_E - (\beta - 1 - \alpha)_E) \geq A.$$

Comme $\beta = 1 + \alpha$ on a donc $v_E(\beta_E - 1 - \alpha_E) \geq A$ et cela prouve le lemme.

4. Le corps $R(E)$

4.1. CONSTRUCTION

4.1.1. Si E est un corps valué complet, à corps résiduel parfait de caractéristique p , on pose :

$$R^*(E) = \lim_{\substack{\longleftarrow \\ n \in \mathbb{N}}} E_n^* \quad \text{où } E_n^* = E^*,$$

la flèche de E_{n+1}^* dans E_n^* étant l'élévation à la puissance p -ième, et $R(E) = R^*(E) \cup \{0\}$. Un élément $x \in R(E)$ peut donc être considéré comme une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E , vérifiant $x_{n+1}^p = x_n$. Si v est la valuation de E , on pose $v_R(x) = v(x_0)$ pour tout $x \in R(E)$.

On suppose de plus donné un système de représentants f du corps résiduel k_E de E dans l'anneau de valuation A_E de E vérifiant : $f(xy) = f(x)f(y)$ et $f(x+y) = f(x) + f(y) \pmod{p}$. Si $\beta \in k_E$, on pose $f_R(\beta) = (f(\beta^{p^{-n}}))_{n \in \mathbb{N}} \in R(E)$.

4.1.2. THÉORÈME. — (i) Si x et $y \in \mathbf{R}(E)$, pour tout $n \in \mathbf{N}$ la suite des $(x_{n+m} + y_{n+m})^m$ converge lorsque m tend vers $+\infty$ vers un élément $z_n \in E$, et $(z_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{R}(E)$.

(ii) Si, pour x et $y \in \mathbf{R}(E)$, on définit $x + y$ par :

$(x + y)_n = \lim_{m \rightarrow +\infty} (x_{n+m} + y_{n+m})^m$ et xy par $(xy)_n = x_n y_n$, on munit $\mathbf{R}(E)$ d'une structure de corps parfait de caractéristique p . L'application v_R est une valuation pour laquelle il est complet.

(iii) L'application f_R est un plongement de k_E dans l'anneau de valuation $A_{\mathbf{R}(E)}$ de $\mathbf{R}(E)$.

Si $k_{\mathbf{R}(E)}$ est le corps résiduel de $\mathbf{R}(E)$, l'application $k_E \xrightarrow{f_R} A_{\mathbf{R}(E)} \rightarrow k_{\mathbf{R}(E)}$ est un isomorphisme de k_E sur $k_{\mathbf{R}(E)}$.

4.1.3. Remarques

4.1.3.1. Nous avons affirmé imprudemment dans [5] que pour E corps valué complet quelconque, le corps résiduel de $\mathbf{R}(E)$ s'identifie toujours à celui de E . Nous ne voyons pas de contre-exemple à cette assertion; cependant la démonstration ci-dessous ne marche pas dans le cas général. Lorsque E est le complété d'une extension algébrique L d'un corps local K , le corps résiduel k_E de E s'identifie à celui de l'extension maximale non ramifiée K_0 de K contenu dans L et si \tilde{K}_0 est le complété de K_0 , le système de représentants multiplicatifs de $k_{\tilde{K}_0} = k_{K_0} = k_E$ ([7], prop. 8, p. 44) vérifie les conditions du 4.1.1; les corps résiduels k_E et $k_{\mathbf{R}(E)}$ s'identifient donc dans ce cas.

4.1.3.2. Lorsque E est un corps local, v_R est triviale et $\mathbf{R}(E)$ s'identifie au corps résiduel de E : cela résulte immédiatement de la caractérisation des représentants multiplicatifs comme puissance p^n -ième pour tout $n \in \mathbf{N}$ ([7], (ii) de la prop. 8, p. 44).

4.1.3.3. Si E est de caractéristique p , l'application $x \mapsto x_0$ identifie $\mathbf{R}(E)$ à un sous-corps fermé de E : c'est le plus grand sous-corps parfait de E .

4.1.3.4. Supposons E de caractéristique 0. Soit $W(A_{\mathbf{R}(E)})$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $A_{\mathbf{R}(E)}$. Soit θ_E l'application de $W(A_{\mathbf{R}(E)})$ dans A_E qui à $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in W(A_{\mathbf{R}(E)})$ associe $\sum_{n \in \mathbf{N}} p^n x_{(n)}$. En reprenant la démonstration du théorème 5, p. 50 de [7], on voit facilement que θ_E est un homomorphisme d'anneaux. Esquissons par exemple la démonstration de l'additivité de θ_E . Soit x, y et $z = x + y \in W(A_{\mathbf{R}(E)})$. Soit $(\varphi_0, \dots, \varphi_n, \dots)$ les éléments de $Z[X_0, \dots, X_n, \dots; Y_0, \dots, Y_n, \dots]$ donnant l'addition des vecteurs de Witt (pour tout entier $m \geq 0$, on a donc :

$$\sum_{n'=0}^{n'=m} p^{n'} \varphi_{n'}^{p^{m-n'}} = \sum_{n'=0}^{n'=m} p^{n'} X_{n'}^{p^{m-n'}} + \sum_{n'=0}^{n'=m} p^{n'} Y_{n'}^{p^{m-n'}}$$

([7], th. 5, p. 50)).

On a :

$$\theta_E(x) + \theta_E(y) \equiv \sum_{n'=0}^{n'=m} p^{n'} x_{(n')m}^{p^{m-n'}} + \sum_{n'=0}^{n'=m} p^{n'} y_{(n')m}^{p^{m-n'}} \pmod{p^{m+1}},$$

donc :

$$\theta_E(x) + \theta_E(y) \equiv \sum_{n'=0}^{n'=m} p^{n'} \Phi_{n'}^{p^{m-n'}}(x_{(0)m}, \dots, x_{(n)m}, \dots; y_{(0)m}, \dots, y_{(n)m}, \dots) \pmod{p^{m+1}},$$

$$\theta_E(z) \equiv \sum_{n'=0}^{n'=m} p^{n'} (\Phi_{n'}(x_{(0)}, \dots, x_{(n)}, \dots; y_{(0)}, \dots, y_{(n)}, \dots))_{n'} \pmod{p^{m+1}}.$$

Comme (cf. 4.1.4.2) l'application qui à $t \in A_{R(E)}$ associe l'image de t_m dans A_E/pA_E est un homomorphisme d'anneaux, on a :

$$\begin{aligned} \Phi_{n'}(x_{(0)m}, \dots, x_{(n)m}, \dots; y_{(0)m}, \dots, y_{(n)m}, \dots) \\ \equiv \Phi_{n'}(x_{(0)}, \dots, x_{(n)}, \dots; y_{(0)}, \dots, y_{(n)}, \dots)_m \pmod{p}, \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \Phi_{n'}^{p^{m-n'}}(x_{(0)m}, \dots, x_{(n)m}, \dots; y_{(0)m}, \dots, y_{(n)m}, \dots) \\ \equiv \Phi_{n'}(x_{(0)}, \dots, x_{(n)}, \dots; y_{(0)}, \dots, y_{(n)}, \dots)_{n'} \pmod{p^{m-n'+1}} \end{aligned}$$

d'où finalement :

$$\theta_E(x) + \theta_E(y) \equiv \theta_E(z) \pmod{p^{m+1}}.$$

Comme cela est vrai pour tout m , on a bien $\theta_E(x) + \theta_E(y) = \theta_E(z)$ et cela prouve l'additivité de θ_E .

4.1.4. Démonstration du théorème 4.1.2.

4.1.4.1. Soit γ un réel tel que $0 < \gamma \leq v(p)$. Notons I_γ l'idéal de A_E formé des $x \in A_E$ vérifiant $v(x) \geq \gamma$. On pose $A_\gamma(E) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} (A_E/I_\gamma)_n$ où $(A_E/I_\gamma)_n = A_E/I_\gamma$ et où la flèche de $(A_E/I_\gamma)_{n+1}$ dans $(A_E/I_\gamma)_n$ est l'élévation à la puissance p -ième. Comme celle-ci est un homomorphisme d'anneaux, $A_\gamma(E)$ est naturellement muni d'une structure d'anneau. Comme p est nul dans A_E/I_γ , $A_\gamma(E)$ est de caractéristique p . Comme, si $\alpha = (\bar{\alpha}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A_\gamma(E)$ et si $\beta = \alpha^p = (\bar{\beta}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a $\bar{\beta}_n = \bar{\alpha}_{n+1}$, on voit immédiatement que $A_\gamma(E)$ est parfait (i.e. l'élévation à la puissance p -ième est bijective dans $A_\gamma(E)$).

On définit sur $A_\gamma(E)$ une valuation v_γ . Pour cela, si $\alpha = (\bar{\alpha}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A_\gamma(E)$, $\alpha \neq 0$, on choisit pour chaque n un relèvement $\hat{\alpha}_n$ de $\bar{\alpha}_n$ et on pose $v_\gamma(\alpha) = p^n v(\hat{\alpha}_n)$ pour n suffisamment grand (on vérifie immédiatement que pour n suffisamment grand, $p^n v(\hat{\alpha}_n)$ ne dépend ni du choix de n ni de celui de $\hat{\alpha}_n$). Si $\alpha = 0$, on pose $v_\gamma(\alpha) = +\infty$.

On voit facilement que v_γ induit la topologie limite projective, les $(A_E/I_\gamma)_n$ étant munis de la topologie discrète; il en résulte que $A_\gamma(E)$ est séparé et complet.

4.1.4.2. Si $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A_{\mathbb{R}(E)}$ (i. e. on a $v(x_0) \geq 0$) on pose $q_\gamma(x) = (\bar{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A_\gamma(E)$, où \bar{x}_n est l'image de x_n dans $(A_E/I_\gamma)_n$.

LEMME. — L'application q_γ est bijective. Soit r_γ son application réciproque. Alors, si $\alpha = (\bar{\alpha}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A_\gamma(E)$ et si $\hat{\alpha}_n$ est pour tout n un relèvement de $\bar{\alpha}_n$ dans A_E , on a

$$r_\gamma(\alpha)_n = \lim_{m \rightarrow +\infty} \hat{\alpha}_{n+m}^{p^m}.$$

4.1.4.3. *Démonstration.* — Soit $\alpha = (\bar{\alpha}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A_\gamma(E)$. Soit pour chaque n , $\hat{\alpha}_n$ un relèvement de $\bar{\alpha}_n$ dans A_E . Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $v(\hat{\alpha}_{n+m+1}^p - \hat{\alpha}_{n+m}) \geq \gamma$; on en déduit facilement que $v(\hat{\alpha}_{n+m+1}^{p^{m+1}} - \hat{\alpha}_{n+m}^{p^m}) \geq (m+1)\gamma$. La suite des $\hat{\alpha}_{n+m}^{p^m}$ converge donc dans A_E lorsque m tend vers $+\infty$. Si $(\hat{\alpha}'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une autre suite de représentants des $\bar{\alpha}_n$, on a pour tout m , $v(\hat{\alpha}_{n+m} - \hat{\alpha}'_{n+m}) \geq \gamma$, d'où $v(\hat{\alpha}_{n+m}^{p^m} - \hat{\alpha}'_{n+m}^{p^m}) \geq (m+1)\gamma$. Par suite $\lim_{m \rightarrow +\infty} \hat{\alpha}_{n+m}^{p^m} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \hat{\alpha}'_{n+m}^{p^m}$ et

$x_n = \lim_{m \rightarrow +\infty} \hat{\alpha}_{n+m}^{p^m}$ ne dépend pas du choix des $\hat{\alpha}_n$. Clairement $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A_{\mathbb{R}(E)}$ et

l'application $\alpha \mapsto x$ est une application réciproque de q_γ . Par suite, q_γ est bijective. Si r_γ est son application réciproque, on a bien $r_\gamma(\alpha)_n = \lim_{m \rightarrow +\infty} \hat{\alpha}_{n+m}^{p^m}$ et le lemme est démontré.

4.1.4.4. Montrons le (i). Soit $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}(E)$. Il s'agit tout d'abord de prouver que pour tout n la suite des $(x_{n+m} + y_{n+m})^{p^m}$ converge lorsque m tend vers $+\infty$. Si x et y sont nuls, c'est clair. Sinon, supposons par exemple $y \neq 0$ et $v(y) \leq v(x)$. On a :

$$r_\gamma(1 + q_\gamma(xy^{-1}))_n = \lim_{m \rightarrow +\infty} (1 + x_{n+m} y_{n+m}^{-1})^{p^m}.$$

Comme $y_n(1 + x_{n+m} y_{n+m}^{-1})^{p^m} = (x_{n+m} + y_{n+m})^{p^m}$, on voit que la suite des $(x_{n+m} + y_{n+m})^{p^m}$ converge lorsque m tend vers $+\infty$. Si $z_n = \lim_{m \rightarrow +\infty} (x_{n+m} + y_{n+m})^{p^m}$, clairement $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}(E)$.

Cela prouve le (i).

Pour le (ii), on vérifie immédiatement que $\mathbb{R}(E)$ est un corps, que $v_{\mathbb{R}}$ est une valuation et que q_γ est un isomorphisme d'anneaux valués de $A_{\mathbb{R}(E)}$ sur $A_\gamma(E)$. Comme $A_\gamma(E)$ est séparé complet et parfait de caractéristique p , $\mathbb{R}(E)$ l'est.

Prouvons le (iii). Clairement $q_\gamma \circ f_{\mathbb{R}}$ est un plongement de k_E dans $A_{\mathbb{R}(E)}$. L'homomorphisme $A_{\mathbb{R}(E)} \rightarrow A_\gamma(E) \rightarrow (A_E/I_\gamma)_0 \rightarrow k_E$ a pour noyau l'idéal maximal de $A_{\mathbb{R}(E)}$ et $f_{\mathbb{R}}$ en est une section; on en déduit immédiatement que l'homomorphisme $k_E \xrightarrow{f_{\mathbb{R}}} A_{\mathbb{R}(E)} \rightarrow k_{\mathbb{R}(E)}$ identifie k_E et $k_{\mathbb{R}(E)}$ et cela achève de prouver le théorème.

4.2. LE PLONGEMENT $\Lambda_{L/K} : X_K(L) \rightarrow \mathbb{R}(\hat{L})$ POUR L/K EXTENSION STRICTEMENT APF INFINIE.
— Dans la fin de cet article, L est une extension strictement APF (cf. 1.2.1) infinie de K . On note \hat{L} le complété de L , K_1 l'extension maximale modérément ramifiée de K contenue dans L et pour tout $n \in \mathbb{N}$, \mathcal{E}_n l'ensemble des $E \in \mathcal{E}_{L/K_1}$ tels que le degré q^E de E/K_1 soit divisible par p^n .

4.2.1. PROPOSITION. — Pour tout $\alpha = (\alpha_E)_{E \in \mathcal{E}_{L/K}} \in X_K(L)$ et tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(\alpha_E^{p^{-n}q^E})_{E \in \mathcal{E}_n}$ converge (suivant le filtre des sections de \mathcal{E}_n) vers un élément $x_n \in \hat{L}$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in R(\hat{L})$. Si on pose $\Lambda_{L/K}(\alpha) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'application $\Lambda_{L/K} : X_K(L) \rightarrow R(\hat{L})$ est un plongement continu.

4.2.2. Démonstration.

4.2.2.1. LEMME. — Soit E un corps local, E' une p -extension séparable finie et totalement ramifiée de E et $N_{E'/E}$ la norme de E' à E .

Alors, pour tout $\alpha \in E'$, on a $v_E(N_{E'/E}(\alpha)/\alpha^{[E':E]} - 1) \geq c(E'/E)$ (pour la définition de $c(E'/E)$ voir le 1.2.1).

4.2.2.2. Démonstration. — Soit $E = E_0 = E_1 \subset \dots \subset E_r = E'$ la tour des extensions élémentaires (cf. 1.4) et posons $i_n = i(E_{n+1}/E_n)$ pour $1 \leq n \leq r-1$. Montrons le lemme par récurrence sur r .

Supposons tout d'abord $r=2$ (i.e. que E'/E est élémentaire). Soit $\alpha \in E'$. On a $N_{E'/E}(\alpha)/\alpha^{[E':E]} = \prod (1 + (\sigma(\alpha) - \alpha)/\alpha)$, les σ décrivant les différents E -plongements de E' dans une extension galoisienne de E contenant E' . Comme $v_E(\sigma(\alpha) - \alpha)/\alpha \geq i(E'/E) = i_1$ on voit que $v_E((N_{E'/E}(\alpha)/\alpha^{[E':E]} - 1) \geq i_1/[E' : E]$ ce qui prouve le lemme pour $r=2$.

Supposons maintenant $r \geq 3$. Soit $\alpha \in E'$. D'après l'hypothèse de récurrence :

$$(I) \quad v_{E_2} \left(\frac{N_{E'/E_2}(\alpha)}{\alpha^{[E':E_2]}} - 1 \right) \geq \inf_{2 \leq n \leq r-1} \frac{i_n}{[E_{n+1} : E_2]},$$

$$(II) \quad v_E \left(\frac{N_{E'/E}(\alpha)}{N_{E'/E_2}(\alpha)^{[E_2:E]}} - 1 \right) \geq \frac{i_1}{[E_2 : E]}.$$

De (I) on tire immédiatement $v_E((N_{E'/E_2}(\alpha)/\alpha^{[E':E_2]} - 1) \geq c(E'/E)$ d'où

$$v_E((N_{E'/E_2}(\alpha)^{[E_2:E]}/\alpha^{[E':E]} - 1) \geq c(E'/E).$$

Avec (II), on voit alors que $v_E((N_{E'/E}(\alpha)/\alpha^{[E':E]} - 1) \geq c(E'/E)$ ce qui prouve le lemme.

4.2.2.3. Soit $\alpha = (\alpha_E)_{E \in \mathcal{E}_{L/K}} \in X_K(L)$. Montrons que la suite des $\alpha_E^{q^E}$ converge. Soit A un réel > 0 ; il s'agit de prouver qu'il existe $E \in \mathcal{E}_{L/K_1}$ tel que, pour E' et $E'' \in \mathcal{E}_{L/E}$ avec $E' \subset E''$, on ait $v_{K_1}(\alpha_{E''}^{q^{E''}} - \alpha_{E'}^{q^{E'}}) \geq A$.

Soit $(K_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ la tour des extensions élémentaires de l'extension L/K (cf. n° 1.4). Si la caractéristique de K est p , soit m_0 un entier suffisamment grand pour que $[K_{m_0} : K_1] \geq (A - v_{K_1}(\alpha_{K_1}))/c(L/K_1)$. Si la caractéristique de K est 0, soit l_0 un entier tel que $v_{K_1}(p)/(p-1) + l_0 v_{K_1}(p) \geq A - v_{K_1}(\alpha_1)$ et soit m_0 un entier tel que $[K_{m_0} : K_1] \geq p^{l_0}$ et $[K_{m_0} : K_1] \geq p^{l_0} v_{K_1}(p)/(p-1) c(L/K_1)$.

Montrons que l'on peut prendre $E = K_{m_0}$. Soit pour cela E' et $E'' \in \mathcal{E}_{L/K_{m_0}}$ avec $E' \subset E''$. Le lemme 4.2.2.1 donne :

$$v_{E'} \left(\frac{N_{E''/E'}(\alpha_{E''})}{\alpha_{E''}^{[E'' : E']}} - 1 \right) \geq c(E''/E'),$$

$$\text{i. e. } v_{K_1} \left(\frac{\alpha_{E'}}{\alpha_{E''}^{q_{E''}/q_{E'}}} - 1 \right) \geq \frac{c(E''/E')}{q^{E'}}.$$

D'après la proposition 1.2.3 on a : $c(E''/E') \geq c(L/E') \geq c(L/K_{m_0})$. Comme :

$$c(L/K_1) = \inf_{m \geq 1} \frac{i(K_{m+1}/K_m)}{[K_{m+1} : K_1]} \quad \text{et} \quad c(L/K_{m_0}) = \inf_{m \geq m_0} \frac{i(K_{m+1}/K_m)}{[K_{m+1} : K_{m_0}]},$$

on a $c(L/K_{m_0}) \geq c(L/K_1) \times [K_{m_0} : K_1]$ d'où finalement :

$$(I) \quad v_{K_1} \left(\frac{\alpha_{E'}}{\alpha_{E''}^{q_{E''}/q_{E'}}} - 1 \right) \geq \frac{c(L/K_1)[K_{m_0} : K_1]}{q^{E'}}.$$

Si la caractéristique de K est 0, comme $[K_{m_0} : K_1] \geq p^{l_0} v_{K_1}(p)/(p-1) c(L/K_1)$, (I) entraîne :

$$v_{K_1} \left(\frac{\alpha_{E'}}{\alpha_{E''}^{q_{E''}/q_{E'}}} - 1 \right) \geq \frac{p^{l_0} v_{K_1}(p)}{q^{E'}(p-1)}.$$

Comme $[K_{m_0} : K_1] \geq p^{l_0}$, on a $q^{E'} \geq p^{l_0}$ et on en déduit alors facilement ([8], prop. 6, n° 1.7) tout d'abord que :

$$v_{K_1} \left(\frac{\alpha_{E'}^{q_{E'}^{p-l_0}}}{\alpha_{E''}^{q_{E''}^{p-l_0}}} - 1 \right) \geq \frac{v_{K_1}(p)}{(p-1)}$$

et finalement que :

$$v_{K_1} \left(\frac{\alpha_{E'}^{E'}}{\alpha_{E''}^{E''}} - 1 \right) \geq \frac{v_{K_1}(p)}{(p-1)} + l_0 v_{K_1}(p).$$

Comme $(v_{K_1}(p)/(p-1)) + v_{K_1}(p)l_0 \geq A - v_{K_1}(\alpha_{K_1})$, il en résulte que :

$$v_{K_1} \left(\frac{\alpha_{E'}^{q_{E'}^{E'}}}{\alpha_{E''}^{q_{E''}^{E''}}} - 1 \right) \geq A - v_{K_1}(\alpha_{K_1}) \quad \text{d'où} \quad v_{K_1}(\alpha_{E'}^{q_{E'}^{E'}} - \alpha_{E''}^{q_{E''}^{E''}}) \geq A.$$

Si la caractéristique de K est p , on déduit de (I) que :

$$v_{K_1} \left(\frac{\alpha_{E'}^{E'}}{\alpha_{E''}^{E''}} - 1 \right) \geq c(L/K_1)[K_{m_0} : K_1].$$

Comme $[K_{m_0} : K_1] \geq (A - v_{K_1}(\alpha_{K_1}))/c(L/K_1)$ on en déduit que :

$$v_{K_1} \left(\frac{\alpha_{E'}^{E'}}{\alpha_{E''}^{E''}} - 1 \right) \geq A - v_{K_1}(\alpha_{K_1}) \quad \text{et} \quad v_{K_1}(\alpha_{E'}^{E'} - \alpha_{E''}^{E''}) \geq A.$$

La suite des α_E^q converge donc. Remplaçant K_1 par des extensions convenables de K_1 , on voit qu'il en est de même des suites $(\alpha_E^{qE} p^{-n})_{E \in \mathcal{E}_n}$. Si $x_n = \lim_{E \in \mathcal{E}_n} \alpha_E^{qE} p^{-n}$, on a clairement $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbf{R}(\hat{L})$. Si on pose $\Lambda_{L/K}(\alpha) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, l'application $\Lambda_{L/K} : X_K(L) \rightarrow \mathbf{R}(\hat{L})$ est multiplicative; elle est continue puisque, si $v_{\mathbf{R}(\hat{L})}$ est la valuation de $\mathbf{R}(\hat{L})$ provenant de v_{K_1} , on a $v_{X_K(L)}(\alpha) = v_{\mathbf{R}(\hat{L})}(\Lambda_{L/K}(\alpha))$ pour tout $\alpha \in X_K(L)$.

Reste à prouver que $\Lambda_{L/K}$ est additive. Comme $\Lambda_{L/K}$ est multiplicative, il suffit de prouver que pour $\alpha \in A_{X_K(L)}$, on a $\Lambda_{L/K}(1 + \alpha) = 1 + \Lambda_{L/K}(\alpha)$, i. e. pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\Lambda_{L/K}(1 + \alpha)_n = \lim_{m \rightarrow +\infty} (1 + \Lambda_{L/K}(\alpha)_{n+m})^{p^m}.$$

Soit donc $\alpha \in A_{X_K(L)}$, $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$. Comme :

$$\Lambda_{L/K}(1 + \alpha)_{n+m} = \lim_{E \in \mathcal{E}_{L/K_{n+m}}} (1 + \alpha_E^{qE} p^{-(n+m)}) \quad \text{et} \quad \Lambda_{L/K}(\alpha)_{n+m} = \lim_{E \in \mathcal{E}_{L/K_{n+m}}} \alpha_E^{qE} p^{-(n+m)},$$

il existe $r \geq n + m + 1$ tel que :

$$(II) \quad \begin{cases} v_{K_1}(\Lambda_{K/L}(1 + \alpha)_{n+m} - (1 + \alpha)_{K_r}^{q_{K_r} \times p^{-(n+m)}}) \geq \frac{(p-1)c(L/K_1)}{p}, \\ v_{K_1}(\Lambda_{K/L}(\alpha)_{n+m} - \alpha_{K_r}^{q_{K_r} \times p^{-(n+m)}}) \geq \frac{(p-1)c(L/K_1)}{p}. \end{cases}$$

On sait d'après la remarque 2.3.3.1 que :

$$v_{K_r}(\alpha_{K_r} + 1 - (1 + \alpha)_{K_r}) \geq (p-1) \times \frac{i(K_{r+1}/K_r)}{p}.$$

Donc :

$$v_{K_1}(\alpha_{K_r} + 1 - (1 + \alpha)_{K_r}) \geq \frac{(p-1)i(K_{r+1}/K_r)}{p[K_{r+1} : K_1]}$$

et donc :

$$v_{K_1}(\alpha_{K_r} + 1 - (1 + \alpha)_{K_r}) \geq \frac{(p-1)c(L/K_1)}{p},$$

d'où facilement que :

$$v_{K_1}(\Lambda_{L/K}(1 + \alpha)_n - (1 + \Lambda_{L/K}(\alpha)_{n+m})^{p^m}) \geq (m+1) \times \inf\left(\frac{(p-1)c(L/K_1)}{p}, v_{K_1}(p)\right).$$

Par suite $\Lambda_{L/K}(1 + \alpha)_n = \lim_{m \rightarrow +\infty} (1 + \Lambda_{L/K}(\alpha)_{n+m})^{p^m}$ ce qui prouve l'additivité de $\Lambda_{L/K}$ et achève de montrer la proposition.

4.3. LE CORPS $R(\widehat{M})$ POUR M EXTENSION ALGÈBRE SEPARABLE D'UNE EXTENSION STRICTEMENT APF INFINIE.

4.3.1. Soit M une extension algébrique séparable de L et \widehat{M} son complété. Si $L' \in \mathcal{E}_{M/L}$, notons K'_1 l'extension maximale modérément ramifiée de K contenue dans L' et $q^{L'}$ le degré de $L'/K'_1 L$ (c'est donc une puissance de p). On vérifie aisément que si L' et $L'' \in \mathcal{E}_{M/L}$ avec $L' \subset L''$, on a $\Lambda_{L''/K}(\alpha)^{1/q^{L''}} = \Lambda_{L'/K}(\alpha)^{1/q^{L'}}$ pour tout $\alpha \in X_K(L')$ [on considère, grâce au 3.1, $X_K(L')$ comme un sous-corps de $X_K(L'')$].

Pour $\alpha \in X_K(L')$ posons alors $\Lambda_{L'/L/K}(\alpha) = \Lambda_{L'/K}(\alpha)^{1/q^{L'}}$. Les $\Lambda_{L'/L/K}$, pour $L' \in \mathcal{E}_{M/L}$, définissent par passage à la limite inductive un plongement de $X_{L/K}(M)$ dans $R(\widehat{M})$. Ce plongement se prolonge de manière unique en un plongement continu du complété de la clôture radicielle $\widehat{X_{L/K}(M)}_r$ dans $R(\widehat{M})$; on note encore $\Lambda_{M/L/K}$ ce prolongement.

4.3.2. THÉORÈME. — Notons $A_{\widehat{X}}$ l'anneau de valuation de $\widehat{X_{L/K}(M)}_r$. Alors l'homomorphisme composé $A_{\widehat{X}} \xrightarrow{\Lambda_{M/L/K}} A_{R(\widehat{M})} \rightarrow A_{\widehat{M}}/p A_{\widehat{M}} = A_M/p A_M$ est surjectif (la flèche $A_{R(\widehat{M})} \rightarrow A_{\widehat{M}}/p A_{\widehat{M}}$ désigne l'homomorphisme qui à $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A_{R(\widehat{M})}$ associe l'image de x_0 dans $A_{\widehat{M}}/p A_{\widehat{M}}$).

4.3.3. Démonstration

4.3.3.1. Soit $L' \in \mathcal{E}_{M/L}$. Notons K'_1 l'extension maximale modérément ramifiée de K contenue dans L' . Prolongeons $\Lambda_{L'/K}$ au complété de la clôture radicielle $\widehat{X_K(L')}_r$ de $X_K(L')$ et notons encore $\Lambda_{L'/K}$ le plongement ainsi obtenu. Posons

$$\gamma = \inf(v_{K_1}(p), (p-1)c(L'/K'_1)/p)$$

et notons $I_\gamma = \{x \in A_{L'}, v_{K_1}(x) \geq \gamma\}$. Montrons tout d'abord que l'homomorphisme composé $A_{\widehat{X_K(L')}_r} \xrightarrow{\Lambda_{L'/K}} A_{R(L')} \rightarrow A_{L'}/I_\gamma$ est surjectif.

Soit donc $t \in A_{L'}$. Soit $t' \in A_{L'}$ tel que :

$$(I) \quad v_{K_1}(t - t') \geq \gamma.$$

Si $(K'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la tour des extensions élémentaires de L'/K notons n_0 un entier tel que $t' \in K'_{n_0}$. On sait par la remarque 2.3.3.1 qu'il existe $\alpha \in A_{X_K(L)}$ tel que :

$$v_{K_1}(t' - \alpha_{K_{n_0}}) \geq \frac{(p-1)i(K'_{n_0+1}/K'_{n_0})}{p[K'_{n_0} : K'_1]}.$$

On a donc :

$$(II) \quad v_{K_1}(t' - \alpha_{K_{n_0}}) \geq \gamma.$$

Posons $x = \Lambda_{L'/K}(\alpha^{[K'_{n_0} : K'_1]^{-1}})$. Pour $n \geq n_0$, on a d'après le lemme 4.2.2.1 :

$$v_{K_1} \left(\frac{\alpha_{K'_{n+1}}^{[K'_{n+1} : K'_n]} - 1}{\alpha_{K'_n}} \right) \geq \frac{i(K'_{n+1}/K'_n)}{[K'_{n+1} : K'_n]}$$

et donc :

$$v_{K'_1} \left(\frac{\alpha_{K'_{n+1}}^{[K'_{n+1}:K'_1]}}{\alpha_{K'_n}} - 1 \right) \geq c(L'/K'_1).$$

Comme de plus $x_0 = \lim_{\substack{n \geq n_0 \\ n \rightarrow +\infty}} \alpha_{K'_n}^{[K'_n:K'_{n_0}]}$, on voit facilement que $v_{K'_1}(x_0 - \alpha_{K'_{n_0}}) \geq \gamma$.

Avec (I) et (II), on en déduit que $v_{K'_1}(t - x_0) \geq \gamma$ et les images de t et de $x = \Lambda_{L'/K}(\alpha_{K'_{n_0}}^{[K'_{n_0}:K'_1]^{-1}})$ dans $A_{L'}/I_\gamma$ coïncident. L'homomorphisme

$$A_{\widehat{X_K(L)'}} \xrightarrow{\Lambda_{L'/K}} A_{R(L')} \rightarrow A_{L'}/I_\gamma$$

est donc bien surjectif.

4.3.3.2. Déduisons-en que l'homomorphisme :

$$A_{\widehat{X_K(L)'}} \xrightarrow{\Lambda_{L'/K}} A_{R(L')} \rightarrow A_{L'}/p A_{L'}$$

est lui aussi surjectif. Soit $t \in A_{L'}$, soit $\beta \in \widehat{X_K(L)'}_r$ avec $0 < v_{X_K(L')}(\beta) \leq \gamma$ (un tel β existe puisque $v_{X_K(L')}(\widehat{X_K(L)'}_r) = \mathbf{Z}[1/p]$). Comme $v_{X_K(L')}(\beta) = v_{K'_1}(\Lambda_{L'/K}(\beta)_0)$, on a aussi $0 < v_{K'_1}(\Lambda_{L'/K}(\beta)_0) \leq \gamma$. Puisque, d'après le numéro précédent, l'homomorphisme $A_{\widehat{X_K(L)'}} \rightarrow A_{R(L')} \rightarrow A_{L'}/I_\gamma$ est surjectif, on a par récurrence une suite $(\delta_{(l)})_{0 \leq l \leq r}$ d'éléments de $A_{\widehat{X_K(L)'}}$, telle que :

$$v_{K'_1} \left(t - \sum_{l=0}^{l=r} \Lambda_{L'/K}(\beta)_0^l \Lambda_{L'/K}(\delta_{(l)})_0 \right) \geq \gamma + r v_{X_K(L')}(\beta),$$

et donc, d'après les propriétés d'additivité de $\Lambda_{L'/K}$:

$$v_{K'_1} \left(t - \Lambda_{L'/K} \left(\sum_{l=0}^{l=r} \beta^l \delta_{(l)} \right)_0 \right) \geq \inf(\gamma + r v_{X_K(L')}(\beta), v_{K'_1}(p)).$$

Prenant r tel que $\gamma + r v_{X_K(L')}(\beta) \geq v_{K'_1}(p)$, on a :

$$v_{K'_1} \left(t - \Lambda_{L'/K} \left(\sum_{l=0}^{l=r} \beta^l \delta_{(l)} \right)_0 \right) \geq v_{K'_1}(p).$$

Il en résulte que l'homomorphisme $A_{\widehat{X_K(L)'}} \xrightarrow{\Lambda_{L'/K}} A_{R(L')} \rightarrow A_{L'}/p A_{L'}$ est surjectif.

4.3.3.3. Il en résulte immédiatement que les homomorphismes :

$$A_{\widehat{X_K(L)'}} \xrightarrow{\Lambda_{M/L/K}} A_{R(L')} \rightarrow A_{L'}/p A_{L'}$$

sont surjectifs. Comme $\varinjlim_{L' \in \mathcal{E}_{M/L}} A_{L'}/p A_{L'} = A_{\widehat{M}}/p A_{\widehat{M}}$, on en déduit que l'homomorphisme :

$$A_{\widehat{X}_L} \xrightarrow{\Lambda_{M/L/K}} A_{R(\widehat{M})} \rightarrow A_{\widehat{M}}/p A_{\widehat{M}}$$

est surjectif. Le théorème est démontré.

4.3.4. COROLLAIRE. — *Le plongement $\Lambda_{M/L/K} : \widehat{X_{L/K}(M)}_r \rightarrow R(\widehat{M})$ est un isomorphisme. Si K est de caractéristique p , $R(\widehat{M}) = \widehat{M}$ (autrement dit \widehat{M} est parfait). Si K est de caractéristique 0, l'homomorphisme $W(A_{R(\widehat{M})}) \rightarrow A_{\widehat{M}}$ (cf. 4.1.3.4) est surjectif.*

4.3.5. *Démonstration.* — Comme on a $A_{R(\widehat{M})} = \varprojlim_{\leftarrow} A_{\widehat{M}}/p A_{\widehat{M}}$, il résulte immédiatement de la proposition précédente que $\Lambda_{M/L/K}$ est un isomorphisme. Les autres assertions sont claires.

4.3.6. *Remarque.* — Supposons de plus M/K strictement APF. On montre alors facilement que $X_{L/K}(M)/X_K(L)$ l'est. On a alors le plongement composé :

$$\begin{aligned} X_K(M) &= X_{X_K(L)}(X_{L/K}(M)) \xrightarrow{\Lambda_{X_K(M)/X_K(L)}} R(\widehat{X_{L/K}(M)}) \\ &= \widehat{X_{L/K}(M)} \xrightarrow{\Lambda_{M/L/K}} R(\widehat{M}), \end{aligned}$$

où l'isomorphisme $X_K(M) = X_{X_K(L)}(X_{L/K}(M))$ est celui de la proposition 3.4.1 et l'isomorphisme $R(\widehat{X_{L/K}(M)}) = \widehat{X_{L/K}(M)}$ résulte du fait que $X_{L/K}(M)$ est parfait puisque $X_{L/K}(M)$ est une extension strictement A.P.F. d'un corps local de caractéristique p . On voit facilement que ce plongement composé coïncide avec $\Lambda_{M/K}$.

4.3.7. PROPOSITION. — *Supposons K de caractéristique 0. Notons I_M le noyau de l'homomorphisme $W(A_{R(\widehat{M})}) \rightarrow A_{\widehat{M}}$. Alors I_M est un idéal principal. Plus précisément, I_M contient des éléments $w = (x_{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $v_{K_1}(x_{(0)}, 0) = v_{K_1}(p)$ et tout élément $w \in I_M$ possédant cette propriété engendre I_M .*

4.3.8. *Démonstration.* — Montrons tout d'abord l'existence de $w = (x_{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \in I_M$ vérifiant $v_{K_1}(x_{(0)}, 0) = v_{K_1}(p)$. Il résulte facilement du corollaire 4.3.4 qui si v est la valuation de $R(\widehat{M})$ associée à la valuation v_{K_1} de \widehat{M} , on a $v(R(\widehat{M})^*) = v_K(M^*)$. Il existe alors $x_{(0)} \in A_{R(\widehat{M})}$ avec $v_{K_1}(x_{(0)}, 0) = v_{K_1}(p)$. Utilisant la surjectivité de l'application $A_{R(\widehat{M})} \rightarrow A_{\widehat{M}}/p A_{\widehat{M}}$, on construit par récurrence une suite $(x_{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $A_{R(\widehat{M})}$ telle que $\sum_{n=0}^{n=r} x_{(n)} \cdot n p^n \equiv 0 \pmod{p^{r+1}}$. Clairement $w = (x_{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \in I_M$ et cela prouve l'existence de tels w .

Soit w un tel élément et prouvons que w engendre I_M . Soit $w' = (x'_{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \in I_M$. On a donc $\sum_{n=0}^{+\infty} p^n x'_{(n)} \cdot n = 0$. Par suite $v_{K_1}(x'_{(0)}, 0) \geq v_{K_1}(p) = v_{K_1}(x_{(0)}, 0)$ et il existe $y \in A_{R(\widehat{M})}$ tel que $x'_{(0)} = y x_{(0)}$. Soit $r(y)$ le représentant de Teichmüller de y dans $W(A_{R(\widehat{M})})$. On a

$w' - r(y)w \in pW(A_{R(\tilde{M})}) \cap I_M$. Mais $pW(A_{R(\tilde{M})}) \cap I_M = pI_M$ puisque la multiplication par p est injective dans $A_{\tilde{M}}$. On voit donc que $I_M \subset pI_M + wW(A_{R(\tilde{M})})$. Avec un raisonnement par approximations successives, on en déduit immédiatement que $I_M = wW(A_{R(\tilde{M})})$. Cela achève la démonstration de la proposition.

4.3.9. Remarques.

4.3.9.1. Supposons que M contiennent des racines primitives p^n -ièmes de l'unité pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de $A_{R(\tilde{M})}$ tel que ε_0 soit une racine primitive p -ième de l'unité. Désignons par $r(\varepsilon)$ le représentant de Teichmüller de ε dans $W(A_{R(\tilde{M})})$. Alors $w = \sum_{i=0}^{p-1} r(\varepsilon)^i$ engendre I_M . En effet $w \in I_M$ puisque l'image de w dans $A_{\tilde{M}}$ est $\sum_{i=0}^{p-1} \varepsilon_0^i = 0$. Il suffit donc de vérifier que $v_{K_1}(w_{(0),0}) = v_{K_1}(p)$. On a :

$$w_{(0)} = \sum_{i=0}^{p-1} \varepsilon^i = (\varepsilon - 1)^{p-1},$$

donc :

$$v_{K_1}(w_{(0),0}) = (p-1)v_{K_1}((\varepsilon - 1)_0).$$

On a $(\varepsilon - 1)_0 \equiv \varepsilon_0 - 1 \pmod{p}$, donc $v_{K_1}((\varepsilon - 1)_0) = v_{K_1}(p)/(p-1)$, d'où $v_{K_1}(w_{(0),0}) = v_{K_1}(p)$. Cela prouve que w engendre I_M .

4.3.9.2. La proposition 4.3.7 entraîne immédiatement que $I_M = I_L W(A_{R(\tilde{M})})$. Cela permet de construire un foncteur quasi inverse $Y_{L/K}$ de $X_{L/K}$. Soit X' une extension algébrique séparable de $X_K(L)$ et soit \hat{X}' le complété de la clôture radicielle de X' :

(i) si K est de caractéristique p , L est un sous-corps de \hat{X}' et $Y_{L/K}(X')$ est la plus grande extension algébrique séparable de L contenue dans \hat{X}' ;

(ii) si K est de caractéristique 0, on identifie au moyen de la proposition 4.3.4 le complété \hat{X}' de la clôture radicielle de $X_K(L)$ avec $R(\hat{L})$; I_L s'identifie alors à un idéal de $W(A_{\hat{X}'})$, $W(A_{\hat{X}'})/I_L W(A_{\hat{X}'})$ est un anneau contenant A_L et $Y_{L/K}(X')$ est la plus grande extension algébrique séparable de L contenue dans son corps des fractions.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. F. COLEMAN, *Division values in local fields* (*Invent. Math.*, vol. 53, 1979, p. 91-116).
- [2] J. M. FONTAINE, *Groupes p -divisibles sur les corps locaux* (*Astérisque*, n° 47-48, Soc. Math. Fr., 1977).
- [3] J. M. FONTAINE, *Corps de séries formelles et extensions galoisiennes des corps locaux* (*Séminaire de Théorie des Nombres de Grenoble*, 1971-1972, p. 28-38).
- [4] J. M. FONTAINE et J. P. WINTENBERGER, *Le « corps des normes » de certaines extensions algébriques de corps locaux* (*Comptes rendus*, 288, série A, 1979, p. 367-370).
- [5] J. M. FONTAINE et J. P. WINTENBERGER, *Extensions algébriques et corps des normes des extensions APF des corps locaux* (*Comptes rendus*, 288, série A, 1979, p. 441-444).
- [6] S. SEN, *Ramification in p -adic Lie Extensions* (*Invent. Math.*, vol. 17, 1972, p. 44-50).
- [7] J.-P. SERRE, *Corps locaux*, 2^e éd., Hermann, Paris, 1968.

- [8] J.-P. SERRE, *Sur les corps locaux à corps résiduel algébriquement clos* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, vol. 89, 1961, p. 105-154).
- [9] A. WEIL, *Basic Number Theory, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 144*, 3^e éd., Springer-Verlag, 1974.
- [10] J. P. WINTENBERGER, *Extensions de Lie et groupes d'automorphismes des corps locaux de caractéristique p* (*Comptes rendus*, 288, série A, 1979, p. 477-479).
- [11] J. P. WINTENBERGER, *Ramification dans les extensions de Lie* (à paraître).

(Manuscrit reçu le 4 janvier 1982,
révisé le 9 septembre 1982.)

J.-P. WINTENBERGER
Institut Fourier,
Université de Grenoble-I,
B. P. n° 74,
38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex