ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

CHRISTOPHE BAVARD
PIERRE PANSU

Sur le volume minimal de R^2

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 19, nº 4 (1986), p. 479-490
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1986_4_19_4_479_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4[e] série, t. 19, 1986, p. 479 à 490.

SUR LE VOLUME MINIMAL DE $\mathbb{R}^2$

PAR CHRISTOPHE BAVARD ET PIERRE PANSU

Dans [11], M. Gromov a introduit la notion de volume minimal pour une variété différentiable V, compacte ou non, sans bord. Le *volume minimal* de V, *noté* Min Vol (V), est la borne inférieure des volumes des métriques riemanniennes complètes sur V, de classe C^∞, dont la courbure sectionnelle K est bornée, en valeur absolue, par 1, i. e., $|K| \leqq 1$.

La principale question concernant le volume minimal est de savoir pour quelles variétés il est nul. Cependant, en dimension deux, on connaît sa valeur exacte, dans presque tous les cas, grâce à la formule de Gauss-Bonnet. En effet, si V porte une métrique complète, d'aire finie, à courbure comprise entre -1 et $+1$, on a

$$\operatorname{aire}(V)=\int_V 1 \geqq \left|\int_V K\right| = |2\pi\chi(V)|,$$

d'où $\operatorname{Min}\operatorname{Vol}(V) \geqq |2\pi\chi(V)|$. L'égalité a lieu si V admet une métrique complète, d'aire finie, à courbure constante. C'est le cas pour les surfaces fermées, et lorsque $\chi(V)<0$. On vérifie aisément que $\operatorname{Min}\operatorname{Vol}(V)=0$ lorsque V est le cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$ ou le ruban de Möbius.

Il reste le cas de $\mathbb{R}^2$. Dans [11], appendice 1, M. Gromov montre que, dans $\mathbb{R}^2$ muni d'une métrique complète à courbure $K \leqq 1$, il y a deux disques d'aire totale $\geqq 4\pi$. Si, de plus, $K \geqq -1$, on peut minorer l'aire du complémentaire de ces disques. M. Gromov obtient ainsi la borne

$$\operatorname{Min}\operatorname{Vol}(\mathbb{R}^2) \geqq 4\pi + 0{,}01,$$

que Ch. Bavard a améliorée [2] :

$$\operatorname{Min}\operatorname{Vol}(\mathbb{R}^2) \geqq 4\pi + 0{,}484.$$

M. Gromov suggère la valeur probable $\operatorname{Min}\operatorname{Vol}(\mathbb{R}^2) = 2\pi(1+\sqrt{2})$, aire de la surface de révolution $\mathscr{P}$ (de classe C^1 seulement) construite comme suit : on recolle une calotte sphérique de rayon 1, dont le bord a une longueur égale à $\pi\sqrt{2}$, à une pseudo-sphère, dont le bord a la même longueur.

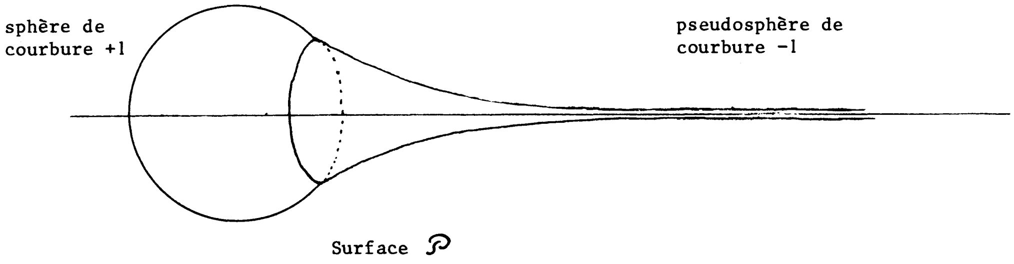

Fig. 1.

L'objet de cet article est de démontrer que Min Vol$(\mathbb{R}^2)=2\pi(1+\sqrt{2})$.

C'est une conséquence immédiate de la propriété *isopérimétrique* suivante :

1. Proposition. — *Soit g une métrique complète sur $\mathbb{R}^2$, dont la courbure est comprise entre -1 et $+1$, d'aire $\leqq 4\pi(1+\sqrt{2}/2)$. Soit c une courbe de Jordan dans $(\mathbb{R}^2, g)$ bordant un domaine borné d'aire $a<2\pi(1+\sqrt{2})$. Soit c_a le parallèle dans la surface de révolution $\mathcal{P}$ qui enferme la même aire a. Alors* longueur $(c)\geqq$ longueur (c_a).

Lorsque $a\leqq 2\pi(1+\sqrt{2}/2)$, cet énoncé se ramène à une comparaison avec la sphère standard, et le résultat, qui ne dépend que de la borne supérieure sur la courbure, est dû à G. Bol [5] et F. Fiala [8]. Notre méthode permet d'exploiter l'hypothèse $\mathrm{K}\geqq -1$ pour traiter les valeurs de $a\geqq 2\pi(1+\sqrt{2}/2)$.

Pour chaque aire $a\leqq$ aire$(\mathbb{R}^2, g)$, définissons le *profil isopérimétrique*

$$\mathrm{I}(a)=\inf\{\text{longueur }(\partial \mathrm{D}) : \mathrm{D} \text{ sous-variété compacte, à bord lisse de } (\mathbb{R}^2, g), \text{ d'aire } a\}.$$

La fonction I est absolument continue, elle admet même une dérivée seconde.

Elle satisfait l'inéquation différentielle suivante (retrouvée indépendamment par S. Gallot) :

$$\frac{d^2}{da^2}\mathrm{I}(a)^2\leqq -2\inf \mathrm{K}\leqq 2.$$

En termes de profil isopérimétrique, la proposition ci-dessus s'énonce

$$\mathrm{I}(a)^2\geqq(2\pi(1+\sqrt{2})-a)^2 \qquad \text{pour} \quad a\geqq 2\pi(1+\sqrt{2}/2).$$

Tenant compte de l'inéquation différentielle et du fait que I^2 s'annule avec une dérivée nulle en $a=$ aire (g), on voit qu'il suffit de montrer que $\mathrm{I}(2\pi(1+\sqrt{2}/2))\geqq\pi\sqrt{2}$. Ceci résulte du théorème de G. Bol et F. Fiala si on sait que, pour $a=2\pi(1+\sqrt{2}/2)$, la borne inférieure $\mathrm{I}(a)$ est atteinte pour une sous-variété D homéomorphe à un disque (remarquer que c'est faux si l'aire totale est trop grande, ou pour des valeurs de a plus petites (§ 11). M. S. Berger et E. Bombieri ont rencontré une difficulté analogue dans [4]. Comme eux, nous la résolvons en utilisant la variation seconde.

Nous obtenons aussi une version « à bord » de l'inégalité

$$\text{Min Vol}(\mathbb{R}^2)\geqq 2\pi(1+\sqrt{2}) :$$

2. Théorème. — *Pour toute métrique riemannienne sur la sphère* S^2, *à courbure comprise entre* -1 *et* $+1$, *l'aire* A *et le rayon d'injectivité i satisfont*

$$i^2+\frac{1}{32}(\mathrm{A}-4\pi)^2\geqq\pi^2.$$

L'égalité a lieu pour une surface de révolution de classe C^1, obtenue en recollant deux calottes sphériques à un « collier » de courbure -1, voisinage tubulaire d'une géodésique fermée de longueur $2i$.

Les auteurs tiennent à remercier Arthur L. Besse pour l'intérêt qu'il a montré pour ce travail, W. Allard qui les initiés à la régularité des courants minimisants, et aussi I. D. Burago et V. A. Zalgaller pour le soin avec lequel ils ont lu une version préliminaire.

A. Profil isopérimétrique d'une variété riemannienne compacte

3. Soit (V, g) une variété riemannienne complète, de dimension n, de classe C^∞.

Définition. — Le *profil isopérimétrique* de (V, g) est une fonction, *notée* I, sur l'intervalle [0, Vol(V, g)]. Pour $v\in[0, \mathrm{Vol}(V, g)]$,

$$\mathrm{I}(v)=\inf\{\text{volume }(\partial \mathrm{D}) : \mathrm{D}\text{ sous-variété à bord lisse, compacte, de dimension } n, \text{ de volume } v\}.$$

Dans cette définition, on peut remplacer les sous-variétés à bord lisse par les *courants à coefficients dans* $\mathbb{Z}/2$, *à support compact*, de W. Fleming (*voir* [9]). Les volumes sont remplacés par des *masses*, notées M.

4. La théorie de la mesure géométrique contient les résultats d'existence et de régularité des courants extrémaux dont nous avons besoin. Nous nous contentons de les citer. Nous utiliserons aussi l'inégalité de P. Lévy [15], E. Heintze-H. Karcher [13] et V. Mazya [16]. Jusqu'à la fin de la partie B, la variété V est *compacte.*

Théorème (H. Federer-W. Fleming, voir [9]). — *Sur l'espace des courants à coefficients dans* $\mathbb{Z}/2$, *la borne inférieure* I(v) *est atteinte.*

En effet, pour les courants de dimension *maximum*, la topologie flat coïncide avec la convergence en masse, donc la fonctionnelle $\mathrm{T}\mapsto \mathrm{M}(\mathrm{T})$ est *continue.* □

Théorème (W. Allard-F. Almgren-H. Federer-J. Simons, etc., voir [1]). — *Soit* T *un courant à coefficients dans* $\mathbb{Z}/2$ *tel que* $\mathrm{M}(\mathrm{T})=v$ *et* $\mathrm{M}(\partial\mathrm{T})=\mathrm{I}(v)$. *Si* $n\leqq 7$, *alors* T *est une sous-variété à bord lisse de* V.

En fait, les courants qui minimisent $\mathrm{M}(\partial\mathrm{T})$ sous la contrainte $\mathrm{M}(\mathrm{T})=v$ ont les mêmes propriétés de régularité que les courants minimisants de codimension 1. En effet, la contrainte joue un rôle de plus en plus faible à mesure que l'on dilate un tel courant en un point, et les cônes tangents sont minimisants. □

5. Pour $h\geqq n-1$, on note B_h la boule dans l'espace hyperbolique de dimension n et de courbure -1, dont le bord a une courbure moyenne (relative à la normale sortante) égale à h. Remarquer que $\mathrm{Vol}(\partial\mathrm{B}_h)/\mathrm{Vol}(\mathrm{B}_h)$ est une fonction croissante de h.

Pour toute valeur de h, il existe dans l'espace hyperbolique une hypersurface totalement ombilicale H_h, dont la courbure moyenne, relativement à un champ u unitaire normal N, vaut h. Soit $\varepsilon>0$. Choisissant une partie A de H_h de volume 1, on note $J(h, \varepsilon)$ le volume du domaine $\{\exp_p t N_p : p \in A, 0 \leqq t \leqq \varepsilon\}$.

Deux conséquences de l'inégalité de Lévy-Heintze-Karcher-Mazya. — (Pour cet énoncé relatif aux courants, voir M. Gromov [12].)

Supposons que, dans (V, g), *la courbure de Ricci soit partout supérieure ou égale à* $1-n$. *Soit* T *un courant de masse* v, *tel que* $M(\partial T)=I(v)$, soit h sa courbure moyenne. *Alors si* $h \geqq n-1$, $I(v)/v=M(\partial T)/M(T) \geqq \operatorname{Vol}(\partial B_h)/\operatorname{Vol}(B_h)$. *Si* h *est quelconque, et si tout point du support de* T *se trouve à distance au plus* ε *de* ∂T, *alors* $I(v)/v=M(\partial T)/M(T) \geqq J(h, \varepsilon)^{-1}$.

6. Les courants qui minimisent l'aire en bordant un volume donné satisfont une inégalité de stabilité. Nous ne l'énonçons que dans le cas des sous-variétés lisses.

Stabilité sous contrainte. — *Soit* T *une sous-variété lisse, de volume* v, *telle que* $\operatorname{Vol}(\partial T)=I(v)$. *Pour toute fonction* φ *sur* ∂T, *telle que* $\int_{\partial T} \varphi=0$,

$$\int_{\partial T} |\nabla \varphi|^2-(\text{Ricci}+|B|^2) \varphi^2 \geqq 0,$$

où B *désigne la seconde forme fondamentale de* ∂T *et* Ricci *la courbure de Ricci ambiante prise sur un vecteur unitaire normal à* ∂T.

Soit N le champ unitaire normal sortant de ∂T. Étant données deux fonctions φ et ψ sur ∂T, on note T_t le domaine limité, en coordonnées exponentielles normales à ∂T, par le graphe de la fonction $t \varphi+(1/2) t^2 \psi$.

Alors

$$\frac{d^2}{dt^2} \operatorname{Vol}(T_t)_{|t=0}=\int_{\partial T} h \varphi^2+\psi,$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \operatorname{Vol}(\partial T_t)_{|t=0}=\int_{\partial T} |\nabla \varphi|^2+(h^2-|B|^2-\text{Ricci}) \varphi^2+h \psi.$$

(Pour cette formule, *voir* par exemple [14].) On obtient l'inégalité annoncée en écrivant que, si $\operatorname{Vol}(T_t)=\operatorname{Vol}(T)+O(t^3)$, alors $\operatorname{Vol}(\partial T_t) \geqq \operatorname{Vol}(\partial T)+O(t^3)$. Le fait que ψ disparaisse traduit le fait que le hessien de $M(\partial T)$ est défini intrinsèquement sur la sous-variété $\{M(T)=v\}$ aux points critiques. □

7. Nous avons rassemblé dans l'énoncé suivant des résultats techniques sur le profil isopérimétrique.

Propriétés différentielles du profil isopérimétrique. — *Soit* (M, g) *une variété riemannienne compacte, de classe* C^∞, *de dimension* n.

(i) *Le profil isopérimétrique* $v \mapsto I(v)$ *admet des dérivées première et seconde au sens suivant : il existe une fonction lisse* L *telle que* $I-L$ *soit concave. Si* $I(v)$ *est atteint pour* *un courant* T, *et si* I *est dérivable en* v, *alors* $\mathrm{I}'(v)$ *est la courbure moyenne* (*constante*) *de* $\partial\mathrm{T}$.

(ii) *Supposons que* T *soit une sous-variété à bord lisse* (*c'est toujours le cas si* $n \leqq 7$). *Alors, au sens des distributions,*

$$(\bigstar)\qquad \mathrm{I}(v)^2\,\mathrm{I}''(v) + \int_{\partial\mathrm{T}} \mathrm{Ricci} + |\mathrm{B}|^2 \leqq 0,$$

où B *est la seconde forme fondamentale de* $\partial\mathrm{T}$, Ricci *désigne la courbure de Ricci de* (M, g) *prise sur un vecteur unitaire normal à* $\partial\mathrm{T}$.

(iii) *Dans le cas où* $n=2$, *posons* $\mathrm{Q}(v)=\mathrm{I}(v)^2$. *Soit* K *une borne inférieure de la courbure de* (M, g). *Alors l'inégalité* ($\bigstar$) *prend la forme*

$$\mathrm{Q}''(v) \leqq -2\mathrm{K}.$$

Remarque. — Le point (ii) est vrai même si T n'est pas lisse (communication orale de P. Bérard, G. Besson et S. Gallot).

Commençons par une construction préliminaire. Soit $\varepsilon>0$. Soit $\beta'_1, \ldots, \beta'_{\mathrm{N}}$ un système maximal de boules de rayon $\varepsilon/3$, deux-à-deux disjointes, dans M. Alors toute boule de rayon ε de M contient l'une des β'_i. Notons β_i la boule concentrique de rayon $\varepsilon/6$. Pour $i \neq j$, soit f_{ij} la fonction harmonique dans $\mathrm{M}-(\beta_i \cup \beta_j)$, qui vaut 0 sur $\partial\beta_i$ et 1 sur $\partial\beta_j$. Notons X_{ij} son gradient, et φ^t_{ij} le flot de X_{ij}. Si η est un nombre inférieur à tous les $\inf_{\partial\beta'_i} f_{ij}$ et les $\inf_{\partial\beta'_j} 1-f_{ij}$, alors, pour $|t| \leqq \eta$, et tous i, j, φ^t_{ij} envoie $\mathrm{M}-(\beta'_i \cup \beta'_j)$ dans $\mathrm{M}-(\beta_i \cup \beta_j)$. On note $c_{ij} = \int_{\partial\beta_i} |\mathrm{X}_{ij}|$.

Soit $\delta>0$. L'argument qui montre, pour chaque v, l'existence d'un courant de masse donnée v dont la masse du bord est minimum montre aussi que le profil I est semi-continu inférieurement. Sa borne inférieure sur $[\delta, \mathrm{Vol}(g)-\delta]$ est donc positive. Soit $v \in]\delta, \mathrm{Vol}(g)-\delta[$, soit T tel que $\mathrm{M}(\mathrm{T})=v$, $\mathrm{M}(\partial\mathrm{T})=\mathrm{I}(v)$, notons h la courbure moyenne de $\partial\mathrm{T}$. Les inégalités attribuées ci-dessus à Lévy-Heintze-Karcher-Mazya donnent un majorant de h et montrent que T et $\mathrm{M}-\mathrm{T}$ contiennent chacun une boule de rayon ε, où ε ne dépend que de δ. Choisissons $\beta_i \subset \mathrm{T}$ et $\beta_j \subset \mathrm{M}-\mathrm{T}$, et posons pour $|t| \leqq \eta$, $\mathrm{T}_t = \varphi^t_{ij}(\mathrm{T})$. On a alors

$$\frac{d}{dt}\mathrm{M}(\mathrm{T}_t) = \int_{\mathrm{T}_t-\beta_i} \mathrm{div}(\mathrm{X}_{ij}) + \int_{\partial\beta_i} |\mathrm{X}_{ij}| = c_{ij},$$

$$\left|\frac{d}{dt}\mathrm{M}(\partial\mathrm{T}_t)\right|, \left|\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{M}(\partial\mathrm{T}_t\}\right| \leqq \mathrm{Cte}_{ij}\,\mathrm{M}(\partial\mathrm{T}_t),$$

avec une constante qui ne dépend que des dérivées des champs X_{ij} (on peut trouver des formules explicites dans [14]). En particulier, elle est bornée en fonction de δ seulement.

Pour $\tilde{v}\in[v-\eta\, c_{ij},\ v+\eta\, c_{ij}]$, posons $\mathrm{J}(\tilde{v})=\mathrm{M}(\partial\mathrm{T}_j)$, où $\mathrm{M}(\mathrm{T}_t)=\tilde{v}$. Alors

$$\frac{d^2}{d\tilde{v}^2}\mathrm{J}=c_{ij}^{-2}\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{M}(\partial\mathrm{T}_t)\leqq \mathrm{Cte}_{ij}\,\mathrm{I}(v)\leqq \mathrm{C}$$

où la constante C ne dépend que de δ, car la fonction I est bornée (prendre les niveaux d'une fonction de Morse). Par définition de I,

$$\mathrm{I}(\tilde{v})\leqq \mathrm{J}(\tilde{v}),$$

d'où

$$\mathrm{I}(\tilde{v})-\mathrm{C}\,\tilde{v}^2\leqq \mathrm{J}(\tilde{v})-\mathrm{C}\,\tilde{v}^2\leqq \mathrm{J}(v)-\mathrm{C}\,v^2+(\tilde{v}-v)(\mathrm{J}'(v)-2\,\mathrm{C}\,v),$$

car la fonction $\mathrm{J}-\mathrm{C}\,\tilde{v}^2$ est concave. Posons $c=\min\limits_{i,j} c_{ij}$.

Sur l'intervalle $[v\pm(1/2)\,\eta\, c]$, $\mathrm{I}-\mathrm{C}\,\tilde{v}^2$ est la borne inférieure d'une famille de fonctions affines, donc est concave.

Si I est dérivable en v, l'inégalité $\mathrm{I}\leqq\mathrm{J}$ et $\mathrm{I}(v)=\mathrm{J}(v)$ entraînent

$$\mathrm{I}'(v)=\mathrm{J}'(v)=c_{ij}^{-1}\frac{d}{dt}\mathrm{M}(\partial\mathrm{T}_t)_{|\,t=0}=c_{ij}^{-1}\,\delta(\partial\mathrm{T})(\mathrm{X}_{ij})=hc_{ij}^{-1}\,\delta\mathrm{T}(\mathrm{X}_{ij})=h,$$

où h est la courbure moyenne de $\partial\mathrm{T}$.

Si $\partial\mathrm{T}$ est lisse, on peut utiliser son champ unitaire normal sortant N pour obtenir des déformations. Notons U_t le domaine obtenu en ajoutant à T la bande $\{\exp_p s\mathrm{N}_p : 0\leqq s\leqq t,\ p\in\partial\mathrm{T}\}$. Si $\mathrm{Vol}(\mathrm{U}_t)=\tilde{v}$, on pose maintenant $\mathrm{J}(\tilde{v})=\mathrm{Vol}(\partial\mathrm{U}_t)$. On a

$$\mathrm{J}^2\,\mathrm{J}''=\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{Vol}(\partial\mathrm{U}_t)-\frac{1}{\mathrm{J}}\left(\frac{d}{dt}\mathrm{Vol}(\partial\mathrm{U}_t)\right)^2.$$

Or

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Vol}(\partial\mathrm{U}_t)_{|\,t=0}=\int_{\partial\mathrm{T}}h=h\,\mathrm{J}(v),$$

et une formule classique donne la variation seconde de l'aire des hypersurfaces parallèles [*voir* par exemple ([7], [14])] :

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{Vol}(\partial\mathrm{U}_t)_{|\,t=0}=\int_{\partial\mathrm{T}}h^2-|\mathrm{B}|^2-\mathrm{Ricci}.$$

Il vient $\mathrm{J}(v)^2\,\mathrm{J}''(v)+\int_{\partial\mathrm{T}}\mathrm{Ricci}+|\mathrm{B}|^2=0$, et de nouveau, comme $\mathrm{I}\leqq\mathrm{J}$ et $\mathrm{I}(v)=\mathrm{J}(v)$, $\mathrm{I}''(v)\leqq\mathrm{J}''(v)$. □

B. AIRE ET RAYON D'INJECTIVITÉ SUR S^2

8. Nous allons démontrer un raffinement du résultat suivant, dû à G. Bol [5] et F. Fiala [8].

Inégalité isopérimétrique de Bol-Fiala. — Soit g une métrique sur le disque D^2, à courbure inférieure ou égale à $+1$, d'aire $A \leqq 4\pi$. Soit L la longueur du bord. Soit L_0 la longueur du bord d'un disque géodésique d'aire A dans la sphère canonique. Alors

$$L^2 \geqq L_0^2 = 4\pi A - A^2.$$

9. DES ESPACES MODÈLES. — Pour $i \in]0, \pi[$, on construit une métrique sur D^2 comme suit. Elle est de classe C^1, sa courbure prend seulement les valeurs $+1$ et -1, et le bord est géodésique. Posons $\varepsilon = (2\pi^2 - 2i^2)^{1/2}$, $R = \operatorname{Arccos}(-\varepsilon/2\pi)$, $\rho = \operatorname{Arcsh}(\varepsilon/2i)$. En coordonnées polaires $(r, \theta) \in [0, R+\rho] \times [0, 2\pi]$, on a

$$g_i = dr^2 + \sin^2 r\, d\theta^2 \quad \text{si } r \leqq R,$$

$$g_i = dr^2 + \frac{i^2}{\pi^2} \operatorname{ch}^2 (R + \rho - r)\, d\theta^2 \quad \text{si } R \leqq r \leqq R + \rho.$$

La surface $\mathscr{P}(i) = (D^2, g_i)$ est plongée dans $\mathbb{R}^3$, comme une surface de révolution. La partie $\{r \leqq R\}$ est une calotte sphérique d'aire $2\pi + \varepsilon$. Le reste a une aire égale à ε. Remarquer que, lorsque i tend vers zéro, on obtient une métrique complète g_0 sur $\mathbb{R}^2$, d'aire $2\pi(1+\sqrt{2})$ — c'est la surface $\mathscr{P}$ de l'introduction. On note $\mathscr{S}(i)$ la surface, homéomorphe à S^2, obtenue en recollant deux disques $\mathscr{P}(i)$ le long de leur bord.

L'aire de $\mathscr{S}(i)$ est égale à $4\pi + 4\varepsilon$. Pour $A > 4\pi + 4\varepsilon$, on note $\mathscr{S}(A, i)$ la surface obtenue en recollant un disque $\mathscr{P}(i)$ à chacune des composantes du bord d'un anneau plat, produit d'un cercle de longueur $2i$ par un intervalle de longueur $(A - 4\pi - 4\varepsilon)/2i$.

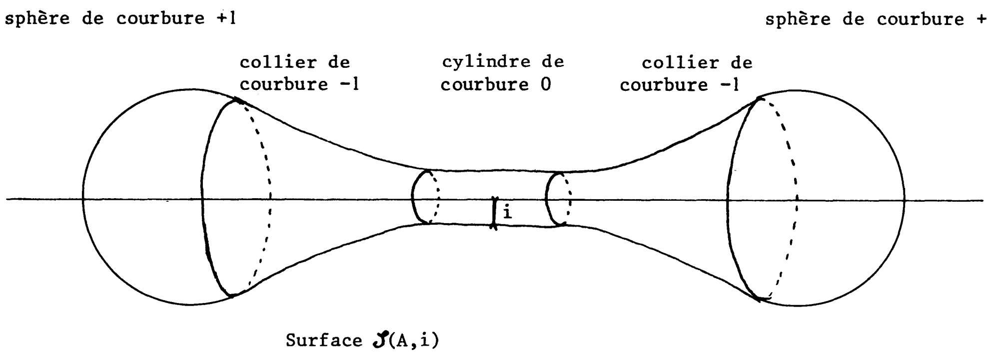

Fig. 2.

10. THÉORÈME. — *Soit g une métrique sur S^2 dont la courbure varie entre -1 et $+1$. Supposons le rayon d'injectivité inférieur à π. Alors l'aire de (S^2, g) est supérieure ou égale à celle de la surface de même rayon d'injectivité $\mathscr{S}(i)$. Autrement dit, l'aire A et le rayon d'injectivité i satisfont*

$$i^2 \geqq \pi^2 - (A - 4\pi)^2/32.$$

Cette inégalité est étroitement liée à la propriété isopérimétrique suivante.

11. INÉGALITÉ ISOPÉRIMÉTRIQUE. — *Soit g une métrique sur S^2 dont la courbure varie entre -1 et $+1$. Soit i son rayon d'injectivité, supposé inférieur à π, soit A son aire, supposée inférieure à $2\pi(3+\sqrt{2}) + (2\pi^2 - 2i^2)^{1/2}$. Soit c une courbe de Jordan dans (S^2, g)*

bordant un domaine d'aire a. Soit $c_{A, i, a}$ *le parallèle dans la surface de révolution* $\mathscr{S}(A, i)$ *qui enferme la même aire a. Alors*

$$\text{longueur}\,(c) \geqq \text{longueur}\,(c_{A, i, a}).$$

Autrement dit, posant $\varepsilon = (2\pi^2 - 2i^2)^{1/2}$,

(1) longueur $(c)^2 \geqq 4\pi a - a^2$ si a ou $A - a \leqq 2\pi + \varepsilon$,

(2) longueur $(c)^2 \geqq 4 i^2 + (a - 2\pi - 2\varepsilon)^2$ si $2\pi + \varepsilon \leqq a$, $A - a \leqq 2\pi + 2\varepsilon$,

(3) longueur $(c)^2 \geqq 4 i^2$ si $2\pi + 2\varepsilon \leqq a \leqq A - (2\pi + 2\varepsilon)$.

12. Remarque. — En termes de profil isopérimétrique, on obtient en fait une conclusion plus forte : les inégalités (2) et (3) restent vraies si on remplace longueur (c) par $I(a)$, i. e., si l'on considère les domaines dans (S^2, g) de n'importe quel type topologique et non pas seulement des disques. En revanche, on a, sur $\mathscr{S}(i)$ avec $i < \pi/\sqrt{8}$, $I(\pi) \leqq 16 i^2 + \pi^2 < 4\pi(\pi) - (\pi)^2$ donc l'inégalité (1) ne s'étend pas aux domaines ayant plusieurs bords.

La méthode, qui consiste à minorer $I(a)$ pour $a > 2\pi + \varepsilon$, ne s'étend pas aux grandes valeurs de A. En fait, pour $i \leqq \pi/\sqrt{7}$ et $A > 6\pi + \sqrt{2}(5(\pi^2 - i^2)^{1/2} - (\pi^2 - 7 i^2)^{1/2})$, il existe dans $\mathscr{S}(A, i)$ un domaine d'aire $2\pi + \varepsilon$, dont le bord (deux parallèles) a une longueur totale inférieure à $(2\pi^2 + 2 i^2)^{1/2}$.

13. Lemme. — *On considère la sphère* S^2 *munie d'une métrique à courbure* $\leqq 1$, *de rayon d'injectivité* $i < \pi$. *Soit c une courbe dans* S^2 *de courbure constante h telle que* $|h| \leqq 1$. *Alors c a une longueur* $\geqq i$ *et chacun des disques bordés par c a une aire* $\geqq 2\pi(1 - \sqrt{2}/2)$.

En effet, d'après un résultat de I. Burago [6] (retrouvé par Ch. Bavard [2], corollaire 3.3), il y a dans chacun de ces disques un point p où le rayon d'injectivité est au moins égal à $\operatorname{Arc\,tg}(1) = \pi/4$ (en particulier, la distance de p à n'importe quel point de c est $\geqq \pi/4$). D'après le théorème de comparaison de Rauch, l'aire de chaque disque est au moins égale à celle d'un disque sphérique de rayon $\pi/4$, soit $2\pi(1 - \sqrt{2}/2)$.

Supposons que longueur $(c) < i$. Alors, pour tout point q de c, la courbe c est contenue dans la boule de centre q et de rayon $i/2$. Celle-ci est difféomorphe à D^2, donc elle contient l'un des disques bordés par c, ainsi que son point p. La géodésique de longueur $i/2$, issue de q et passant par p coupe au moins une fois la courbe c au-delà de p, donc sa longueur est $> \pi/2$, ce qui contredit l'hypothèse $i < \pi$. □

14. Lemme. — *Sur la sphère* S^2, *on se donne une métrique à courbure comprise entre* -1 *et* $+1$, *de rayon d'injectivité* $i < \pi$, *d'aire* A. *Pour les aires a comprises entre* $4\pi(1 + \sqrt{2}/2) - A$ *et* $2\pi(1 + \sqrt{2}/2)$, *on a l'inégalité*

$$I(a)^2 \geqq \min\{4\pi a - a^2, (\pi\sqrt{2} + i)^2\}.$$

Soit T une sous-variété d'aire a dont le bord a une longueur minimale $I(a)$. Si ∂T est connexe, i. e., T est un disque, alors l'inégalité de Bol-Fiala donne $I(a)^2 \geqq 4\pi a - a^2$. Sinon, la condition de stabilité sous contrainte du paragraphe 6 s'interprète aisément. Soit h la courbure de ∂T. Comme $\text{Ricci} \geqq -1$, on a, pour toute fonction φ sur ∂T telle que $\int_{\partial T} \varphi = 0$,

$$\int_{\partial T} |\nabla \varphi|^2 - (h^2 - 1) \int_{\partial T} \varphi^2 \geqq 0.$$

Si ∂T n'est pas connexe, il existe des fonctions $\varphi \neq 0$, localement constantes, et d'intégrale nulle. On conclut que $h^2 \leqq 1$.

Montrons que T (ou bien $S^2 - T$) contient une composante connexe qui est un disque d'aire $d_1 \leqq 2\pi(1+\sqrt{2}/2)$.

Si la caractéristique d'Euler $\chi(T) \geqq 1$, alors T a au moins une composante simplement connexe, et son aire $d_1 \leqq a \leqq 2\pi(1+\sqrt{2}/2)$ par hypothèse. Sinon $\chi(S^2 - T) \geqq 2$, donc $S^2 - T$ a au moins deux composantes simplement connexes. Leurs aires d_1, d_2 satisfont $d_1 + d_2 \leqq A - a \leqq 4\pi(1+\sqrt{2}/2)$, donc l'un des d_j, soit d_1, est inférieur ou égal à $2\pi(1+\sqrt{2}/2)$.

D'après le lemme précédent, $d_1 \geqq 2\pi(1-\sqrt{2}/2)$. L'inégalité de Bol-Fiala [8] donne alors, pour le bord c_1 de ce disque,

$$\text{longueur}\,(c_1) \geqq \pi\sqrt{2}.$$

Pour les autres composantes c_j, $j \neq 1$, de ∂T, le lemme précédent donne

$$\text{longueur}\,(c_j) \geqq i,$$

d'où la conclusion

$$I(a) = \text{longueur}\,(\partial T) = \Sigma\ \text{longueur}\,(c_j) \geqq \pi\sqrt{2} + i. \quad \square$$

15. Démonstration du théorème 10. — Soit σ une plus petite géodésique fermée dans (S^2, g). Sa longueur est $2i$. La courbe σ divise S^2 en deux disques, d'aire a_0 et $A - a_0$. D'après la formule de Gauss-Bonnet, nécessairement $a_0 \geqq 2\pi$, et $A - a_0 \geqq 2\pi$. De l'inégalité de Bol-Fiala, on tire donc

$$\min(a_0, A - a_0) \geqq 2\pi + 2(\pi^2 - i^2)^{1/2} > 2\pi + \varepsilon.$$

Il existe donc un

$$a_0 \in]2\pi + \varepsilon, A - 2\pi - \varepsilon[\quad \text{tel que} \quad I(a_0) \leqq 2i.$$

Pour $a \in]0, A[$, posons

$$F(a) = I(a)^2 - (a - A/2)^2 + C,$$

où la constante C est choisie pour que

$$2\pi^2 + 2i^2 - (2\pi + \varepsilon - A/2)^2 + C = 0.$$

Comme on a supposé $i < \pi$, on a

$$(\pi\sqrt{2}+i)^2 \geqq 2\pi^2+2i^2,$$

donc le lemme précédent montre que, sous l'hypothèse $A \leqq 2\pi+\varepsilon+2\times 2\pi(1+\sqrt{2}/2)$, on a

$$F(2\pi+\varepsilon) \geqq 0.$$

D'après le théorème 7, (iii), l'hypothèse que la courbure de g est $\geqq -1$ entraîne que F est concave, donc positive ou nulle sur l'intervalle $[2\pi+\varepsilon, A-2\pi-\varepsilon]$. En particulier,

$$0 \leqq F(a_0) \leqq 4i^2-(a_0-A/2)^2+C \leqq 4i^2+C,$$

d'où l'on tire

$$A \geqq 4\pi+4\varepsilon = \text{aire } (\mathscr{S}(i)). \quad \square$$

16. Démonstration de l'inégalité isopérimétrique 11. — On suppose $A \leqq 2\pi+\varepsilon+2\times 2\pi(1+\sqrt{2}/2)$, de façon à avoir $I(2\pi+\varepsilon)^2 \geqq 2\pi^2+2i^2$. Montrons que, sur l'intervalle $[2\pi+\varepsilon, A-2\pi-\varepsilon]$, on a $I \geqq 2i$. Soit a_1 un minimum de I à l'intérieur de cet intervalle, et T un domaine d'aire a_1 dont le bord a une longueur minimale $I(a_1)$. Toute déformation assez petite de T ne peut qu'augmenter la longueur du bord, donc celui-ci est une réunion de géodésiques fermées. En particulier, sa longueur est $\geqq 2i$, donc $\inf I = I(a_1) \geqq 2i$.

D'après le paragraphe précédent, on sait que $A \geqq 4\pi+4\varepsilon$, donc on a, en particulier $I(2\pi+2\varepsilon) \geqq 2i$. Pour $a \in [2\pi+\varepsilon, 2\pi+2\varepsilon]$, posons

$$F(a) = I(a)^2-4i^2-(a-2\pi-2\varepsilon)^2.$$

De nouveau, F est concave, positive au bord, donc positive dans tout l'intervalle $[2\pi+\varepsilon, 2\pi+2\varepsilon]$, c'est l'inégalité (2). $\square$

17. Remarque. — On peut aussi énoncer le théorème 10 comme suit : Tout disque (D^2, g), à courbure comprise entre -1 et $+1$, à bord géodésique de longueur $2i$, a une aire au moins égale à celle de (D^2, g_i). (On se ramène au cas de S^2 en recollant deux copies de (D^2, g) le long du bord; la métrique obtenue sur S^2, en général de classe C^1 seulement, peut être approchée C^0 par des métriques lisses, à courbure comprise entre -1 et $+1$; pour ce dernier point, *voir* [3].)

C. Volume minimal de $\mathbb{R}^2$

18. Théorème. — *Toute métrique complète sur* $\mathbb{R}^2$, *à courbure comprise entre* -1 *et* $+1$, *a une aire supérieure ou égale à* $2\pi(1+\sqrt{2})$.

Par chirurgie, on se ramène au théorème 10. On suppose l'aire de g finie. Comme le rayon d'injectivité tend vers zéro à l'infini, il existe dans $(\mathbb{R}^2, g)$ des lacets géodésiques simples c. D'après le lemme 19 suivant, l'angle intérieur θ et la longueur l satisfont $l \geqq -2\log\operatorname{tg}(\theta/4)$, l'égalité ayant lieu si c borde un anneau infini à courbure constante -1. Posant $\lambda = -2\log\operatorname{tg}(\theta/4)/l$, il existe un anneau A à courbure constante $-\lambda^2$, bordé par un lacet géodésique de longueur l et d'angle intérieur θ. En remplaçant, dans $(\mathbb{R}^2, g)$, la composante non bornée de $\mathbb{R}^2-c$ par l'anneau A, on obtient une nouvelle métrique complète à courbure comprise entre -1 et $+1$, et l'aire a peu changé, si on a choisi un lacet c assez court. On peut lisser la nouvelle métrique (*voir* [3]), à condition d'élargir légèrement les bornes sur la courbure. Une nouvelle chirurgie, plus facile cette fois puisqu'elle a lieu sur une surface à courbure constante, transforme $\mathbb{R}^2$ en un disque à bord géodésique. Le double de ce disque est une sphère S^2 dont le rayon d'injectivité est très petit (inférieur à la moitié de la longueur du lacet de départ), donc son aire est au pire un peu inférieure à $4\pi(1+\sqrt{2})$. On conclut que aire $(g) \geqq 2\pi(1+\sqrt{2})$. □

Remarque. — (1) Le même argument permet de déduire la proposition 1 de la proposition 11. (2) On peut aussi démontrer la proposition 1 directement en adaptant au cas des surfaces ouvertes, d'aire finie, les arguments de la partie B.

19. LEMME. — *Dans une surface complète, d'aire finie, à courbure comprise entre* -1 *et* $+1$, *homéomorphe à* $\mathbb{R}^2$, *tout lacet géodésique simple de longueur* l *et d'angle intérieur* θ *satisfait*

$$l \geqslant -2 \log \operatorname{tg}(\theta/4).$$

Découpons la composante non bornée de $\mathbb{R}^2 - l$ le long d'un rayon issu du point base. Approchons le triangle infini obtenu par un triangle fini T dont les deux grands côtés sont minimisants. Comme la courbure est $\geqq -1$, d'après Alexandrov-Toponogov (ou plutôt, l'énoncé donné dans [10], page 195), le triangle T′ ayant les mêmes côtés que l'on peut construire dans le plan hyperbolique a des angles α', β', γ' inférieurs aux angles α, β, γ de T. En diminuant le petit côté, on obtient, dans le plan hyperbolique, un triangle T″ dont les angles (adjacents au petit côté) sont $\alpha''=\alpha$ et $\beta''=\beta$. Lorsque les grands côtés tendent vers $+\infty$, le petit côté de T″ tend vers

$$-\log \operatorname{tg}(\alpha/2) - \log \operatorname{tg}(\beta/2).$$

On a donc

$$l \geqq -\log \operatorname{tg}(\alpha/2) - \log \operatorname{tg}((\theta-\alpha)/2) = f(\alpha)$$

pour un $\alpha \leqq \theta/2 < \pi/2$. On vérifie aisément que le minimum de f sur $[0, \theta/2]$ est égal à $-2 \log \operatorname{tg}(\theta/4)$. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. ALMGREN, *Existence and regularity of solutions to elliptic variational problems with constraints* (*Mem. Amer. Math. Soc.*, vol. 4, 1976).

[2] Ch. BAVARD, *Le rayon d'injectivité des surfaces à courbure majorée* (*J. Diff. Geometry*, vol. 19, 1984, p. 137-142).

[3] Ch. BAVARD, *Thèse de troisième cycle*, Université Paris-XI, Orsay, mai 1984.

[4] M. S. BERGER et E. BOMBIERI, *On Poincaré's isoperimetric problem for simple closed geodesics* (*J. of Funct. Analysis*, vol. 42, 1981, p. 274-298).

[5] G. BOL, *Isoperimetrische Ungleichungen für Bereiche auf Flächen* (*Jber. Deutsch. Math. Verein.*, vol. 51, 1941, p. 219-257).

[6] I. D. BURAGO, *Sur le rayon d'injectivité des surfaces à courbure majorée*, Ukrainskii Geometriceskii Sbornik, vol. 21, 1978, p. 10-14, (en Russe).