

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ALAIN GRIGIS

Estimations asymptotiques des intervalles d'instabilité pour l'équation de Hill

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 20, n° 4 (1987), p. 641-672

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1987_4_20_4_641_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ESTIMATIONS ASYMPTOTIQUES DES INTERVALLES D'INSTABILITÉ POUR L'ÉQUATION DE HILL

PAR ALAIN GRIGIS

RÉSUMÉ. — Dans cet article, on donne une majoration asymptotique, quand n tend vers l'infini, de la largeur du n -ième intervalle d'instabilité pour l'équation de Hill à potentiel réel-analytique. Pour les potentiels polynômes trigonométriques, on donne un développement asymptotique sous la forme du module d'une somme finie de termes exponentiellement petits.

1. Introduction

L'équation de Hill s'écrit

$$(1.1) \quad u''(x) = (V(x) - E)u(x)$$

où la fonction $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, appelée potentiel, est périodique. Nous supposons la période égale à π et V de moyenne nulle sur une période :

$$(1.2) \quad V(x - \pi) = V(x), \quad \int_0^\pi V(t) dt = 0.$$

Par définition, les valeurs propres de l'équation de Hill sont les valeurs du paramètre E pour lesquelles il existe une solution non nulle de (1.1) périodique pour la période 2π . En fait, cette solution est périodique ou antipériodique pour la période π .

Il est facile de voir qu'il y a deux valeurs propres, distinctes ou confondues, proches de n^2 , correspondant à des fonctions propres proches de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$, pour n assez grand. On les appelle E_n^- et E_n^+ , ce sont les $2n$ -ièmes et $(2n+1)$ -ièmes valeurs propres de l'équation de Hill (voir [2]).

Pour $E \in]E_n^-, E_n^+[$ les solutions de (1.1) ne sont pas bornées sur \mathbb{R} . Pour cette raison l'intervalle $]E_n^-, E_n^+[$ est appelé n -ième intervalle d'instabilité, et on s'intéresse à sa largeur

$$(1.3) \quad \gamma_n = E_n^+ - E_n^- \geq 0.$$

Si $\gamma_n = 0$, l'intervalle d'instabilité est vide, et pour $E = E_n^+ = E_n^-$ l'équation (1.1) admet 2 solutions 2π -périodiques linéairement indépendantes.

Le lecteur peut consulter les références [2], [10], [11], [13] pour voir les liens entre la décroissance de γ_n quand n tend vers l'infini et la régularité de la fonction potentiel $V(x)$. D'autre part, les propriétés de l'application qui, à la fonction V , associe la suite (γ_n) ont été largement étudiées, voir par exemple le récent article de Garnett et Trubowitz [5] et sa bibliographie. Signalons aussi des résultats récents de De Lyon et Foulon.

Ici nous supposons

(1.4) V est une fonction réel-analytique

et nous précisons le résultat connu sur la décroissance exponentielle de (γ_n) (par exemple Trubowitz [15]), à l'aide d'une indicatrice de croissance de V étendue au domaine complexe.

Si on note, pour ρ grand, $M(\rho)$ la demi-largeur de la plus grande bande $|\operatorname{Im} x| < A$ dans laquelle V s'étend holomorphiquement tout en vérifiant $|V(x)| < \rho$ on a :

THÉORÈME 1. — Pour tout $\varepsilon > 0$ on a pour $n > n_0(\varepsilon)$

$$(1.5) \quad \gamma_n \leq \exp(-(2-\varepsilon)nM(n^2)).$$

On peut voir au paragraphe 2 des propriétés de la fonction M , notamment sa croissance lente si $V(x)$ s'étend en une fonction entière sur \mathbb{C} . On a aussi le

COROLLAIRE 1. — Si $V(x)$ s'étend holomorphiquement à $|\operatorname{Im} x| < B$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a pour $n > n_0(\varepsilon)$:

$$(1.6) \quad \gamma_n \leq \exp(-2(B-\varepsilon)n).$$

Dans le cas général, on a donc seulement une majoration asymptotique de γ_n . Il est peu envisageable d'espérer plus, car d'après les résultats de Garnett et Trubowitz [5] toute suite (γ_n) exponentiellement décroissante est la suite des largeurs des intervalles d'instabilité d'une équation de Hill associée à un potentiel $V(x)$ qui est réel-analytique d'après les résultats de Trubowitz [15].

Pourtant, Harrell [9] et Avron-Simon [1] ont donné un équivalent de γ_n quand n tend vers l'infini pour l'équation de Mathieu :

$$(1.7) \quad u''(x) = (\mu \cos 2x - E)u(x), \quad \mu > 0.$$

Pour ce potentiel :

$$(1.8) \quad \gamma_n = \frac{\mu^n}{8^{n-1}((n-1)!)^2} \left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right).$$

Cet exemple montre que notre majoration (1.5) est à peu près optimale.

Dans cet article, nous étudions l'équation de Hill associé à un polynôme trigonométrique réel que nous pouvons supposer à translation près de la forme :

$$(1.9) \quad V(x) = \mu \cos 2Nx + \sum_{-N+1}^{N-1} c_n e^{2inx}$$

avec $\mu > 0$, $c_n = \overline{c_{-n}}$, $c_0 = 0$.

THÉORÈME 2. — Soit $V(x)$ de la forme (1.9). Il existe un polynôme $Q(t) = \sum_{j=1}^{N-1} \lambda_j t^j$ dont les coefficients dépendent algébriquement de ceux de V , tel que si on pose

$$(1.10) \quad A_k(n) = \exp \left[\frac{2ink\pi}{N} + 2nQ \left(\left(\frac{\mu}{2n^2} \right)^{1/N} e^{2ik\pi/N} \right) \right]$$

on ait

$$(1.11) \quad \gamma_n = \frac{4n}{\pi} \left(\frac{\mu e^2}{8n^2} \right)^{n/N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} A_k(n) \left(1 + O \left(\frac{\text{Log } n}{n} \right) \right) \right|.$$

Le polynôme Q dont les coefficients sont calculés au lemme 2.1 intervient dans le développement pour E tendant vers l'infini des intégrales $\int_0^{x_k(E)} (V(t) - E)^{1/2} dt$ où le complexe $x_k(E)$ vérifie $V(x_k(E)) = E$. Ces points sont appelés points tournants de l'équation de Hill et jouent un rôle fondamental. Nous les étudions au paragraphe 2 et on a

$$(1.12) \quad z_k(E) = \int_0^{x_k(E)} (V(t) - E)^{1/2} dt \\ = E^{1/2} \left[\frac{1}{2} \text{Log} \left(\left(\frac{\mu}{2E} \right)^{1/N} e^{2ik\pi/N} \right) + \frac{1 - \text{Log } 2}{N} + Q \left(\left(\frac{\mu}{2E} \right)^{1/N} e^{2ik\pi/N} \right) \right] + O(E^{-1/2} \text{Log } E).$$

A la fin de l'article nous discutons du problème de l'annulation des γ_n . Il n'y a pas de problème si $N=1$, et nous retrouvons le résultat sur l'équation de Mathieu. Par contre, pour $N > 1$, il peut y avoir compensation entre les N termes $A_k(n)$. Nous montrons que dans un cas générique, l'un des $A_k(n)$ l'emporte sur les autres, ce qui donne un équivalent de γ_n quand n tend vers l'infini. Toutefois, celui-ci est de module exponentiellement grand, de l'ordre de $\exp(cn^{1-(2j_0/N)})$ pour un j_0 , $1 \leq j_0 \leq N-1$, et on voit que l'on ne peut plus considérer $V(x)$ comme une perturbation de $\mu \cos 2Nx$ pour ce qui est du comportement asymptotique de γ_n .

On peut vérifier facilement le fait bien connu suivant : si $V(x)$ admet une période strictement inférieure à π , soit π/M avec $1 < M$ diviseur de N , alors $\gamma_n = 0$ si n n'est pas un multiple de M .

Par contre, nous n'avons pas su démontrer la

CONJECTURE. — Si le potentiel polynôme trigonométrique V n'admet pas de période inférieure à π , alors γ_n est non nul pour n assez grand.

D'après les remarques ci-dessus, il est clair que la méthode utilisée par Avron-Simon dans [1] pour l'équation de Mathieu a peu de chance de marcher pour les polynômes plus compliqués. Aussi notre méthode est complètement différente. Elle consiste comme dans Harrell [9] à étudier l'équation (1.1) étendue au domaine complexe. Nous

construisons alors des solutions de (1.1) par la méthode W.K.B. complexe exacte dans l'esprit de Voros [16] et Ecalle [3]. C'est l'objet de la partie 3. Dans la partie 4, nous démontrons les théorèmes.

Enfin, nous tenons à remercier Ecalle, Helffer et Sjöstrand pour de nombreuses discussions.

2. Points tournants

Chaque potentiel $V(x)$ que nous considérons est réel, réel-analytique et périodique de période π . Nous étendons holomorphiquement la fonction $V(x)$ à une bande du plan complexe $|\operatorname{Im} x| < A$.

Si nous introduisons la variable $\zeta = e^{2ix}$ nous pouvons écrire

$$(2.1) \quad V(x) = P(\zeta); \quad \zeta = e^{2ix}$$

où P est holomorphe de la variable ζ dans une couronne $e^{-A} < |\zeta| < e^A$. La fonction V est réelle sur le réel, donc $V = \bar{V}$ où \bar{V} est la fonction holomorphe définie par $\bar{V}(x) = \overline{V(\bar{x})}$. On en déduit que la fonction P vérifie $P(\zeta) = \bar{P}(1/\bar{\zeta})$.

Dans la suite nous supposons que E vérifie

$$(2.2) \quad E > m = \sup_{x \in \mathbb{R}} |V(x)|.$$

2.1. Nous introduisons le changement de variable dépendant de E :

$$(2.3) \quad \begin{aligned} z(x, E) &= \int_0^x (V(t) - E)^{1/2} dt \\ \operatorname{Im}(z) &> 0 \quad \text{si } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

La fonction $x \rightarrow z(x, E)$ est bien déterminée pour $x \in \mathbb{R}$, car la détermination de $(V - E)^{1/2}$ est imposée, et elle s'étend à la surface de Riemann de $(V - E)^{1/2}$. Nous notons

$$(2.4) \quad T(E) = \frac{1}{i} z(\pi) = \int_0^\pi (E - V(t))^{1/2} dt > 0$$

et nous commençons par déterminer un domaine, dépendant de E , où le changement de variable $x \rightarrow z(x) = z(x, E)$ est régulier.

PROPOSITION 2.1. — Soit $U = \{|\operatorname{Im} x| < A\}$ tel que V soit holomorphe dans U et $|V(x)| < E$ dans U . Alors $z(x)$ est holomorphe et injective sur U et vérifie

$$(2.5) \quad \begin{cases} z(\bar{x}) = -\overline{z(x)} \\ z(x + \pi) = z(x) + iT(E). \end{cases}$$

Seule l'injectivité n'est pas immédiate. Dans U on a $\operatorname{Re}((E-V)^{1/2}) > 0$ et si $x \in U$, $y \in U$:

$$(2.6) \quad z(x) - z(y) = \int_y^x (V(t) - E)^{1/2} dt = iE^{1/2}(x-y) - i \int_y^x \frac{V(t) dt}{(E-V)^{1/2} + E^{1/2}}.$$

Donc si $x \neq y$ on obtient

$$|z(x) - z(y) - iE^{1/2}(x-y)| < E^{1/2}|x-y|$$

qui implique $z(x) \neq z(y)$.

Pour établir une estimation sur $z(x)$ nous introduisons les fonctions \tilde{M} et M . Si V s'étend holomorphiquement à la bande maximale $|\operatorname{Im} x| < A_0$, soit $\tilde{M} : [0, A_0[\rightarrow [m, +\infty[$ définie par

$$\tilde{M}(A) = \sup \{ |V(t)|; |\operatorname{Im} t| \leq A \}$$

et soit M la fonction inverse de \tilde{M} . On pose

$$M(E) = \sup \{ 0 < A \leq A_0; |V(x)| < E \text{ dans } |\operatorname{Im} x| < A \}.$$

Il est bien connu que la fonction $\operatorname{Log} \tilde{M}$ est convexe.

En appliquant le théorème des 3 droites de Hadamard à la fonction $V(y)$ et aux droites $\operatorname{Im} y = 0$, $\operatorname{Im} y = |\operatorname{Im} x|$ et $\operatorname{Im} y = A$, on obtient :

$$|V(x)| \leq m \exp \left(\frac{|\operatorname{Im} x|}{A} \operatorname{Log} \left(\frac{\tilde{M}(A)}{m} \right) \right).$$

En faisant tendre A vers $M(E)$, on obtient

$$(2.7) \quad |V(x)| \leq m \exp \left(\frac{|\operatorname{Im} x|}{M(E)} \operatorname{Log} \left(\frac{E}{m} \right) \right).$$

Remarquons que $M(E)$ est une fonction croissante, égale à $+\infty$ si V est constant. Si V n'est pas une fonction entière, A_0 est fini et $M(E)$ tend vers A_0 quand E tend vers $\sup \tilde{M}$. Par contre si V est une fonction entière non constante, $M(E)$ tend vers l'infini plus lentement que toute puissance positive de E . En effet, V qui est périodique ne peut être un polynôme de x et la fonction $\tilde{M}(A)$ croît alors plus vite que toute puissance de A . Par exemple, si V est un polynôme trigonométrique de la forme (1.9), c'est-à-dire une perturbation de $\mu \cos 2Nx$, on a :

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \tilde{M}(A) &= \frac{\mu}{2} e^{2NA} (1 + O(e^{-2A})) \\ M(E) &= \frac{1}{2N} \operatorname{Log} \frac{2E}{\mu} + O(E^{-1/N}) \end{aligned}$$

Finalement, nous donnons une estimation sur la largeur de l'image de la plus grande bande où la proposition (2. 1) s'applique :

PROPOSITION 2. 2. — L'application $x \mapsto z(x, E)$ est injective dans le domaine $|\operatorname{Im} x| < M(E)$ et l'image de ce domaine contient la bande :

$$(2. 9) \quad |\operatorname{Re} z| < M(E) E^{1/2} (1 - 2(1 - \operatorname{Log} 2) (\operatorname{Log}(E/m))^{-1}).$$

En effet pour $0 < A \leq M(E)$, l'image de la bande $|\operatorname{Im} x| < A$ contient une bande de largeur maximale $|\operatorname{Re} z| < \lambda(A, E)$. Pour minorer $\lambda(A, E)$ il faut minorer $|z(x) - z(\operatorname{Re} x)|$ pour $|\operatorname{Im} x| = A$. D'après (2. 6) et la majoration (2. 7) sur $|V|$ on obtient

$$\lambda(A, E) \geq AE^{1/2} - \int_0^A \frac{m(E/m)^{s/M}}{(E - m(E/m)^{s/M})^{1/2} + E^{1/2}} ds.$$

L'intégrale qui figure au deuxième membre se calcule explicitement en utilisant la variable

$$\sigma(s) = 1 + \left(1 - \left(\frac{E}{m} \right)^{s/M-1} \right)^{1/2}$$

et on obtient

$$\lambda(A, E) \geq AE^{1/2} - 2ME^{1/2} \left(\operatorname{Log} \left(\frac{E}{m} \right) \right)^{-1} \left[\operatorname{Log} \left(\frac{\sigma(A)}{\sigma(0)} \right) + \sigma(0) - \sigma(A) \right].$$

Ensuite on remarque que $\sigma(A)$ est décroissante pour $0 < A < M(E)$, avec

$$\sigma(M(E)) = 1, \quad \sigma(0) = 1 + \left(1 - \left(\frac{E}{m} \right)^{-1} \right)^{1/2} = 2 - O(E^{-1}).$$

On obtient donc pour $0 \leq A \leq M(E)$ la majoration

$$\operatorname{Log} \left(\frac{\sigma(A)}{\sigma(0)} \right) + \sigma(0) - \sigma(A) \leq 1 - \operatorname{Log} 2$$

d'où on tire la minoration de $\lambda(M(E), E)$ qui donne (2. 9).

2. 2. Nous supposons que la fonction V s'étend holomorphiquement à un domaine U . Nous rappelons d'abord des définitions classiques (voir par exemple Sibuya [14]).

DÉFINITION 2. 1. — Le paramètre E étant fixé, on appelle point tournant de l'équation de Hill un point x_0 de U tel que $V(x_0) = E$. Le point tournant x_0 est dit simple si $V'(x_0) \neq 0$. On appelle lignes de Stokes les courbes de niveau de $\operatorname{Re}(z(x))$ et antilignes Stokes celles de $\operatorname{Im}(z(x))$, où $z(x) = \int_{x_1}^x (V(t) - E)^{1/2} dt$, x_1 quelconque.

Les points tournants dépendent de E . Ce sont des points singuliers pour le changement de variable $x \mapsto z(x)$. Par définition, pour $E > m$, il n'y a pas de points tournants dans la

bande de sécurité $|\operatorname{Im} x| < M(E)$. On remarque aussi que pour presque toute valeur de E les points tournants sont simples.

Les lignes de Stokes sont régulières en dehors des points tournants et des singularités de $V(x)$. Elles sont orthogonales aux antilignes de Stokes.

Remarquons que dans certains ouvrages les noms sont échangés et ce sont les lignes de niveaux de $\operatorname{Im}(z(x))$ qui sont appelées lignes de Stokes. Parfois aussi les appellations précédentes sont réservées aux courbes de niveaux particulières de $\operatorname{Re}(z(x))$ et $\operatorname{Im}(z(x))$ qui aboutissent à un point tournant ou à une singularité de $V(x)$.

Si x_0 est un point tournant simple, on a $V(x_0) = E$, $V'(x_0) \neq 0$ et

$$z(x) - z(x_0) = (V'(x_0))^{1/2} \frac{2}{3} (x - x_0)^{3/2} (1 + g(x - x_0))$$

avec g holomorphe au voisinage de 0 et $g(0) = 0$.

On en déduit l'allure des lignes de Stokes au voisinage de x_0 . Il y en a 3 qui partent de x_0 avec des demi-tangentes initiales d'argument

$$\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \operatorname{Arg}(V'(x_0)) \left(\bmod \frac{2\pi}{3} \right).$$

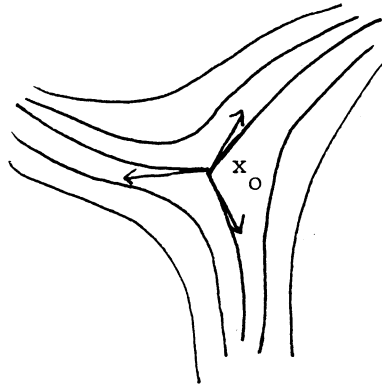


Fig. 1. — Allure des lignes de Stokes près d'un point tournant simple.

Nous établissons maintenant la configuration des points tournants et des lignes de Stokes pour des potentiels polynômes trigonométriques réels. Soit $V(x)$ de la forme (1.9). On pose $\zeta = e^{2ix}$ et $c_N = \mu/2$ ce qui permet d'écrire

$$(2.11) \quad \begin{aligned} V(x) &= P(\zeta(x)) \\ P(\zeta) &= \sum_{-N}^N c_n \zeta^n. \end{aligned}$$

Comme V est réel, on a $P(\zeta) = \overline{P(\zeta^{-1})}$ et il est clair que l'équation $P(\zeta) = E$ a $2N$ racines qui pour E grand, sont proches des racines N -ièmes de E/c_{-N} et de leurs inverses. Plus précisément posons :

$$(2.12) \quad P(\zeta) = c_{-N} \zeta^{-N} \Phi(\zeta)$$

où Φ est donc un polynôme de degré $2N$

$$(2.13) \quad \Phi(\zeta) = \sum_0^{2N} \gamma_j \zeta^j, \quad \gamma_j = (c_{-N})^{-1} c_{j-N}.$$

On a donc $\gamma_0 = \Phi(0) = 1$ et $\gamma_N = 0$ si V est de la forme (1.9). Enfin V est déterminé si on connaît μ et les coefficients $\gamma_1, \dots, \gamma_{N-1}$.

PROPOSITION 2.3. — Soit V comme ci-dessus. Pour E assez grand, les points tournants sont simples et peuvent se regrouper en deux familles, $\{x_k, k \in \mathbb{Z}\}$ avec $\text{Im } x_k > 0$ et la famille des conjugués. On a le développement asymptotique :

$$(2.14) \quad x_k = \frac{i}{2N} \text{Log} \left(\frac{2E}{\mu} \right) + \frac{k\pi}{N} + \sum_1^{\infty} v_j \left(\left(\frac{\mu}{2E} \right)^{1/N} e^{2ik\pi/N} \right)^j$$

où la série $F(t) = \sum_1^{\infty} v_j t^j$ a un rayon de convergence non nul. De plus, si M divise N , il y a équivalence entre :

- (i) V admet la période π/M .
- (ii) Pour tout j non multiple de M , $v_j = 0$, soit $F(t) = F_1(t^M)$.
- (iii) $x_{k+N/M} = x_k + \pi/M$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall E > E_0$.

Preuve. — On calcule d'abord les racines de $P(\zeta) = E$ qui sont de module inférieur à 1 pour E grand. En posant

$$(2.15) \quad \alpha_k = \left(\frac{\mu}{2E} \right)^{1/N} e^{2ik\pi/N}$$

on les obtient sous la forme

$$(2.16) \quad \zeta_k = \alpha_k f(\alpha_k)$$

où $f(t) = \sum_0^{\infty} \delta_j t^j$ est une série entière à rayon de convergence non nul. Ceci est immédiat car la solution ζ_k de l'équation $P(\zeta) = E$ est solution de

$$\zeta \Phi^{-1/N}(\zeta) = \alpha_k$$

avec $\Phi^{-1/N}(0) = 1$ et le théorème d'inversion locale s'applique. On en déduit la première partie de la proposition en posant $\zeta_k = e^{2ix_k}$ et $F(t) = (1/2i) \text{Log } f(t)$.

On voit de plus que le j -ième coefficient de F est un polynôme quasi homogène de degré j des coefficients $\gamma_1, \dots, \gamma_j$ de Φ . Plus précisément, on a pour $j \geq 1$

$$(2.17) \quad v_j = \frac{1}{2iN} \gamma_j + \text{Pol}(\gamma_1, \dots, \gamma_{j-1})$$

avec

$$(2.18) \quad \text{Pol}(s \gamma_1, s^2 \gamma_2, \dots, s^{j-1} \gamma_{j-1}) = s^j \text{Pol}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{j-1}).$$

En effet, si on pose pour $l \in \mathbb{R}$

$$(2.19) \quad \Phi^l(\zeta) = (\Phi(\zeta))^l = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{l,j} \zeta^j$$

il est clair qu'on a $\gamma_{l,0} = 1$ et pour $j > 1$

$$(2.19) \quad \gamma_{l,j} = l \gamma_j + \text{Pol}(\gamma_1, \dots, \gamma_{j-1})$$

avec d'autres polynômes quasi homogènes de degré j . La quasi-homogénéité se voit en remarquant que $\Phi^l(s\zeta) = (\Phi(s\zeta))^l$. Ensuite quand on applique le théorème d'inversion locale, on obtient $\delta_0 = 1$ et pour $j > 1$

$$(2.20) \quad \delta_j = -\gamma_{-1/N, j} + \text{Pol}(\gamma_{-1/N, 1}, \dots, \gamma_{-1/N, j-1}) = \frac{1}{N} \gamma_j + \text{Pol}(\gamma_1, \dots, \gamma_j)$$

toujours avec des polynômes quasi homogènes, ce dernier point résultant de l'identité formelle :

$$s\zeta = s\zeta \cdot \Phi^{-1/N}(s\zeta) \cdot f(s\zeta \Phi^{-1/N}(s\zeta)).$$

Enfin en prenant le logarithme de f on obtient (2.17).

Pour la deuxième partie de la proposition, il suffit de voir que (iii) équivaut à (ii) et que (i) est équivalent à

(iv) $\gamma_j = 0$ pour tout j non multiple de M .

Or, les identités (2.17) et (2.18) montrent que (iv) équivaut à (ii). La proposition est démontrée.

Pour étudier la configuration globale des lignes et antilignes de Stokes on remarque d'abord que d'après (2.4) et (2.5) elle est symétrique par rapport à l'axe réel et invariante par la translation par π (et par π/M si V est de période π/M). L'axe réel est une ligne de Stokes. Dans le cas général, on peut juste dire que dans une bande autour de l'axe réel, les lignes de Stokes sont d'allure parallèle à l'axe réel. Pour les polynômes trigonométriques réels de la forme (1.9) nous allons dire plus.

On calcule

$$V'(x_k) = \sum_{-N}^N 2i n c_n e^{2inx_k} = 2iNE(1 + O(E^{-1/N}))$$

ce qui donne [à un $O(E^{-1/N})$ près] les directions de départ des lignes de Stokes partant de x_k , à savoir $-\pi/6$, $\pi/2$ et $7\pi/6$ d'après la figure 1.

Considérons d'abord le cas du potentiel de Mathieu $V(x) = \mu \cos 2x$. Les points tournants sont $x_k = k\pi + iy$ et $\bar{x}_k = k\pi - iy$, $k \in \mathbb{Z}$ avec y réel, solution positive de $\mu \operatorname{ch} 2y = E$. Les lignes de Stokes sont comme sur la figure 2.

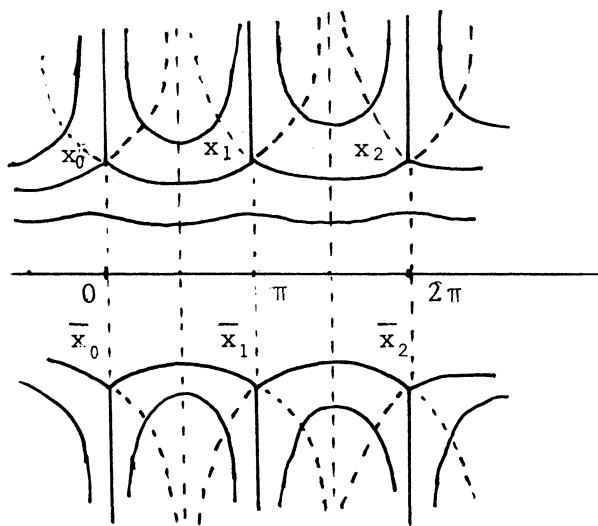


Fig. 2. — — —, ligne de Stokes; - - - - -, antiligne de Stokes.

Les lignes de Stokes aboutissant aux points x_k se raccordent à cause de l'invariance par translation. Pour compléter le dessin, on considère

$$z(s+it) = z(s) + i \int_0^t (V(s+it') - E)^{1/2} dt', \quad 0 < s < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0$$

$$V(s+it') = \mu (\cos 2s \operatorname{ch} 2t' - i \sin 2s \operatorname{sh} 2t').$$

Donc pour $0 < s < \pi/2$ et $0 < t'$, $\operatorname{Im}(V(s+it') - E)^{1/2} < 0$ et $\operatorname{Re}(V(s+it') - E)^{1/2} > 0$. On en déduit que $\operatorname{Re} z(s+it')$ et $-\operatorname{Im} z(s+it')$ sont des fonctions strictement croissantes de t' , ce qui montre que les demi-droites $s+it'$, $0 < s < \pi/2$ et $0 < t'$ coupent transversalement les lignes et les antilignes de Stokes. Par contre, la droite $\pi/2 + i\mathbb{R}$ est une antiligne de Stokes, et la droite $i\mathbb{R}$ est constituée d'un segment d'antiligne de Stokes et de 2 demi-droites lignes de Stokes.

Il reste à examiner la situation pour un polynôme général. D'abord, on déduit immédiatement le cas $V(x) = \mu \cos 2Nx$ du précédent. Ensuite, le dessin est légèrement perturbé, d'autant moins que E est grand. On voit encore que les antilignes de Stokes qui vont à l'infini sont asymptotiques aux droites $\pi/2N + k\pi/N + i\mathbb{R}$. La seule différence avec le dessin non perturbé est que la ligne de Stokes partant de x_k avec la direction $-\pi/6$ peut ne pas aboutir au point x_{k+1} mais partir vers l'infini asymptotiquement à la ligne

de Stokes partant d'un point $x_{k+k'}$ avec la direction $\pi/2$ si $\operatorname{Re} z(x_k) > \operatorname{Re} z(x_{k+k'})$ et $\operatorname{Re} z(x_k) < \operatorname{Re} z(x_{k+j})$ pour $1 < j < k'$, ou bien aboutir à $x_{k+k'}$ si $\operatorname{Re} z(x_k) = \operatorname{Re} z(x_{k+k'})$ et $\operatorname{Re} z(x_k) < \operatorname{Re} z(x_{k+j})$ pour $1 < j < k'$. Il y a le même phénomène avec les lignes de Stokes partant de x_k avec la pente $7\pi/6$. En résumé, on obtient un dessin du type suivant (où on a pris $N=3$), dans le demi-plan $\operatorname{Im} x > 0$ (fig. 3).

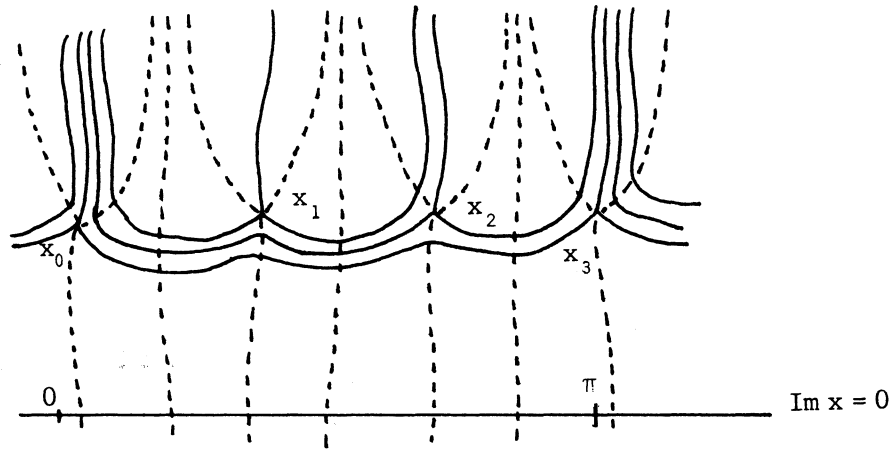


Fig. 3

Par contre les antilignes de Stokes ont la même allure que pour le cas $V(x) = \mu \cos 2Nx$.

2.3. INTÉGRALES D'ACTIONS. — Nous calculons maintenant les actions fondamentales, c'est-à-dire les quantités qui permettent d'exprimer les intégrales de $(V-E)^{1/2}$ sur des lacets fermés. La première est

$$(2.21) \quad \omega_0 = z(\pi) = iT(E) = \int_0^\pi (V-E)^{1/2} dt$$

pour laquelle on a le développement

$$(2.22) \quad T(E) = \pi E^{1/2} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j E^{-j} \right)$$

avec

$$a_j = \beta_j \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (V(t))^j dt$$

et

$$\beta_j = -\frac{(2j-2)!}{2^{2j-1} j! (j-1)!}$$

déterminé par

$$(1-t)^{1/2} = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j t^j.$$

On a la majoration

$$|a_j| \leq \frac{1}{(2j-1)\sqrt{\pi^j}} m^j \left(1 + O\left(\frac{1}{j}\right)\right).$$

Pour l'équation de Mathieu, $V(x) = \mu \cos 2x$, on a $m = \mu$, $a_{2j+1} = 0$ et

$$a_{2j} = \beta_j m^{2j} \frac{2j!}{2^{2j} (j!)^2}.$$

Remarquons qu'avec notre convention $\int_0^\pi V(t) dt = 0$ on a toujours $a_1 = 0$ et

$$(2.23) \quad T(E) = \pi E^{1/2} + O(E^{-3/2}).$$

Considérons les polynômes trigonométriques du type (1.9).

Il est clair que si γ est un lacet dans \mathbb{C} ne rencontrant pas de point tournant l'intégrale

$\int_\gamma (V-E)^{1/2} dt$ s'exprime en une somme finie à coefficients dans \mathbb{Z} :

$$n_0 \omega_0 + \sum_0^{N-1} n_k \omega_k + \sum_0^{N-1} n'_k \omega'_k,$$

avec

$$(2.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_k = z(x_N) - z(x_k) \\ \omega'_k = z(x_k) - z(\bar{x}_k) = 2 \operatorname{Re} z(x_k) \end{array} \right\} 0 \leq k \leq N-1.$$

On définit

$$(2.25) \quad z_k = z(x_k) = \int_0^{x_k} (V-E)^{1/2} dt$$

en choisissant un chemin d'intégration le long duquel $|V| < E$, par exemple la réunion des segments de droite $[0, \operatorname{Re} x_k]$ $[\operatorname{Re} x_k, x_k]$. On a bien alors $\omega_0 = i T(E) = z(x_N) - z(x_0)$. Pour calculer les autres actions on a la

PROPOSITION 2.4. — Soit z_k comme ci-dessus. Avec $\alpha_k = (\mu/2E)^{1/N} e^{2ik\pi/N}$ et $T(E)$ comme en (2.21), on a le développement, pour E grand,

$$(2.26) \quad z_k(E) = \frac{T(E)}{2\pi} \operatorname{Log}(\alpha_k) + E^{1/2} G(\alpha_k)$$

où la série $G(t) = \sum_0^{\infty} \lambda_j t^j$ a un rayon de convergence non nul. De plus, si M divise N , il y a équivalence entre

- (i) V admet la période π/M .
- (ii) Pour tout j non multiple de M , $\lambda_j = 0$, soit $G(t) = G_1(t^M)$.
- (iii) $z_{k+N/M} = z_k + i(T(E)/M)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall E > E_0$.

Preuve. — On utilise la variable $\zeta = e^{2ix}$

$$z_k = \frac{1}{2i} \int_1^{\zeta_k} (P(\zeta) - E)^{1/2} \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2} E^{1/2} \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l E^{-l} \int_1^{\zeta_k} (P(\zeta))^l \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Le développement en série est justifié car sur le chemin d'intégration choisi on a toujours $|P(\zeta)| < E$.

En posant

$$P(\zeta)^l = (c_{-N} \zeta^{-N})^l \Phi^l(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{-N}^l \gamma_{l,j} \zeta^{j-Nl}$$

et en remarquant au passage que $\gamma_{l,j} = 0$ pour $j > 2Nl$ car ici Φ est un polynôme de degré $2N$, on écrit en rappelant $\alpha_k^N = (E/c_{-N})^{-1}$:

$$z_k = \frac{1}{2} E^{1/2} \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l \alpha_k^{Nl} \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_{l,j} \int_1^{\zeta_k} \zeta^{-Nl+j-1} d\zeta$$

soit

$$z_k = \frac{1}{2} E^{1/2} \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l \alpha_k^{Nl} \left(\gamma_{l, Nl} \text{Log } \zeta_k + \sum_{j \neq Nl} \gamma_{l,j} \frac{\zeta_k^{j-Nl} - 1}{j-Nl} \right).$$

Maintenant on rappelle que $\zeta_k = \alpha_k f(\alpha_k)$.

D'autre part on a

$$T(E) = E^{1/2} \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l E^{-l} \int_0^{\pi} (c_{-N} e^{-2iNt} \Phi(e^{2it}))^l dt = \pi E^{1/2} \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l \gamma_{l, Nl} \alpha_k^{Nl}.$$

On en déduit

$$z_k = \frac{T(E)}{2} \text{Log } \zeta_k + \frac{1}{2} E^{1/2} \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l \left(\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq Nl}}^{\infty} \gamma_{l,j} \frac{1}{j-Nl} (\alpha_k^j (f(\alpha_k))^{j-Nl} - \alpha_k^{Nl}) \right)$$

d'où résulte la première partie de la proposition.

Pour démontrer la deuxième partie, nous utilisons le

LEMME 2.1. — Pour p non multiple de N , le p -ième coefficient de G est un polynôme quasi homogène de degré p des coefficients $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ de Φ , de la forme

$$(2.27) \quad \lambda_p = a_p \gamma_p + \text{Pol}(\gamma_1, \dots, \gamma_{p-1})$$

avec $a_p \neq 0$ pour $0 < p < N$ et

$$(2.28) \quad \text{Pol}(s\gamma_1, s^2\gamma_2, \dots, s^{p-1}\gamma_{p-1}) = s^p \text{Pol}(\gamma_1, \dots, \gamma_{p-1}).$$

Supposons le lemme démontré et déduisons-en la deuxième partie de la proposition. D'abord comme dans la proposition 2.3 on remarque que (i) équivaut à

(iv) $\gamma_j = 0$ pour j non multiple de M .

Comme V est réel, on a (cf. 2.13) $\gamma_{N+j} = \overline{\gamma_{N-j}}$ pour $0 < j \leq N$ et comme $\gamma_j = 0$ pour $j > 2N$ on voit que (iv) est équivalent à

(v) $\gamma_j = 0 \forall j$ non multiple de M , $j < N$.

Maintenant remarquons que d'après (2.27) et (2.28) pour p non multiple de M , donc non multiple de N , le polynôme $\lambda_p - a_p \gamma_p$ prend la valeur 0 si $\gamma_j = 0$ pour tous les j inférieurs à p et non multiples de M . On en déduit que (ii) \Rightarrow (v). D'autre part, il est clair que (iv) \Rightarrow (ii). Enfin il est évident que (iii) \Leftrightarrow (ii). La proposition est démontrée.

Preuve du lemme (2.1). — On rappelle qu'on a posé $F(t) = (1/2i) \text{Log } f(t) = \sum_1^{\infty} v_j t^j$ avec les formules (2.17). On pose d'autre part pour $m \in \mathbb{R}$

$$(f(t))^m = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_{m,j} t^j$$

et on remarque que $\delta_{m,0} = 1$ et $\delta_{0,j} = 0$ pour $j > 0$. Il est clair que $\delta_{m,j}$ est un polynôme quasihomogène de degré j des coefficients $\gamma_1, \dots, \gamma_{j-1}$.

On a

$$G(t) = i \left(\sum_{l=c}^{\infty} \beta_l \gamma_{l, Nl} t^{Nl} \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} v_j t^j \right) + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \beta_l \sum_{j \neq Nl} \frac{\gamma_{l,j}}{j - Nl} \left(t^j \left(\sum_{j'=0}^{\infty} \delta_{j-Nl, j'} t^{j'} \right) - t^{Nl} \right)$$

d'où on déduit pour p non multiple de N , avec l_0 partie entière de p/N :

$$\lambda_p = i \sum_{l=0}^{l_0} \beta_l \gamma_{l, Nl} v_{p-Nl} + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^p \sum_{\substack{l=0 \\ Nl \neq j}}^{\infty} \frac{1}{j - Nl} \beta_l \gamma_{l, j} \delta_{j-Nl, p-j}$$

Il en ressort que λ_p est de la forme (2.27). Il reste à calculer a_p . On utilise (2.17) et (2.20) et on remarque que seul le terme avec $l=0$ dans la première somme et ceux avec $j=0$ ou $j=p$ dans la deuxième contiennent γ_p . On a

$$a_p = \frac{1}{2N} + \frac{1}{2} \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{-Nl} \beta_l (-Nl) \frac{1}{N} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{p - Nl} \beta_l l \right)$$

$$a_p = \frac{1}{2N} + \frac{p}{2N} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\beta_l}{p - Nl}$$

Pour $p < N$, a_p est une somme de termes positifs et est non nul. On a aussi l'expression

$$a_p = \frac{1}{2N} - \frac{p}{2N} \int_0^1 \frac{(1-x^N)^{1/2} - 1}{x^{p+1}} dx.$$

Remarque 2.1. — Il est probable que a_p est aussi non nul pour $p > N$. Cela serait utile de le savoir pour considérer des potentiels plus généraux où Φ serait une série non déterminée par ses N premiers coefficients. D'autre part, on peut obtenir aussi l'expression de λ_p pour p -multiple de N , celle-ci n'est plus un polynôme quasi homogène de $\gamma_1, \dots, \gamma_p$, elle dépend de tous les coefficients de Φ . Notons l'exception

$$(2.29) \quad \lambda_0 = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\beta_l}{-Nl} = \frac{1}{2N} \int_0^1 \frac{1 - (1-x)^{1/2}}{x} dx = \frac{1}{N} (1 - \text{Log } 2).$$

3. Solutions exactes et développements

Comme les potentiels que nous considérons sont réels-analytiques, nous pouvons étendre l'équation de Hill au domaine complexe. Nous allons construire des solutions $u(x, E)$ sous la forme de séries de fonctions. Ces séries seront convergentes dans certains domaines et définiront des solutions exactes de l'équation de Hill. Si le potentiel V est une fonction entière, l'équation n'a pas de points singuliers en dehors de l'infini et les solutions construites se prolongent donc en des solutions globales sur \mathbb{C} . Toutefois, nous sommes intéressés par le développement asymptotique de la solution quand E tend vers l'infini. Pour les solutions construites, nous savons trouver ce développement dans certains domaines, par contre il est bien connu que ce développement n'est pas valable partout, même si la solution $u(x, E)$ est définie pour tout x de \mathbb{C} . C'est le phénomène de Stokes. Pourtant, nous allons construire assez de solutions particulières pour être capables d'analyser le comportement global des solutions de l'équation de Hill. La plupart du matériel utilisé ici a été repris de Evgrafov-Fedoruk [4], Sibuya [14], Voros [16] et Ecalle [3], plutôt sous la forme plus élaborée de [3].

Soit $U(E)$ un domaine simplement connexe qui ne contient pas de singularité de $V(x)$ ni de zéros de $V(x) - E$, c'est-à-dire pas de points tournants. Comme les points tournants dépendent continûment de E , nous supposons que U dépend continûment de E . Pour le moment, nous supposons E fixé vérifiant (2.1) et $U = U(E)$ fixé. Dans U nous fixons une détermination de $(V - E)^{1/4}$ et nous choisissons un point $x_0 \in U$. Ainsi la fonction

$$z(x) = z(x, E) = \int_{x_0}^x (V(t) - E)^{1/2} dt$$

est parfaitement définie.

Si U contient le point 0, nous choisissons $x_0 = 0$ et $(V - E)^{1/4}$ d'argument $\pi/4$ pour x réel. Ainsi la fonction $z(x)$ est la même que celle utilisée au paragraphe 2. Quand x

décrit U , $z(x)$ décrit un ouvert d'une surface de Riemann et nous posons

$$(3.1) \quad H(z(x)) = -\frac{1}{4} V'(x) (V(x) - E)^{-3/2} = ((V-E)^{-1/4})' \cdot ((V-E)^{-1/4})'$$

Ensuite on considère des familles de fonctions de z , W_n^+ , $n=0, 1, \dots$ et W_n^- , $n=0, 1, \dots$ satisfaisant

$$(3.2) \quad \begin{aligned} W_0^\pm &= 1 \\ (\partial_z \pm 2) W_{2n+1}^\pm &= -H W_{2n}^\pm \\ \partial_z W_{2n}^\pm &= -H W_{2n-1}^\pm \end{aligned}$$

Nous pouvons définir des solutions de l'équation (1.1) dans U au moins de manière formelle.

PROPOSITION (3.1). — *Les fonctions*

$$(3.3) \quad \begin{aligned} u_+(x, E) &= (V(x) - E)^{-1/4} e^{+z(x, E)} \sum_{n=0}^{+\infty} W_n^+(z(x, E)) \\ \text{et} \\ u_-(x, E) &= (V(x) - E)^{-1/4} e^{-z(x, E)} \sum_{n=0}^{+\infty} W_n^-(z(x, E)) \end{aligned}$$

vérifient de manière formelle l'équation de Hill dans U .

La vérification est immédiate. Posons

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \varphi^+ &= \sum_{n=0}^{\infty} W_{2n+1}^+, & \varphi^- &= \sum_{n=0}^{\infty} W_{2n+1}^- \\ \varphi^{+-} &= \sum_{n=0}^{\infty} W_{2n}^+, & \varphi^{-+} &= \sum_{n=0}^{\infty} W_{2n}^- \end{aligned}$$

On a par les formules (3.2)

$$(3.5) \quad \begin{aligned} (\partial_z + 2) \varphi^+ &= -H \varphi^{+-} \\ (\partial_z - 2) \varphi^- &= -H \varphi^{-+} \\ \partial_z \varphi^{+-} &= -H \varphi^+ \\ \partial_z \varphi^{-+} &= -H \varphi^- \end{aligned}$$

En dérivant logarithmiquement, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{u'_+}{u_+} &= (V-E)^{1/2} \left(H + 1 - H \frac{2\varphi^+}{\varphi^{+-} + \varphi^+} \right) = (V-E)^{1/2} \frac{\varphi^{+-} - \varphi^+}{\varphi^{+-} + \varphi^+} \\ \frac{u'_-}{u_-} &= (V-E)^{1/2} \left(H - 1 - H \frac{2\bar{\varphi}}{\varphi^{-+} + \varphi^-} \right) = (V-E)^{1/2} \frac{-\varphi^{-+} + \varphi^-}{\varphi^{-+} + \varphi^-} \end{aligned}$$

d'où on tire

$$(3.6) \quad \begin{cases} u'_+(x, E) = (V(x) - E)^{1/4} e^{z(x, E)} (\varphi^{+-}(x, E) - \varphi^+(x, E)) \\ u'_-(x, E) = (V(x) - E)^{1/4} e^{-z(x, E)} (-\varphi^{-+}(x, E) + \varphi^-(x, E)). \end{cases}$$

De même, on calcule

$$\begin{aligned} \frac{u''_+}{u'_+} &= (V - E)^{1/2} \left(-H + 1 + H + \frac{2\varphi^+}{\varphi^{+-} - \varphi^+} \right) = (V - E)^{1/2} \frac{\varphi^{+-} + \varphi^+}{\varphi^{+-} - \varphi^+} = (V - E) \frac{u_+}{u'_+} \\ \frac{u''_-}{u'_-} &= (-E)^{1/2} \left(-H - 1 + H + \frac{2\varphi^-}{-\varphi^{-+} + \varphi^-} \right) = (V - E)^{1/2} \frac{\varphi^{-+} + \varphi^-}{-\varphi^{-+} + \varphi^-} = (V - E) \frac{u_-}{u'_-} \end{aligned}$$

et on voit que u_+ et u_- sont solutions de l'équation.

Nous allons maintenant construire des familles W_n^+ et W_n^- satisfaisant (3.2). Comme U est simplement connexe, on voit que W_n^\pm est bien défini, à une constante près, par la connaissance de W_{n-1}^\pm .

Nous choisissons donc 2 points x_+ et x_- de U appelés points-base de u_+ et de u_- respectivement et nous imposons, pour fixer les constantes d'intégration :

$$(3.7) \quad W_n^+(x_+) = 0, \quad W_n^-(x_-) = 0, \quad \forall n \geq 1.$$

Maintenant on obtient immédiatement des expressions intégrales de W_n^\pm . Désignons par $\gamma_\pm = \gamma(x_\pm, x)$ un chemin dans U d'origine x_\pm et d'extrémité x , $\tilde{\gamma}_\pm = \tilde{\gamma}(z_\pm, z)$ l'image de γ_\pm par $x \rightarrow z(x)$, $\Gamma_n(x_\pm, x)$ l'ensemble des n -uplets (x_1, x_2, \dots, x_n) rangés dans cet ordre sur le chemin γ_\pm , $\tilde{\Gamma}_n(z_\pm, z)$ l'image de $\Gamma_n(x_\pm, x)$ par $x \rightarrow z(x)$. On a :

$$(3.8) \quad \begin{aligned} W_{2n+1}^\pm(z) &= - \int_{\tilde{\Gamma}_{2n+1}(z_\pm, z)} e^{\pm 2(z_1 - z_2 + \dots + z_{2n+1} - z)} H(z_1) \dots H(z_{2n+1}) dz_1 \dots dz_{2n+1} \\ W_{2n}^\pm(z) &= \int_{\tilde{\Gamma}_{2n}(z_\pm, z)} e^{\pm 2(z_1 - z_2 + \dots + z_{2n+1} - z_{2n})} H(z_1) \dots H(z_{2n}) dz_1 \dots dz_{2n}. \end{aligned}$$

On a aussi les formules utilisant les variables x . En notant

$$\begin{aligned} I_{2n+1} &= [x_1, x_2] \cup [x_3, x_4] \cup \dots \cup [x_{2n+1}, x] \\ I_{2n} &= [x_1, x_2] \cup [x_3, x_4] \cup \dots \cup [x_{2n-1}, x_{2n}] \end{aligned}$$

où $[x', x'']$ désigne l'arc de γ_\pm d'origine x' et d'extrémité x'' , on peut écrire

$$(3.9) \quad W_n^\pm(z(x)) = (-1)^n \int_{\Gamma_n(x_\pm, x)} \exp\left(\pm 2 \int_{I_n} (V(t) - E)^{1/2} dt\right) \times \prod_{i=1}^n \left(\frac{-(1/4)V'(x_i)}{V(x_i) - E} \right) dx_1 \dots dx_n.$$

Il est clair que (3.2) et (3.7) sont vérifiées et comme U est simplement connexe, les expressions ci-dessus ne dépendent pas des chemins $\gamma(x_{\pm}, x)$ choisis. Maintenant, pour $x \in U$, on peut choisir le chemin $\gamma_{\pm} = \gamma(x_{\pm}, x)$ joignant x_{\pm} à x dans U , comme ci-dessus de telle façon que la fonction $\operatorname{Re}(z(x_1))$ soit à variation bornée quand x_1 décrit γ_{\pm} .

Soit B_{\pm} la partie positive de la variation de $\pm \operatorname{Re}(-z(x_1))$ quand x_1 décrit γ_{\pm} de x_{\pm} à x . Soit $\tilde{\gamma}_{\pm}$ l'image de γ_{\pm}

$$(3.10) \quad \begin{cases} L = \int_{\tilde{\gamma}_{\pm}} |dz| \\ A = \sup_{z_1 \in \tilde{\gamma}_{\pm}} H(z_1). \end{cases}$$

LEMME 3.1. — Pour $n \geq 0$

$$(3.11) \quad |W_n^{\pm}(z)| \leq e^{2B_{\pm}} \frac{A^n L^n}{n!}.$$

Le lemme s'obtient immédiatement à partir des formules (3.8) en majorant sous les signes d'intégration.

Si x varie dans un compact K de U on peut faire des choix de $\gamma(x_{\pm}, x)$ tels que les quantités A, B, L définies ci-dessus soient uniformément majorées sur K . On en déduit la convergence uniforme sur tout compact de U , des séries $\varphi^{+-}, \varphi^+, \varphi^{-+}$ et φ^- et la

PROPOSITION 3.2. — Avec les fonctions W_n^{\pm} définies en (3.8) ou (3.9), les expressions (3.3) définissent de vraies solutions sur U de l'équation de Hill $u'' = (V - E)u$. Ces solutions u_+ et u_- satisfont aux conditions initiales en x_+ et x_- :

$$(3.12) \quad \begin{cases} u_{\pm}(x_{\pm}, E) = (V(x_{\pm}) - E)^{-1/4} e^{\pm z(x_{\pm}, E)} \\ u'_{\pm}(x_{\pm}, E) = \pm (V(x_{\pm}) - E)^{1/4} e^{\pm z(x_{\pm}, E)}. \end{cases}$$

Pour améliorer la majoration (3.11), on a intérêt à diminuer la variation de $\operatorname{Re}(z(x_1))$ le long de γ_{\pm} . Par exemple si $\operatorname{Re}(z(x_1))$ est monotone le long de γ_{\pm} , on a

$$B_{\pm} = \sup(\pm \operatorname{Re}(z(x_{\pm}) - z(x)), 0)$$

donc B_{\pm} est nul si $\pm \operatorname{Re}(z(x_1))$ est croissante le long de γ_{\pm} de x_{\pm} à x . On en déduit la

PROPOSITION 3.3. — S'il existe un chemin γ_{\pm} de x_{\pm} à x tel que $\pm \operatorname{Re}(z(x_1))$ soit croissante le long de γ_{\pm} de x_{\pm} à x , on a avec les notations (3.10)

$$(3.13) \quad |W_n^{\pm}(z)| < \frac{A^n L^n}{n!}.$$

Nous allons donner une autre majoration utile de $|W_n^{\pm}(z)|$, dans le cadre de la Proposition (3.3), en utilisant des normes L^2 .

LEMME 3.2. — Soit $s_0 < s$, $f \in L^2([s_0, s])$, $\|f\|$ la norme de f dans cet espace. Soit pour $n \geq 1$

$$I_{2n} = \int_{s_0 < s_1 < \dots < s_{2n} < s} e^{2(s_1 - s_2 + \dots - s_{2n})} f(s_1) \dots f(s_{2n}) ds_1 \dots ds_{2n}$$

$$I_{2n-1} = \int_{s_0 < s_1 < \dots < s_{2n-1} < s} e^{2(s_1 - s_2 + \dots + s_{2n-1} - s)} f(s_1) \dots f(s_{2n-1}) ds_1 \dots ds_{2n-1}.$$

On a la majoration pour $n \geq 1$

$$(3.14) \quad I_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{[(n+1)/2]} (\|f\|)^n$$

Preuve. — On a trivialement

$$I_{2n} \leq \left(\int_{s_0 < s_1 < s_2 < s} e^{2(s_1 - s_2)} |f(s_1)| |f(s_2)| ds_1 ds_2 \right)^n \leq \left(\int_{t < 0} e^{2t} \|f\|^2 dt \right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \|f\|^{2n}$$

et

$$I_{2n-1} \leq \left(\frac{1}{2}\|f\|^2\right)^{n-1} \left(\int_{s_0 < s' < s} e^{2(s' - s)} |f(s')| ds' \right) \leq \frac{1}{2^n} \|f\|^{2n-1}.$$

Soit maintenant γ_{\pm} comme dans la Proposition (3.3). On suppose de plus $d(\operatorname{Re} z)/d|z|$ non nul le long de $\tilde{\gamma}_{\pm}$ et même minoré par une constante c , $0 < c < 1$. Alors on va pouvoir prendre $\operatorname{Re} z$ comme variable dans les intégrales (3.8) et obtenir immédiatement à partir du lemme 3.2 la

PROPOSITION 3.4. — Soit γ_{\pm} comme ci-dessus.

On a pour $n \geq 1$

$$(3.15) \quad |W_n^{\pm}(z)| \leq \frac{1}{2^{[(n+1)/2]}} \frac{1}{c^n} \|H(z)\|_{L^2(\tilde{\gamma}_{\pm})}^n.$$

Remarquons que si γ_{\pm} est une antiligne de Stokes on peut prendre $c=1$ dans la majoration précédente. Par contre, si le chemin γ_{\pm} commence à devenir parallèle aux lignes de Stokes, $1/c$ devient de plus en plus grand.

Nous allons maintenant calculer les wronskiens de 2 solutions de l'équation de Hill. Rappelons que si u et u_0 sont solutions sur U de l'équation $u'' = (V - E)u$, le déterminant wronskien

$$W(u, u_0) = u u_0' - u_0 u'$$

ne dépend que de E et est nul si et seulement si u et u_0 sont linéairement dépendantes.

PROPOSITION 3.5. — Soient u_+ et u_- les solutions de l'équation (1.1) définies par les formules (3.3) et (3.8), les points-base étant x_+ et x_- . Soient u_+^0 et u_-^0 d'autres solutions

du même type, les points-base étant x_+^0 et x_-^0 . On a avec les notations (3.4)

$$(3.16) \quad \begin{aligned} W(u_+, u_-) &= -2 \varphi^{+-}(x_-) = -2 \varphi^{-+}(x_+) \\ W(u_+, u_+^0) &= 2 e^{2z(x_+^0)} \varphi^+(x_+^0) = -2 e^{2z(x_+)} \varphi_0^+(x_+) \\ W(u_-, u_-^0) &= -2 e^{-2z(x_-^0)} \varphi^-(x_-^0) = 2 e^{-2z(x_-)} \varphi_0^-(x_-). \end{aligned}$$

C'est une vérification immédiate en calculant le wronskien aux points base et en utilisant (3.12). Nous utiliserons surtout la première de ces formules. Remarquons que si on prend $x_+ = x_-$ on a $W(u_+, u_-) = -2$.

4. Les valeurs propres de l'équation de Hill

3.1. ÉQUATION AUX VALEURS PROPRES. — Les constructions du paragraphe 3 nous permettent de construire pour E grand une fonction $u(x, E)$ telle que (u, \bar{u}) soit une base de l'espace $\mathcal{S}(E)$ des solutions de l'équation de Hill sur \mathbb{R} . A partir de cette fonction, nous allons écrire une équation en E dont les solutions sont les valeurs propres périodiques.

Soit τ la translation par π . Si u est une fonction définie sur \mathbb{R} on pose

$$(4.1) \quad \tau u(x) = u(x - \pi), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Le produit des valeurs propres de $\tau(E)$ est donc égal à 1. Bien sûr, E est valeur périodique si et seulement si $\tau(E)$ admet 1 ou -1 comme valeur propre. Sinon $\tau(E)$ admet 2 valeurs propres réelles distinctes et E est dans un intervalle d'instabilité, ou bien $\tau(E)$ admet 2 valeurs propres non réelles $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$, et E est dans une bande spectrale. L'équation caractéristique de $\tau(E)$ est de la forme

$$(4.3) \quad \lambda^2 - \Delta(E)\lambda + 1 = 0.$$

La fonction $\Delta(E)$ est appelée discriminant de l'équation de Hill et les valeurs propres périodiques sont les racines de $\Delta(E) \pm 2 = 0$. Avec les notations adoptées on a $\Delta(E_n^\pm) = 2 \cdot (-1)^n$.

Exprimons la matrice de $\tau(E)$ dans la base (u, \bar{u}) de $\mathcal{S}(E)$. On obtient

$$(4.4) \quad \begin{cases} \tau u = au + b\bar{u} \\ \tau \bar{u} = \bar{b}u + \bar{a}\bar{u} \end{cases}$$

avec, par la bilinéarité du wronskien :

$$(4.5) \quad a = a(E) = \frac{W(\tau u, \bar{u})}{W(u, \bar{u})}, \quad b = b(E) = \frac{W(u, \tau u)}{W(u, \bar{u})}.$$

PROPOSITION 4.1. — *La matrice $\tau(E)$ admet pour valeur propre $\varepsilon = \pm 1$, c'est-à-dire E est valeur propre périodique si et seulement si E satisfait l'équation aux valeurs propres :*

$$(4.6) \quad a(E) = \varepsilon \pm i |b(E)|.$$

Preuve. — D'après la forme (4.3) de l'équation caractéristique de $\tau(E)$ on a les identités entre fonctions de E :

$$(4.7) \quad \begin{cases} a\bar{a} - b\bar{b} = 1 \\ 2 \operatorname{Re} a = \Delta. \end{cases}$$

On en tire

$$\left(\frac{1}{2}\Delta\right)^2 + (\operatorname{Im} a)^2 = 1 + |b|^2$$

et on en déduit que ε est racine de (4.3) si et seulement si $\operatorname{Re} a = \varepsilon$ et $(\operatorname{Im} a)^2 = |b|^2$, c'est-à-dire $a = \varepsilon \pm i|b|$.

Remarque 4.1. — Pour que E soit valeur propre périodique double il faut et il suffit que $\tau(E) = \pm \operatorname{Id}$, donc que soient satisfaites les deux conditions:

$$\operatorname{Im} a(E) = 0 \quad \text{et} \quad b(E) = 0.$$

Dans la suite nous allons construire $a(E)$ et $b(E)$ réel-analytiques pour $E > E_0$ tels que $\theta(E) = -\operatorname{Arg}(a(E))$ soit une fonction croissante de E et $|b(E)|$ exponentiellement petite quand E tend vers l'infini. Si E^+ et E^- sont deux valeurs très proches solutions respectives de

$$(4.8) \quad \begin{cases} a(E^+) = \varepsilon(1 - i|b(E^+)|) \\ a(E^-) = \varepsilon(1 + i|b(E^-)|). \end{cases}$$

On a:

$$(4.9) \quad \theta(E^+) - \theta(E^-) = \operatorname{Arc} \operatorname{tg}(|b(E^+)|) + \operatorname{Arc} \operatorname{tg}(|b(E^-)|).$$

On en déduira des encadrements de $E^+ - E^-$ si on sait estimer la dérivée de $\theta(E)$ et la valeur absolue de $b(E)$.

4.2. PREUVE DU THÉORÈME 1. — Soit E assez grand. D'après la proposition (2.2) il n'y a pas de points tournants dans la bande de sécurité, $U(E) = \{ | \operatorname{Im} x | < M(E) \}$. L'image de cette bande par l'application $x \mapsto z(x, E)$ contient une bande $| \operatorname{Re} z | < \lambda(M(E), E)$ dont la largeur est minorée en (2.9).

Nous choisissons le point de base $x_0 = x_+^0(E)$ de partie imaginaire positive, dans la bande de sécurité

$$(4.10) \quad x_0(E) = i(1 - \alpha(E))M(E)$$

où $\alpha(E)$ vérifie

$$(4.11) \quad 0 < \varepsilon_0 < \alpha(E) < \varepsilon_1 < 1.$$

On suppose que $(1 - \alpha(E))M(E)$ est une fonction réelle analytique de E .

On peut construire la solution $u_0(x, E)$ dans la bande $U(E)$ de la forme $u_+(\cdot, x_0)$, cette notation signifiant que u_0 est de la forme (3. 3), le point de base étant x_0 . Autrement dit, d'après (3. 12)

$$\begin{aligned}u_0(x_0) &= (V(x_0) - E)^{-1/4} e^{z(x_0)} \\ u'_0(x_0) &= (V(x_0) - E)^{1/4} e^{z(x_0)}\end{aligned}$$

et u_0 est bien définie dans $U(E)$, les estimations du paragraphe 3 étant valables pour les termes de son développement. De même, les fonctions \bar{u}_0 , τu_0 et $\tau \bar{u}_0$ sont définies dans $U(E)$ et on connaît leurs développements.

On rappelle qu'on a choisi la détermination de $W = (V - E)^{1/4}$ d'argument $\pi/4$ pour x réel, c'est-à-dire $W = e^{i\pi/4} (E - V)^{1/4}$ avec $(E - V)^{1/4}$ réel positif pour x réel et E grand. En particulier $\bar{W} = -iW$. D'autre part, $\tau u_0(x) = u_0(x - \pi)$.

On a donc, en utilisant les formules (3. 12) et en calculant les conditions initiales de τu_0 , \bar{u}_0 , $\tau \bar{u}_0$, respectivement aux points $x_0 + \pi$, \bar{x}_0 , $\bar{x}_0 + \pi$:

$$(4. 12) \quad \begin{aligned}u_0 &= u_+(\cdot, x_0) \\ \bar{u}_0 &= iu_-(\cdot, \bar{x}_0) \\ \tau u_0 &= e^{-iT(E)} u_+(\cdot, x_0 + \pi) \\ \tau \bar{u}_0 &= ie^{iT(E)} u_-(\cdot, \bar{x}_0 + \pi).\end{aligned}$$

LEMME 4. 1. — Les termes de la matrice de $\tau(E)$ dans la base (u_0, \bar{u}_0) sont donnés par

$$(4. 13) \quad \begin{aligned}a(E) &= e^{-iT(E)} \frac{\varphi^{+-}(z(\bar{x}_0 + \pi))}{\varphi^{+-}(z(\bar{x}_0))} \\ b(E) &= ie^{iT(E)} e^{2z(x_0)} \frac{\varphi^+(z(x_0 + \pi))}{\varphi^{+-}(z(\bar{x}_0))}\end{aligned}$$

les fonctions φ^{+-} et φ^- étant celles de l'expression (3. 3) de u_0 .

Cela résulte des formules (4. 5) et des expressions

$$\begin{aligned}W(u_0, \bar{u}_0) &= -2i\varphi^{+-}(z(\bar{x}_0)) \\ W(\tau u_0, \bar{u}_0) &= \overline{W(\tau \bar{u}_0, u_0)} = -2ie^{-iT(E)} \varphi^{+-}(z(\bar{x}_0 + \pi)) \\ W(u_0, \tau u_0) &= 2e^{-iT(E)} e^{2z(x_0 + \pi)} \varphi^+(z(x_0 + \pi)) \\ z(x_0 + \pi) &= z(x_0) + iT(E).\end{aligned}$$

La fonction $(1 - \alpha(E)) M(E)$ étant réel-analytique, il est clair que $a(E)$ et $b(E)$ sont des fonctions réel-analytiques de E . D'après (4. 11) et (2. 9) pour E assez grand, tout le rectangle de sommets

$$(4. 14) \quad \begin{aligned}z_0 &= z(x_0) \\ z_1 &= z(x_0 + \pi) = z_0 + iT(E) \\ z_2 &= z(\bar{x}_0) = -\bar{z}_0 \\ z_3 &= z(\bar{x}_0 + \pi) = -\bar{z}_0 + iT(E)\end{aligned}$$

est dans l'image de la bande de sécurité.

On va majorer les termes des développements $\varphi^{+-}(z_2)$, $\varphi^{+-}(z_3)$ et $\varphi^+(z_1)$ en utilisant les estimations de la partie paragraphe 3.

Pour cela on choisit rectilignes les chemins d'intégration $\tilde{\gamma}_i$ image de γ_i , $i=1, 2, 3$.

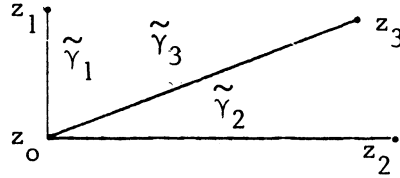


Fig. 4

On note comme au paragraphe 3 L_i la longueur de $\tilde{\gamma}_i$ et A_i le sup de $|H|$ sur $\tilde{\gamma}_i$.

LEMME 4.2. — Pour tout $\varepsilon > 0$ on a pour $E > E_0$ assez grand

$$(4.15) \quad \begin{aligned} L_1 &= T(E) \leq \pi E^{1/2} (1 + \varepsilon) \\ L_2 &= 2K(E) \leq 2E^{1/2} M(E) (1 - \alpha(E) + \varepsilon) \\ A_i &\leq \frac{1}{4} \frac{E^{-1/2}}{\alpha(E) M(E)} (1 + \varepsilon), \quad i=1, 2, 3. \end{aligned}$$

Preuve. — L'estimation sur L_1 résulte de (2.22) et celle sur L_2 immédiatement de (2.9). D'autre part, on a les majorations suivantes dans la bande de sécurité

$$|V(x)| < m \left(\frac{E}{m} \right)^{|\operatorname{Im} x|/M} V'(x) < \frac{E}{M - |\operatorname{Im} x|}$$

d'où on tire

$$|H(z(x))| \leq \frac{1}{4} \frac{E^{-1/2}}{M - |\operatorname{Im} x|} \left(1 - \left(\frac{E}{m} \right)^{(|\operatorname{Im} x| - M)/M} \right)^{-3/2}$$

On en déduit les majorations sur A_2 et A_3 car il est clair que sur γ_2 et γ_3 on a $|\operatorname{Im} x| < (1 - \alpha(E)) M(E)$.

Pour montrer l'estimation sur A_1 il suffit d'estimer la distance maximale d , d'un point de la ligne de Stokes γ_1 joignant x_0 à $x_0 + \pi$, au segment $[x_0, x_0 + \pi]$. On tire de la proposition (2.2)

$$\begin{aligned} dE^{1/2} &\leq 2ME^{1/2} \left(\operatorname{Log} \frac{E}{m} \right)^{-1} \left[\operatorname{Log} \frac{\sigma(A)}{\sigma(0)} + \operatorname{Log} \frac{\sigma(A+d)}{\sigma(0)} + 2\sigma(0) - \sigma(A) - \sigma(A+d) \right] \\ d &\leq 4M(1 - \operatorname{Log} 2) \left(\operatorname{Log} \left(\frac{E}{m} \right) \right)^{-1} \end{aligned}$$

donc d est négligeable devant $\alpha(E) M(E)$ pour E grand et on a bien la majoration (4.15) pour A_1 .

On utilise (3.13) pour majorer $|\varphi^+(z_1)|$. Pour E assez grand

$$A_1 L_1 \leq \frac{\pi}{4} \frac{1+3\varepsilon}{\alpha(E) M(E)}$$

donc d'après l'expression de φ^+

$$(4.16) \quad |\varphi^+(z_1)| < \operatorname{sh} \left(\frac{\pi}{4} \frac{1+3\varepsilon}{\alpha(E) M(E)} \right) < \frac{c_1}{M(E)}$$

D'autre part, on utilise (3.4) pour majorer les termes des séries $\varphi^{+-}(z_2)$ et $\varphi^{+-}(z_3)$

$$(4.17) \quad |W_{2^n}^+(z_2)| \leq \frac{1}{2^n} (L_2 A_2^n) \leq \frac{1}{4^n} \left(\frac{E^{-1/2}}{\varepsilon_0^2 M(E)} \right)^n$$

si on a pris $\varepsilon < \varepsilon_0/3$ dans le lemme (4.2) avec ε_0 de (4.11).

De même on a

$$(4.18) \quad |W_{2^n}^+(z_3)| \leq \left(\frac{c_2}{4} \right)^n \left(\frac{E^{-1/2}}{\varepsilon_0^2 M(E)} \right)^n$$

la constante c_2 plus grande que 1 venant de la pente du chemin γ_3 par rapport aux antilignes de Stokes, pente majorée par $\pi/M(E)$. Rappelons que $M(E)$ peut être borné si $V(x)$ ne s'étend pas en une fonction entière.

On en déduit immédiatement les majorations pour E assez grand :

$$(4.19) \quad \begin{aligned} |\varphi^{+-}(z_2) - 1| &\leq \frac{1}{2} \frac{E^{-1/2}}{\varepsilon_0 M(E)} \\ |\varphi^{+-}(z_3) - 1| &\leq \frac{c_2}{2} \frac{E^{-1/2}}{c_0 M(E)}. \end{aligned}$$

Rappelant que $\theta(E) = \operatorname{Arg}(a(E))$, on obtient le

LEMME 4.3. — Pour E assez grand

$$(4.20) \quad |b(E)| \leq \frac{c_3}{M(E)} e^{-2(1-2\varepsilon_1)E^{1/2}M(E)}$$

$$(4.21) \quad \theta(E) = \pi E^{1/2} (1 + O(E^{-1})).$$

Preuve. — On obtient l'inégalité (4.20) en majorant les termes de l'expression (4.13) de $b(E)$ à l'aide de (4.16) et de la proposition (2.2) qui permet de minorer $|\operatorname{Re} z_0|$. D'autre part

$$\theta(E) = T(E) - \operatorname{Arg}(\varphi^{+-}(z_3)) + \operatorname{Arg}(\varphi^{+-}(z_2))$$

et (4.21) résulte de (2.22) et (4.19). ■

On déduit alors de ce lemme, en considérant les expressions (4.8), les estimations

$$(4.22) \quad \begin{aligned} (E_n^+)^{1/2} &= n + O\left(\frac{1}{n}\right) \\ (E_n^-)^{1/2} &= n + O\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Comme $M(E)$ est à croissance lente, de toutes façons, on peut toujours choisir $\delta(E)$ vérifiant (4.11) et tel que pour n assez grand, on ait pour $E \in I_n$

$$(1 - \delta(E)) M(E) = (1 - \alpha_n) M(n^2)$$

où I_n est défini par

$$(4.23) \quad |E^{1/2} - n| \leq \frac{c_4}{n}$$

Il est alors facile de majorer les dérivées de $\varphi^{+-}(z_2(E))$ et $\varphi^{+-}(z_3(E))$ quand E appartient aux intervalles ci-dessus. En effet, il suffit de considérer les expressions $W_{2n}^+(z_i)$, $i=2, 3$ et on obtient sans peine pour $|E^{1/2} - n| \leq c_4/n$

$$(4.24) \quad \theta'(E) = \frac{\pi}{2} E^{-1/2} (1 + O(E^{-1})) = \frac{\pi}{2n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Maintenant on peut utiliser (4.20) et obtenir de l'expression (4.9), l'encadrement

$$(4.25) \quad \frac{4n}{\pi} \left(1 - \frac{c_2}{n^2}\right) \inf_{E \in I_n} |b(E)| \leq \gamma_n \leq \frac{4n}{\pi} \left(1 + \frac{c_2}{n^2}\right) \sup_{E \in I_n} |b(E)|$$

d'où on tire trivialement (1.5) et le théorème 1. Le corollaire 1 n'en est qu'un cas particulier.

4.3. PREUVE DU THÉORÈME 2. — Dans le cas où V est un polynôme trigonométrique, on a déterminé les points tournants au paragraphe 2. La fonction $x \rightarrow z(x, E)$ est régulière dans la bande de sécurité $U(E)$ et elle peut se prolonger à la surface de Riemann de $(V(x) - E)^{1/2}$. En particulier on peut la prolonger sans ambiguïté sur les droites $\operatorname{Re} x = (k - 1/2)\pi/N$, $k \in \mathbb{Z}$. Nous choisissons des points-base sur ces droites.

$$(4.26) \quad \begin{aligned} x_k^+ &= \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{N} + i\beta \\ x_k^- &= \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{N} - i\beta \end{aligned} \quad k=0, 1, \dots, N$$

où $\beta > 0$ est un paramètre que nous ferons tendre vers l'infini.

Nous définissons maintenant pour $k=0, 1, \dots, N$ la solution u_k de l'équation de Hill.

$$(4.27) \quad u_k = u_+(\cdot; x_k^+)$$

c'est-à-dire que u_k est de la forme (3.3), le point de base étant x_k^+ . Avec notre choix de la fonction $z(x, E)$, la fonction u_k est exponentiellement petite près de x_k .

Il est clair que l'on a comme précédemment, en remarquant $x_N^+ = x_0^+ + \pi$

$$(4.28) \quad \begin{aligned} \bar{u}_k &= i u_-(\cdot, \bar{x}_k) \\ u_N &= e^{i T(E)} \tau u_0. \end{aligned}$$

Nous calculons maintenant la matrice de $\tau(E)$ dans la base (u_0, \bar{u}_0) définie ci-dessus.

PROPOSITION 4.2 :

$$(4.29) \quad \begin{aligned} a(E) &= e^{i T(E)} \frac{W(u_N, u_0)}{W(u_0, \bar{u}_0)} \\ b(E) &= e^{-i T(E)} W(u_N, \bar{u}_0) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{W(u_k, u_{k+1})}{W(u_{k+1}, \bar{u}_0) W(u_k, \bar{u}_0)}. \end{aligned}$$

En effet d'après (4.5) et (4.28) :

$$\begin{aligned} a(E) &= \frac{W(\tau u_0, \bar{u}_0)}{W(u_0, \bar{u}_0)} = e^{-i T(E)} \frac{W(u_N, \bar{u}_0)}{W(u_0, \bar{u}_0)} \\ b(E) &= \frac{W(u_0, \tau u_0)}{W(u_0, \bar{u}_0)} = e^{-i T(E)} \frac{W(u_k, u_N)}{W(u_0, \bar{u}_0)}. \end{aligned}$$

Si on pose un instant

$$a_k = \frac{W(u_{k+1}, \bar{u}_0)}{W(u_k, \bar{u}_0)}, \quad b_k = \frac{W(u_k, u_{k+1})}{W(u_k, \bar{u}_0)}$$

c'est-à-dire

$$u_{k+1} = a_k u_k + b_k \bar{u}_0$$

on obtient la décomposition de u_N :

$$\begin{aligned} u_N &= \tilde{a} u_0 + \tilde{b} u_0 \\ \tilde{a} &= \frac{W(u_N, \bar{u}_0)}{W(u_0, \bar{u}_0)} = a_{N-1} a_{N-2} \dots a_1 a_0 \\ \tilde{b} &= \frac{W(u_0, u_N)}{W(u_0, \bar{u}_0)} = b_{N-1} + a_{N-1} b_{N-2} + a_{N-1} a_{N-2} b_{N-3} + \dots + a_{N-1} \dots a_1 a_0 \end{aligned}$$

d'où découle (4.29).

On voit donc que $a(E)$ et $b(E)$ s'expriment à l'aide des wronskiens $W(u_k, \bar{u}_0)$ et $W(u_k, u_{k+1})$.

Nous notons maintenant φ_k^{+-} la fonction de z ayant le développement

$$\varphi_k^{+-} = \sum_{n=0}^{\infty} W_{2n, k}^+$$

qui intervient dans le développement de u_k .

Le point-base est donc x_k^+ et la détermination de z choisie au voisinage de x_k^+ est celle obtenue par prolongement analytique de la bande de sécurité jusqu'à x_k^+ , le long de la droite $\operatorname{Re} x = (k-1/2)(\pi/N)$. En rappelant qu'on a posé au paragraphe 2, $z_k = z(x_k)$, le point tournant x_k ayant le développement (2.14), on obtient le

LEMME 4.4 :

$$(4.30) \quad \begin{aligned} W(u_k, \bar{u}_0) &= -2i \varphi_k^{+-}(x_0^-) \\ W(u_k, u_{k+1}) &= -2i e^{2z_k} \varphi_k^{+-}(x_{k+1}^+), \end{aligned}$$

Il faut préciser que pour définir $\varphi_k^{+-}(x_0^-)$ et $\varphi_k^{+-}(x_{k+1}^+)$ on utilise les formules (3.8) ou (3.9) avec les chemins d'intégration γ_k et γ'_k comme suit, pour E assez grand et $\beta > 2E^{1/2} \operatorname{Log}(2E/\mu)$

$$\begin{aligned} \gamma_k &= [x_0^-, y_0^-] \cup [y_0^-, y_k^+] \cup [y_k^+, x_k^+] \\ \gamma'_k &= [x_k^+, x_{k+1}^+] \end{aligned}$$

où on a posé

$$\begin{aligned} y_k^+ &= \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{N} + iE^{1/2} \operatorname{Log} \frac{2E}{\mu} \\ y_0^- &= -\frac{1}{2} \frac{\pi}{N} - iE^{1/2} \operatorname{Log} \frac{2E}{\mu} \end{aligned}$$

donc proches respectivement des milieux de $[x_{k-1}, x_k]$ et $[\bar{x}_{-1}, \bar{x}_0]$.

En particulier γ'_k joint x_k^+ à x_{k+1}^+ en passant au-dessus du point tournant x_k et la dérivée de la détermination de z obtenue au voisinage de x_{k+1}^+ par prolongement analytique le long de γ_k et γ'_k est l'opposée de celle de la détermination obtenue par prolongement le long de γ_{k+1} . On voit donc qu'avec ce choix de z on peut mettre la solution u_{k+1} sous la forme $A u_-(\cdot, x_{k+1}^+)$. Maintenant on détermine $A = i e^{2z_k}$ en comparant les valeurs $z(x_{k+1}^+)$ et $(V x_{k+1}^+ - E)^{1/4}$ obtenues en contournant le point tournant x_k par la gauche et par la droite. Les wronskiens demandés s'obtiennent donc en appliquant la première formule (3.16), et en tenant compte de (4.28).

On peut combiner ce lemme avec la proposition (4.2) pour obtenir des expressions de $a(E)$ et $b(E)$. Toutefois, celles-ci dépendent du paramètre $\beta = \operatorname{Im} x_k^+$. Nous allons faire tendre β vers l'infini pour simplifier les expressions de $a(E)$ et $b(E)$.

PROPOSITION 4.3. — Avec les conventions ci-dessus :

$$(4.31) \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} \varphi_k^{+-}(z(x_{k+1}^+)) = 1$$

$$(4.32) \quad \psi_k(E) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \varphi_k^{+-}(z(x_0^-)) = 1 + O(E^{-1/2} \text{Log } E).$$

Dans la base limite (u_0, \bar{u}_0) , la matrice de $\tau(E)$ s'exprime à l'aide de

$$(4.33) \quad a(E) = e^{-i\tau(E)} \frac{\psi_N(E)}{\psi_0(E)}, \quad b(E) = e^{-i\tau(E)} \psi_N(E) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{e^{2z_k(E)}}{\psi_k(E) \psi_{k+1}(E)}.$$

On démontre d'abord (4.31). On utilise l'expression (3.9) donnant les termes de $\varphi_k^{+-}(z(x_{k+1}^+))$

$$\tilde{W}_{2n} = \int_{\Gamma_{2n}} \exp\left(-2 \int_{I_{2n}} (V-E)^{1/2} dt\right) \prod_{i=1}^{2n} \left(-\frac{1}{4} \frac{V'(x_i)}{V(x_i)-E}\right) dx_1 \dots dx_{2n}$$

où Γ_{2n} et I_{2n} sont définis à partir du chemin γ'_k joignant x_k^+ à x_{k+1}^+ comme dans la partie 3.

On remarque d'abord que pour β grand, le point base x_k^+ est situé entre les antilignes de Stokes issues des points tournants x_{k-1} et x_k . On peut donc choisir γ'_k transversal aux lignes de Stokes tout en restant de longueur uniformément bornée quand β tend vers l'infini. D'autre part, pour β grand et $x_i \in \gamma_k$ on a

$$\frac{V'(x_i)}{V(x_i)-E} = -2iN(1 + O(e^{-2\beta}))$$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée puisque l'exponentielle est toujours de module inférieur ou égal à 1. Mais comme $(V-E)^{1/2}$ est de l'ordre de $e^{N\beta}$ on voit que la fonction à intégrer tend exponentiellement vite vers 0 en dehors de l'ensemble de mesure nulle $\{x_1=x_2, x_3=x_4, \dots, x_{2n-1}=x_{2n}\}$. Donc tous les termes \tilde{W}_{2n} , $n \geq 1$ tendent vers 0 comme $e^{-c\beta}$ avec $c > 0$ quand β tend vers l'infini et on a (4.31).

Maintenant on fait tendre les extrémités x_k^+ et x_0^- du chemin γ_k vers l'infini. D'après l'étude du paragraphe 2 il est clair qu'on peut supposer γ_k transversal aux lignes de Stokes et même prendre $\text{Re } z$ comme variable le long de γ_k , ceci en vue d'appliquer la proposition (3.4). On commence par estimer la fonction $|H(z)|$ le long de γ_k .

LEMME 4.5. — La fonction $\text{Re } z \rightarrow H(z)$, z décrivant γ_k est de carré intégrale et la proposition 3.4 s'applique au chemin infini γ_k .

Preuve du lemme. — Rappelons

$$H(z(x)) = -\frac{1}{4} \frac{V'(x)}{(V(x)-E)^{3/2}}.$$

La majoration pour $|\operatorname{Re} z|$ petit est évidente. Regardons le comportement quand $\operatorname{Re} z \rightarrow -\infty$ c'est-à-dire $\beta' = \operatorname{Im} x \rightarrow +\infty$

$$z(x) \sim i \left(\frac{\mu}{2} \right)^{1/2} \frac{e^{N\beta'}}{N}$$

$$H(z(x)) \sim \frac{1}{4} \frac{-2iN(\mu/2) e^{2N\beta'}}{((\mu/2) e^{2N\beta'})^{3/2}} \sim i \frac{N}{2} \left(\frac{\mu}{2} \right)^{1/2} e^{-N\beta'} \sim \frac{-1}{2z(x)}$$

ce qui montre bien que la proposition (3.4) s'applique.

Enfin, la fonction $|H(z(x))|$ admet des maxima quand γ_k passe entre 2 points tournants, c'est-à-dire quand $|\operatorname{Re} z| \sim E^{1/2} \operatorname{Log}(2E/\mu)$. On a alors $V(x)$ proche de $-E$ et

$$H(z(x)) \sim \frac{1}{4} \frac{-2iNE}{(2E)^{3/2}} \sim \frac{-iN}{4\sqrt{2}} E^{-1/2}.$$

En résumé le graphe de $\operatorname{Re} z \rightarrow |H(z)|$ quand z décrit γ_k à l'allure de la figure 5.

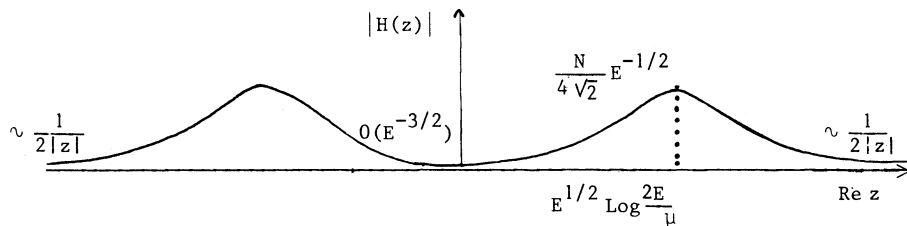


Fig. 5

Fin de la preuve de la proposition (4.3). — Comme on peut appliquer la proposition (3.4) même sur le chemin infini γ_k , on voit que la limite $\psi_k(E)$ quand $\beta \rightarrow \infty$ existe bien et qu'on a (4.32). D'autre part (4.33) résulte immédiatement de (4.29) et (4.30).

Remarque (4.1). — La majoration de $\psi_k(E) - 1$ n'est sans doute pas la meilleure possible, même si elle nous suffit pour la suite. Il est probable qu'on ait $\psi_k(E) - 1 = O(E^{-1/2})$ et même qu'il existe un développement asymptotique de $\psi_k(E)$ en puissances négatives de $E^{1/2}$. Toutefois celui-ci semble délicat à calculer.

On a de même la majoration faible.

$$(4.34) \quad \psi'_k(E) = O(E^{-3/2} \operatorname{Log} E).$$

En effet la fonction $H(z)$ est en fait une fonction de z et de E puisque le changement de variable $x \mapsto z$ dépend de E . Plus précisément, pour E grand près de tout point régulier z_0 , $x = x(z, E)$ est holomorphe des variables $E^{-1/2}(z - z_0)$ et E^{-1} . Il en est de même de la fonction $E^{1/2} H(z, E)$. On en déduit une majoration de $\partial H / \partial E$ le long de $\tilde{\gamma}_k$ et (4.34).

On peut alors conclure comme pour le théorème 1.

On résoud d'abord

$$\theta(E) = -\text{Arg } a(E) = n\pi$$

ce qui donne pour $(E_n^\pm)^{1/2}$ le développement asymptotique commun :

$$(4.35) \quad E_n^{1/2} \sim n \sum_0^\infty d_j \frac{1}{n^{2j}}, \quad d_0 = 1, \quad d_1 = 0.$$

Bien que nous n'ayons pas vérifié que $E^{-1/2} \text{Arg } \Psi_N(E)/\Psi_0(E)$ a un développement qui ne comporte que des puissances entières de E , cela résulte de la méthode WKB standard, et $d_1 = 0$ à cause de (2.23) et (4.34).

On a donc

$$(4.36) \quad \gamma_n \sim \frac{2|b(E_n)|}{\theta'(E_n)} \sim \frac{4}{\pi} E_n^{1/2} (1 + O(E_n^{-1/2})) \left| \sum_{k=0}^{N-1} e^{2z_k(E_n)} (1 + O(E_n^{-1/2})) \right|$$

et d'après (4.35) et (4.32)

$$(4.37) \quad E_n = n + O\left(\frac{1}{n^4}\right), \quad \Psi_k(E_n^\pm) = 1 + O\left(\frac{\text{Log } n}{n}\right), \\ T(E_n) = \pi n + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

D'autre part, d'après la proposition (2.4)

$$z_k(E) = \frac{T(E)}{2\pi} \text{Log } \alpha_k + E^{1/2} \sum_{j=0}^\infty \lambda_j \alpha_k^j \\ \alpha_k = \left(\frac{\mu}{2E}\right)^{1/N} e^{2ik\pi/N}$$

donc on a

$$(4.38) \quad 2z_k(E_n) = \frac{n}{N} \left(\text{Log} \left(\frac{\mu}{2n^2} \right) + 2ik\pi \right) + 2n \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j \left(\frac{\mu}{2n^2} \right)^{j/N} e^{2ijk\pi/N} + O\left(\frac{\text{Log } n}{n}\right)$$

d'où on tire, car $\lambda_0 = (1/N)(1 - \text{Log } 2)$

$$(4.39) \quad \gamma_n = \frac{4n}{\pi} \left(\frac{e^2 \mu}{4n^2} \right)^{n/N} \left| \sum_{k=0}^{N-1} e^{2ink\pi/N} \right. \\ \left. \exp \left(\sum_{j=1}^{N-1} 2n \lambda_j \left(\frac{\mu}{2n^2} \right)^{j/N} e^{2ijk\pi/N} \right) \left(1 + O\left(\frac{\text{Log } n}{n}\right) \right) \right|$$

le théorème 2 est démontré.

Maintenant la question se pose de savoir s'il y a des compensations dans la somme des N termes exponentiels. Il n'y a bien sûr pas de problème si $N=1$ et on retrouve le résultat de [1] en appliquant la formule de Stirling.

COROLLAIRE (4.2). — *Pour l'équation de Mathieu,*

$$V(x) = \mu \cos 2x$$

on a

$$\gamma_n = \frac{\mu^n}{8^{n-1}} \frac{1}{((n-1)!)^2} \left(1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right).$$

On n'a pas écrit $O(\text{Log } n/n)$, en tenant compte de la remarque (4.1).

On obtient aussi la stricte positivité de γ_n dans un cas générique où l'une des exponentielles l'emporte sur les autres. Pour cela on compare les parties réelles de $z_k(E_n)$ pour $k=0, \dots, N-1$. Si c_{N-1} est non nul, $c_{N-1}/c_{-N} = (2/\mu)c_{N-1}$ est non nul et d'après le Lemme (2.1) $\lambda_1 = (2a_1/\mu)\bar{c}_{N-1}$ est non nul. On remarque que si $\lambda_1^N \notin \mathbb{R}^-$, parmi les N nombres $\text{Re}(\lambda_1 e^{2ik\pi/N})$, un seul est plus grand que tous les autres, soit pour $k=k_0$ et on a

$$(4.40) \quad \gamma_n = \frac{4n}{\pi} e^{2 \text{Re } z_{k_0}(n^2)} \left(1 + O\left(\frac{\text{Log } n}{n}\right) \right)$$

Le même raisonnement marche si le premier $j \geq 1$ pour lequel γ_j est non nul, est premier avec N . On a donc le

COROLLAIRE (4.3). — *Soit $V(x)$ de la forme (1.9) et plus précisément*

$$V(x) = \mu \cos 2Nx + \sum_{|n| \leq N_0} c_n e^{2inx}$$

avec N_0 strictement inférieur à N , premier avec N et c_{N_0} non nul. Alors pour n grand, les intervalles d'instabilité s'ouvrent, et $\gamma_n > 0$ si $(c_{N_0})^N \notin \mathbb{R}^-$.

Dans le cas $N=2$, les polynômes qui ne vérifient pas cette condition sont de la forme $V(x) = \mu \cos 4x + \nu \sin 2x$. Ils possèdent la symétrie $V(\pi/2 - x) = V(x)$. Pour $\nu \neq 0$, les gaps se referment-ils vraiment ?

La conjecture suivante est-elle raisonnable ?

CONJECTURE. — Si $V(x)$ de la forme (1.7) n'admet pas une période plus petite que π , alors pour n assez grand, tous les intervalles d'instabilité sont ouverts.

C'est dire que nous pensons que dans l'expression (4.30) il y a, en allant assez loin des termes qui ne se compensent pas, et dans tous les cas on obtient un comportement asymptotique non nul pour γ_n .

On vérifie sans peine que si V à une période π/M , $M > 1$, il y a annulation automatique des termes pour n non multiple de N . On peut aussi remarquer que si la conjecture n'est pas vraie, on découvrira de nouveaux exemples de potentiels pour lesquels de nombreux « gaps » se ferment, ce qui serait très intéressant.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. AVRON et B. SIMON, *The Asymptotics of the Gap in the Mathieu Equation* (*Annals of Physics*, vol. 134, 1981, p. 76-84).
- [2] M. S. P. EASTHAM, *The Spectral Theory of Periodic Differential Equation*, Scottish Academic Press, 1973.
- [3] J. ECALLE, *Cinq applications des fonctions résurgentes*, Prépublications d'Orsay, 1984.
- [4] M. A. EVGRAFOV et M. V. FEDORYUK, *Asymptotic Behaviour as $\lambda \rightarrow \infty$ of the Solutions of the Equation $W''(z) - p(z, \lambda) W(z) = 0$ in the Complex z -Plane* (*Russian Math. Surveys*, vol. 21, 1966, p. 1-48).
- [5] J. GARNETT et E. TRUBOWITZ, *Gaps and Bands of One Dimensional Periodic Schrödinger Operators* (*Comment. Math. Helvetici*, vol. 59, 1984, p. 258-312).
- [6] C. GERARD et A. GRIGIS, *Precise Estimates of Tunneling and Eigenvalues Near a Potential Barrier* [*Journal of Differential Equations* (à paraître)].
- [7] A. GRIGIS, *Sur l'équation de Hill analytique* (*Séminaire Bony-Sjöstrand-Meyer*, 1984-1985, École Polytechnique, exposé n° 16).
- [8] A. GRIGIS, *Estimations asymptotiques des valeurs propres de l'équation de Hill polynomiale* (*Actes des Journées E.D.P. de Saint-Jean-de-Monts*, 1986, conférence n° 7).
- [9] E. M. HARREL II, *On the Effect of the Boundary Conditions on the Eigenvalue of Ordinary Differential Equations* (*American J. of Math.*, supplement 1981, dedicated to P. Hartman, Baltimore John Hopkins Press).
- [10] H. P. MACKEAN et E. TRUBOWITZ, *Hill's Operator and Hyperelliptic Function Theory in the Presence of Infinitely Many Branch Points*, C.P.A.M., vol. 29, 1976, p. 143-226).
- [11] W. MAGNUS et S. WINKLER, *Hill's Equation*, Interscience Publishers, 1966.
- [12] F. PHAM, *Introduction à la résurgence quantique* (*Exposé au Séminaire Bourbaki*, novembre 1985).
- [13] M. REED et B. SIMON, *Methods of Modern Mathematical Physics, IV*, Academic Press, 1978.
- [14] Y. SIBUYA, *Global Theory of a Second Order Linear Ordinary Differential Equation with a Polynomial Coefficient*, North Holland, 1975.
- [15] E. TRUBOWITZ, *The Inverse Problem for Periodic Potentials* (C.P.A.M., vol. 30, 1977, p. 321-337).
- [16] A. VOROS, *The Return of the Quartic Oscillator. The Complex WKB Method* (*Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. 29, n° 3, 1983, p. 211-338).
- [17] W. WASOW, *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations*, Krieger, 1976.

(Manuscrit reçu le 27 avril 1987,
révisé le 9 juin 1987).

Alain GRIGIS,
Centre de Mathématiques
de l'École Polytechnique,
Plateau de Palaiseau,
91128 Palaiseau Cedex,
« Unité associée au C.N.R.S. n° 169 ».