

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

RAPHAËL DOUADY

## **Stabilité ou instabilité des points fixes elliptiques**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 4<sup>e</sup> série*, tome 21, n° 1 (1988), p. 1-46

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1988\\_4\\_21\\_1\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1988_4_21_1_1_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# STABILITÉ OU INSTABILITÉ DES POINTS FIXES ELLIPTIQUES

PAR RAPHAËL DOUADY

---

## TABLE DES MATIÈRES

|  |    |
|--|----|
| I. Introduction . . . . .                                    | 1  |
| II. Premiers résultats . . . . .                             | 2  |
| III. Dédution du théorème 1 à partir du théorème 2 . . . . . | 5  |
| IV. Démonstration du théorème 2. . . . .                     | 9  |
| V. Tores invariants instables. . . . .                       | 27 |
| VI. Diffusion dans les systèmes hamiltoniens. . . . .        | 29 |
| Appendice 1 : Fonctions génératrices . . . . .               | 37 |
| Appendice 2 : Formes normales . . . . .                      | 42 |

## I. Introduction

J. Moser a démontré qu'un point fixe elliptique d'un difféomorphisme de classe  $C^\infty$  du plan préservant les aires est topologiquement stable, moyennant une condition de non dégénérescence portant sur les dérivées jusqu'à l'ordre 3 au point fixe (*voir* [10]). La preuve de ce résultat ne se généralise pas aux difféomorphismes symplectiques d'une variété symplectique de dimension  $2n$ ,  $n \geq 2$ , malgré l'existence de tores invariants de dimension  $n$  au voisinage d'un point fixe totalement elliptique, car le complémentaire de ces tores est connexe et permet la « diffusion » des orbites entre les tores.

Nous montrons ici (§ II-IV) que la stabilité topologique d'un tel point fixe ne peut pas se lire sur le jet à l'ordre infini du difféomorphisme en ce point. Plus précisément, étant donné un difféomorphisme symplectique  $f$  en dimension  $2n$ ,  $n \geq 2$ , et  $m_0$  un point fixe totalement elliptique de  $f$  en lequel  $f$  satisfait certaines conditions de non dégénérescence, nous sommes en mesure de construire deux difféomorphismes symplectiques  $f_0$  et  $g$  ayant

en  $m_0$  même série de Taylor que  $f$  et tels que :

— il existe un voisinage de  $m_0$  feuilleté en tores de dimension  $n$  invariants par  $f_0$ ; en particulier,  $m_0$  est topologiquement stable pour  $f_0$  (cf. II. 2).

—  $m_0$  est un point fixe non topologiquement stable de  $g$  (cf. II. 3, théorème 1).

L'existence de  $f_0$  résulte d'un théorème classique de formes normales (voir l'appendice 2, ou Birkhoff [4], p. 109-115). Nous utilisons, pour  $g$ , une diffusion d'Arnol'd contrôlée. Le principe consiste à construire des chaînes de tores  $T_j$  de dimension  $n-1$ , possédant des variétés stables  $W_g^s(T_j)$  et instables  $W_g^u(T_j)$  de dimension  $n$  telles que, pour chaque indice  $j$ ,  $W_g^u(T_j)$  coupe transversalement  $W_g^s(T_{j+1})$  en au moins un point. Chaque chaîne suit une résonance fixée et tout voisinage de  $m_0$  contient l'extrémité d'une chaîne, l'autre extrémité restant à distance minorée de  $m_0$ . Notons que  $f_0$  et  $g$  peuvent être choisis arbitrairement proches de  $f$  en topologie  $C^\infty$ .

Au paragraphe V, nous énonçons un résultat analogue où le point fixe elliptique est remplacé par un tore invariant fourni par le théorème de Kolmogorov-Arnol'd-Moser.

Les « tores moustachus » d'Arnol'd sont à l'origine de ces constructions (voir Arnol'd-Avez [3], ou l'exemple de [1] que le théorème 2 généralise).

L'idée a déjà été utilisée par P. Le Calvez et l'auteur dans [8] pour construire un exemple de point fixe elliptique instable en dimension 4.

La diffusion d'Arnol'd dans les systèmes hamiltoniens n'apparaît qu'à partir de la dimension 6. Le sujet est étudié par A. Delshams Valdés dans [6]. Au paragraphe VI, nous étendons les théorèmes 1 (§ II) et 3 (§ V) au cas des points singuliers et des tores invariants des systèmes hamiltoniens. Bien entendu, un point singulier linéairement stable ne peut être topologiquement instable que si, en ce point, la dérivée seconde du hamiltonien (supposée non dégénérée) n'est pas de signe constant, sinon les surfaces d'énergie voisines de la valeur critique délimiteraient des voisinages invariants. V. N. Tkhai dans [16] annonce un résultat qui contredit exactement les théorèmes 1 et 5 du présent article mais les idées qu'il expose sont imprécises et nous démontrons ici qu'elles ne peuvent aboutir.

Notons que les temps nécessités par les orbites pour « diffuser » suivant le procédé décrit ici sont bien supérieurs aux minoration obtenues par Nekhoroshev [1].

### Remerciements

Je tiens à remercier Michel Herman de son soutien constant, ainsi que Håkan Eliasson de ses remarques fécondes.

## II. Premiers résultats

II. 1. Soient  $(M, \omega)$  une variété symplectique de dimension  $2n$ ,  $n \geq 2$ , et  $f$  un difféomorphisme symplectique de  $M$  (i. e.  $f^* \omega = \omega$ ) de classe  $C^\infty$ . On suppose que le point  $m_0 \in M$

est un point fixe totalement elliptique de  $f$ , c'est-à-dire que  $f(m_0) = m_0$  et que les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n$  de  $Df(m_0)$  sont de module 1 et non réelles. Cette situation est fréquente puisque, lorsque les  $\lambda_i$  sont distincts, un difféomorphisme symplectique  $f$  voisin au sens  $C^1$  de  $f$  possédera un point fixe  $m'_0$  totalement elliptique et voisin de  $m_0$ .

Rappelons que  $m_0$  est dit *topologiquement stable* (ou stable au sens de Lyapounov) s'il possède une base de voisinages  $(U_i)_{i \in I}$  positivement invariants par  $f$  (i. e.  $f(U_i) \subset U_i$ ), ou encore,  $d$  désignant une métrique sur  $M$ , si :  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tel que  $\forall m \in M, \forall l \in \mathbb{N}$ ,

$$d(m_0, m) < \delta \Rightarrow d(m_0, f^l(m)) < \varepsilon.$$

Dans le cas symplectique, les stabilités topologiques de  $m_0$  pour  $f$  et pour  $f^{-1}$  sont équivalentes, car  $f$  préserve une mesure chargeant les ouverts.

II. 2. On sait depuis le XIX<sup>e</sup> siècle (voir Birkhoff [4], p. 109-115 ou l'appendice 2), que lorsque les  $\lambda_i$  ne satisfont aucune condition de résonance

$$\left[ \text{i. e. } (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n \text{ et } \prod_{i=1}^n \lambda_i^{k_i} = 1 \Rightarrow k_1 = \dots = k_n = 0 \right],$$

il est possible de trouver, sur un voisinage  $B$  de  $m_0$  des coordonnées  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  de classe  $C^\infty$  (mais en général non analytiques), nulles en  $m_0$ , canoniques (i. e.  $\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$ ) dans lesquelles  $f$  possède un contact d'ordre infini avec une « forme normale » :

$$\begin{aligned} f_0 : & (\sqrt{r_1} \cos \pi^2 \theta_1, \dots, \sqrt{r_n} \cos 2\pi \theta_n, \sqrt{r_1} \sin 2\pi \theta_1, \dots, \sqrt{r_n} \sin 2\pi \theta_n) \\ & \mapsto (\sqrt{R_1} \cos 2\pi \theta_1, \dots, \sqrt{R_n} \cos 2\pi \theta_n, \sqrt{R_1} \sin 2\pi \theta_1, \dots, \sqrt{R_n} \sin 2\pi \theta_n) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} R_i &= r_i, \\ \Theta_i &= \theta_i + \tau_i(r_1, \dots, r_n). \end{aligned}$$

Les fonctions  $\tau_i, 1 \leq i \leq n$ , définies sur un voisinage  $\Delta$  de 0 dans  $\mathbb{R}_+^n$ , sont de classe  $C^\infty$  et,  $f_0$  étant symplectique, la forme  $\sum_{i=1}^n \tau_i dr_i$  est fermée (on a  $\omega = -\pi \sum_{i=1}^n d\theta_i \wedge dr_i$ ). En outre  $\lambda_i = e^{2\pi \sqrt{-1} \tau_i(0)}$ . Nous noterons de la même manière  $H_0$  la fonction de  $\Delta$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant  $H_0(0) = 0$  et  $dH_0 = \sum \tau_i dr_i$  et la fonction qui à  $m = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in B$  associe  $H_0(x_1^2 + y_1^2, \dots, x_n^2 + y_n^2)$ . La restriction de  $f_0$  à  $B$  est alors le temps 1 du champ hamiltonien  $X_{H_0}$  associé à  $H_0$  (caractérisé par le produit intérieur  $X_{H_0} \lrcorner \omega = dH_0$ ) :

$$f_0|_B = \exp X_{H_0}.$$

Nous montrons à l'appendice 1 comment l'on peut, quitte à diminuer  $B$ , prolonger  $f_0$  à la variété  $M$  entière de façon symplectique et de telle manière que  $f_0$  et  $f$  coïncident en dehors d'un voisinage donné de  $m_0$  et soient arbitrairement proches en topologie  $C^\infty$ .

Il est clair que  $m_0$  est un point fixe topologiquement stable de  $f_0$ , puisque  $f_0$  préserve au voisinage de  $m_0$  la quantité  $\sum x_i^2 + y_i^2$ .

II. 3. THÉORÈME 1. — Si  $\det d\tau(0) \neq 0$ , il existe un difféomorphisme symplectique  $g$  de  $M$ , de classe  $C^\infty$ , tangent à  $f$  à l'ordre infini en  $m_0$  et arbitrairement voisin de  $f$  en topologie  $C^\infty$ , dont  $m_0$  est un point fixe non topologiquement stable.

II. 4. Ce théorème sera une conséquence du théorème suivant (cf. § III), dans lequel la variété  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{T}^* \mathbb{T}^n$  (où  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ) est munie d'une distance  $d$  et de sa structure symplectique canonique :

$$\omega = \sum_{i=1}^n d\theta_i \wedge dr_i$$

[un point courant de  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$  est noté  $(\theta_1, \dots, \theta_n, r_1, \dots, r_n) = (\theta, r)$ ] et où  $\text{Diff}_\omega^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$  désigne le groupe des  $C^\infty$ -difféomorphismes symplectiques de  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$  muni de la topologie de Whitney  $C^\infty$ .

THÉORÈME 2. — Soient  $n \geq 2$  et  $f_0 \in \text{Diff}_\omega^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$  une transformation de la forme :

$$(\theta, r) \mapsto f_0(\theta, r) = (\theta + \tau(r) \pmod{\mathbb{Z}^n}, r)$$

où  $\tau_i = \partial H_0 / \partial r_i$ ,  $H_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ . On suppose que  $\tau$  est un difféomorphisme global de  $\mathbb{R}^n$ .

Considérons un chemin  $(a_t)_{t \in [0, 1]}$  de classe  $C^\infty$  dans  $\mathbb{R}^n$  pour lequel il existe un multientier  $(k_0, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \setminus \{0\}$  vérifiant pour tout  $t \in [0, 1]$  :

$$\sum_{i=1}^n k_i \tau_i(a_t) = k_0$$

et

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial \tau_i}{\partial r_j}(a_t) k_i k_j \neq 0.$$

Pour chaque voisinage  $U$  de la courbe  $\Gamma = \{a_t, t \in [0, 1]\}$  et chaque voisinage  $\mathcal{V}$  de  $f_0$  dans  $\text{Diff}_\omega^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$  il existe un  $f_1 \in \mathcal{V}$  coïncidant avec  $f_0$  en dehors de  $\mathbb{T}^n \times U$  tel que tout ouvert  $\Omega$  contenant  $\mathbb{T}^n \times \{a_0\}$  possède un point  $x$  vérifiant

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} d(f_1^l(x), \mathbb{T}^n \times \{a_1\}) = 0.$$

### III. Déduction du théorème 1 à partir du théorème 2

III. 1. On suppose le théorème 2 établi. Le difféomorphisme symplectique  $f$  de  $M$  étant donné et satisfaisant aux hypothèses du théorème 1 [ $f$  est de classe  $C^\infty$ , les  $\lambda_i$  sont multiplicativement indépendants et  $\det d\tau(0) \neq 0$ ], on a vu que l'on peut construire un voisinage  $B$  de  $m_0$  et un difféomorphisme symplectique  $f_0$  de  $B$  qui est « complètement intégrable » et a un contact d'ordre infini en  $m_0$  avec  $f$ .

Nous conservons les notations de II. 2 ( $x_i, y_i, r_i = x_i^2 + y_i^2$ , etc.) et notons

$$B_v = \{m \in B / \sum r_i < v\}.$$

On suppose que  $B = B_\rho$ ,  $\rho > 0$  et on définit  $B' = B_{\rho'}$ , où  $\rho' \in ]0, \rho[$  est fixé. La variété  $M$  est par ailleurs, munie d'une métrique  $d$ . Quitte à diminuer  $\rho$ , il est possible de prolonger  $f_0|_{B'}$  en un  $C^\infty$ -difféomorphisme symplectique de  $M$ , noté encore  $f_0$ , et coïncidant avec  $f$  en dehors de  $B$ . La preuve s'aide de fonctions génératrices et se trouve à l'appendice 1.

III. 2. Soit  $E^\infty$  l'ensemble des difféomorphismes symplectiques de classe  $C^\infty$  de  $M$  qui coïncident avec  $f$  en dehors de  $B$ . On munit  $E^\infty$  d'une métrique complète  $d_\infty$  compatible avec la topologie  $C^\infty$ . Le réel  $\varepsilon > 0$  étant fixé, quitte à diminuer  $\rho'$ , il est loisible de supposer que

$$d_\infty(f_0, f) < \varepsilon/2,$$

car  $f_0$  et  $f$  sont tangents à l'ordre infini en  $m_0$ .

Nous allons construire le difféomorphisme  $g$  requis comme limite de difféomorphismes  $g_N \in E^\infty$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , ayant les propriétés suivantes :

- (i)  $g_N$  coïncide avec  $f_0$  sur un voisinage  $V_N$  de  $m_0$ .
- (ii)  $\forall N \geq 0$ ,

$$d_\infty(g_N, g_{N+1}) < \frac{\varepsilon}{2^{N+2}}$$

et  $g_0 = f_0$ .

La seconde propriété entraîne la convergence des  $g_N$  vers un élément  $g$  de  $E^\infty$  tel que  $d_\infty(f, g) < \varepsilon$ , et la première assure la tangence à l'ordre infini de  $f$  et  $g$  en  $m_0$ .

III. 3. Soit :

$$\Delta = \left\{ r \in \mathbb{R}^n / \forall i, r_i > 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n r_i < \rho \right\}.$$

Si  $\rho$  est assez petit, l'application

$$\tau: \bar{\Delta} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

est un  $C^\infty$ -difféomorphisme de  $\bar{\Delta}$  sur son image  $\tau(\bar{\Delta})$ . On pose

$$\tau_{ij} = \frac{\partial \tau_i}{\partial r_j},$$

$$\Delta' = \left\{ r \in \Delta / \sum_{i=1}^n r_i < \rho' \right\}$$

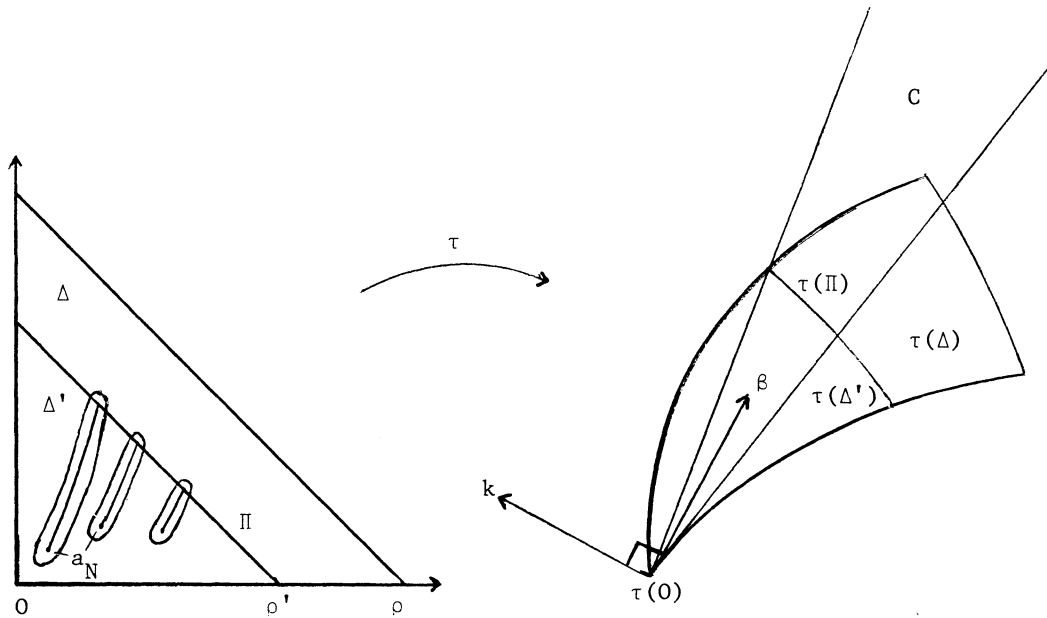


Fig. 1.

et

$$\Pi = \left\{ r \in \Delta / \sum_{i=1}^n r_i = \rho' \right\}.$$

Quitte à diminuer  $\rho'$ , l'ensemble  $C$  des vecteurs  $u \in \mathbb{R}^n$  pour lesquels la demi-droite ouverte

$$D_u = \{ \tau(0) + tu / t > 0 \}$$

issue de  $\tau(0)$  et de direction  $u$  sort de  $\tau(\Delta')$  en un point de  $\tau(\Pi)$  est un cône ouvert non vide.

Soient  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in C$  et  $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$  tels que

$$\sum k_i \beta_i = 0$$

et

$$\sum \tau_{ij} k_i k_j \neq 0.$$

Une telle paire  $\beta, k$  existe car l'ensemble  $C'$  des vecteurs  $k \in \mathbb{R}^n$  non isotropes pour la forme quadratique de matrice  $(\tau_{ij}(0))_{i,j}$  est un cône ouvert et dense, tandis que les vecteurs orthogonaux à un élément de  $C$  forment un cône ouvert  $C'' \neq \emptyset$ , donc  $C' \cap C''$  contient, par homogénéité, un vecteur  $k$  à coordonnées entières. On vérifie aisément que le choix de  $\beta$  et  $k$  peut ne pas dépendre de  $\rho$ , pourvu que ce dernier soit suffisamment petit.

Ceci permet de supposer que  $\sum \tau_{ij}(r) k_i k_j \neq 0$  pour tout  $r \in \Delta$ .

III. 4. Considérons une suite  $(a_N)_{N \geq 1}$  de points de  $\Delta'$  tendant vers 0 telle que, pour tout N,

$$\sum_{i=1}^n k_i \tau_i(a_N) = \frac{p_N}{q_N}$$

où  $p_N, q_N \in \mathbb{Z}$ ,  $q_N > 0$ . On suppose en outre que la suite  $p_N/q_N$  est strictement monotone et que, pour tout N, la demi-droite  $\{\tau(a_N) + t\beta/t > 0\}$  sort de  $\tau(\Delta')$  en un point  $\tau(a_N) + t_N\beta \in \tau(\Pi)$ .

Si l'on pose, pour  $t \in [0, 1]$ ,

$$a_N(t) = \tau^{-1}(\tau(a_N) + tt_N\beta)$$

on a

$$\begin{aligned} a_N(0) &= a_N, \\ a_N(t) &\in \Delta' \quad \text{pour } 0 \leq t < 1 \end{aligned}$$

et

$$a_N(1) \in \Pi.$$

On note :

$$\Gamma_N = \{a_N(t)/t \in [0, 1]\}.$$

Comme

$$\sum k_i \tau_i = \frac{p_N}{q_N}$$

en tout point de  $\Gamma_N$ , les courbes  $\Gamma_N$  sont disjointes et ne contiennent pas 0 (car  $\Gamma_N \subset \Delta$ ). Pour chaque  $N \geq 1$ , soit  $U_N \subset \Delta$  un voisinage de  $\Gamma_N$  tel que  $U_N \cap U_{N'} = \emptyset$  si  $N \neq N'$  et  $0 \notin \bar{U}_N$ .

Le théorème 2 nous fournit un difféomorphisme symplectique  $f_N \in E^\infty$  coïncidant avec  $f_0$  en dehors de  $\mathbb{T}^n \times U_N$ , tel que

$$d_\infty(f_0, f_N) < \varepsilon/2^{N+2}$$

et possédant dans tout voisinage  $\Omega$  de  $T_N = \{m \in B/r = a_N(0)\}$  un point  $x$  qui vérifie :

$$\lim_{l \rightarrow \infty} d(f_N^l(x), T'_N) = 0,$$

où  $T'_N = \{m \in B/r = a_N(1)\}$ . Évidemment,  $x \in \mathbb{T}^n \times U_N$  et, si  $\rho'' < \rho'$ , il existe un entier  $l$  tel que :

$$f_N^l(x) \notin B'' = B_{\rho''}.$$



III. 5. Notons  $g_N$  le difféomorphisme coïncidant avec  $f_P$  sur  $\mathbb{T}^n \times \bar{U}_P$  pour tout  $P \leq N$  et avec  $f_0$  sur l'ouvert

$$V_N = B \setminus \bigcup_{P=1}^N \mathbb{T}^n \times \bar{U}_P.$$

La suite  $g_N$  possède les propriétés (i) et (ii). Au surplus, si

$$g = \lim_{N \rightarrow \infty} g_N$$

et si  $\Omega$  est un voisinage quelconque de  $m_0$ , pour un certain entier  $N$ ,  $\Omega$  sera un voisinage de  $T_N$  [car  $\lim_{N \rightarrow \infty} a_N(0) = 0$ ]. Par conséquent,  $\Omega$  contiendra un point  $x$  tel que :

$$g^l(x) = f_N^l(x) \notin B''$$

pour un  $l \in \mathbb{N}$ . Cette propriété interdit la stabilité topologique de  $m_0$  pour  $g$ , puisque  $B''$  ne contient aucun voisinage positivement invariant. ■

III. 6. *Remarques.* — 1. On ne peut déduire du théorème 1 l'instabilité générique des points fixes elliptiques. Il faudrait, pour cela, pouvoir minorer  $\rho'$  indépendamment de  $\varepsilon$ .

2. Le théorème 1 est probablement encore valable sans les hypothèses d'indépendance multiplicative des  $\lambda_i$  et d'inversibilité de  $d\tau(0)$ .

3. Dans le cas où  $f$  est  $\mathbb{R}$ -analytique, on peut construire  $g$  de classe  $C^\infty$  sur  $M$  et analytique sur  $M \setminus \{m_0\}$ . Cependant, la construction d'un difféomorphisme analytique au voisinage de  $m_0$ , voisin en ce sens de  $f$  et dont  $m_0$  est un point fixe instable me paraît plus délicate.

4. Le temps nécessité par les orbites pour s'éloigner du point fixe elliptique est extrêmement long (il dépasse souvent les capacités d'un ordinateur usuel). L'article de Nekhoroshev [11] en donne une minoration importante, cependant, je pense que la construction décrite ici fournit des temps d'évasion encore bien plus grands.

#### IV. Démonstration du théorème 2

IV. 1. Afin d'alléger la preuve de ce théorème, nous nous ramènerons au cas où  $k_1 > 0$  et  $k_2 = \dots = k_n = 0$  comme suit. Soient  $q$  le pgcd de  $k_1, \dots, k_n$  et  $k'_i = k_i/q$ ,  $1 \leq i \leq n$ . On peut trouver une matrice  $A \in GL_n(\mathbb{Z})$  dont la première ligne est  $(k'_1, \dots, k'_n)$ . L'application  $\Phi_A : (\theta, r) \rightarrow (A\theta, {}^tA^{-1}r)$  est symplectique et conjugue  $f_0$  en  $g_0 = \Phi_A \circ f_0 \circ \Phi_A^{-1}$  :

$$(\theta, r) \rightarrow (\theta + \sigma(r), r)$$

où  $\sigma(r) = A \tau({}^tA r)$ . Le chemin  $b_i = {}^tA^{-1} a_i$  vérifie :

$$\sigma_1(b_i) = \sum_{i=1}^n k'_i \tau_i(a_i) = \frac{k_0}{q}$$

et

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial r_1}(b_i) = \frac{1}{q^2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial \tau_i}{\partial r_j}(a_i) k_i k_j \neq 0.$$

Posant  $p = k_0$  et  $\tau_{ij} = \partial \tau_i / \partial r_j$ , nous supposons désormais que  $\tau_1(a_i) = p/q$ , que  $\tau_{11}(a_i) \neq 0$  et que  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux.

IV. 2. PLAN DE LA DÉMONSTRATION. — Nous exposons à présent le plan de cette démonstration qui n'est pas très difficile, mais dont les nombreux détails techniques peuvent rendre la lecture rébarbative.

Les tores  $\mathbb{T}^n \times \{a_i\}$  sont invariants par  $f_0$  et la restriction de  $f_0$  à chacun de ces tores est une rotation qui n'est pas minimale, en effet,  $f_0^q$  laisse invariants les tores de dimension  $n-1$  :

$$\{\theta_1\} \times \mathbb{T}^{n-1} \times \{a_t\}, \quad \theta_1 \in \mathbb{T}.$$

Pour chaque  $t$ , nous fixerons  $q$  de ces tores — précisément, les

$$\mathbb{T}_{k,t} = \left\{ \frac{k}{q} \right\} \times \mathbb{T}^{n-1} \times \{a_t\}, \quad k \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$$

— permutés par  $f_0$ , et créons une perturbation  $f_{1/2}$  de  $f_0$  coïncidant avec  $f_0$  sur les  $\mathbb{T}_{k,t}$  et telle que  $f_{1/2}^q$  soit l'exponentielle d'un champ hamiltonien complètement intégrable. La différence vient de ce que  $f_{1/2}$  possède, normalement aux  $\mathbb{T}_{k,t}$ , un comportement partiellement hyperbolique : les variétés stables  $W_{f_{1/2}}^s(\mathbb{T}_{k,t})$  et instables  $W_{f_{1/2}}^u(\mathbb{T}_{k,t})$  seront de dimension  $n$ . En outre, pour chaque  $(k, t)$ ,  $W_{f_{1/2}}^s(\mathbb{T}_{k,t}) = W_{f_{1/2}}^u(\mathbb{T}_{k,t})$  car  $f_{1/2}^q$  est complètement intégrable.

Nous construirons en fait  $f_{1/2}$  comme un produit croisé. Si l'on pose, pour  $(\theta, r) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ ,  $x_1 = (\theta_1, r_1)$ ,  $x_2 = (\theta_2, \dots, \theta_n)$  et  $s = (r_2, \dots, r_n)$ , on aura :

$$f_{1/2}(x_1, x_2, s) = (g_s(x_1), x_2 + \sigma(x_1, s), s).$$

Sous cette forme, les tores  $\mathbb{T}_{k,t}$  sont déterminés par des valeurs fixées  $x_1(k, t)$  et  $s(t)$  de  $x_1$  et  $s$ , la composante  $x_2$  pouvant varier dans  $\mathbb{T}^{n-1}$ . Pour chaque  $t$ , le point  $v_1 = x_1(0, t) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}$  est un point périodique hyperbolique de  $g_{s(t)}$ , de période  $q$ , et sa variété stable est égale à sa variété instable. De plus,

$$\sigma(x_1(k, t), s(t)) = (\tau_2(a_t), \dots, \tau_n(a_t)).$$

C'est dans la construction de  $f_{1/2}$  qu'intervient l'hypothèse  $\tau_{11}(a_i) \neq 0$ .

Au préalable, nous nous serons assurés, par le lemme 1, que l'on peut supposer les restrictions de  $f_0^q$  aux  $\mathbb{T}_{k,t}$  (et donc de  $f_{1/2}^q$  qui y coïncide) minimales pour un ensemble de valeurs de  $t$  dense dans  $[0, 1]$  et contenant 0 et 1. Ceci sera fondamental dans le lemme 3.

Grâce au lemme 2, nous construirons la perturbation  $f_1$  de  $f_{1/2}$  coïncidant avec  $f_{1/2}$  au voisinage des  $\mathbb{T}_{k,t}$  mais pour laquelle  $W_{f_1}^u(\mathbb{T}_{k,t})$  et  $W_{f_1}^s(\mathbb{T}_{k,t})$  se coupent transversalement

en au moins un point  $\tilde{z}_r$ . L'application  $f_1$  sera la composée de  $f_{1/2}$  avec l'exponentielle en un temps très petit d'un champ hamiltonien donc, de ce fait, symplectique et proche de  $f_{1/2}$  en topologie  $C^\infty$ .

Nous pourrons alors choisir une suite finie  $0=t_0 < t_1 < \dots < t_m=1$  telle que  $f_1^q$  restreinte à  $T_j=T_{0,t_j}$  soit minimale pour tout  $j$  et que les  $t_j$  soient suffisamment proches pour que  $W_{f_1}^u(T_j)$  coupe encore transversalement  $W_{f_1}^s(T_{j+1})$  en au moins un point.

Le lemme 3 utilise de façon cruciale le  $\lambda$ -lemme (voir [12] ou [14], p. 140) et la minimalité de  $f_1^q|_{T_j}$  pour montrer que :

$$W_{f_1}^s(T_j) \subset \overline{W_{f_1}^s(T_{j+1})}$$

et donc que

$$T_0 \subset W_{f_1}^s(T_0) \subset \overline{W_{f_1}^s(T_m)}$$

ce qui assure le résultat.

IV. 3. RAPPELONS L'ÉNONCÉ DU  $\lambda$ -LEMME. — Soient  $g$  un difféomorphisme de classe  $C^k$  d'une variété et  $x_0$  un point fixe hyperbolique de  $g$ . Si  $Q$  est une variété de même dimension que  $W_g^s(x_0)$  transverse en un point  $z$  à  $W_g^u(x_0)$ , alors les itérées négatives  $g^{-l}(Q)$  tendent, lorsque  $l$  tend vers  $+\infty$ , vers la variété stable  $W_g^s(x_0)$  dans la topologie  $C^k$  compacte ouverte.

Remarque. — Le lemme 3 est assez délicat et nécessite un sous-lemme permettant de se ramener au cas où  $f_1$  est, au voisinage de  $T_j$ , un produit direct (et non croisé). Il est possible de le simplifier de la manière suivante (qui présente aussi ses inconvénients). Au lieu de supposer les rotations  $f_1^q|_{T_j}$  minimales, on aurait pu les choisir périodiques (i. e.  $\tau_i(a_i) \in \mathbb{Q}$  pour tous  $i, j$ ) et faire une dernière perturbation rendant, pour chaque  $j$ , une des orbites périodiques de  $T_j$  hyperbolique. La difficulté (surmontable) consiste à contrôler les variétés stables et instables pour prouver qu'elles se rencontrent transversalement. Le lemme 3 aurait alors été une conséquence immédiate du  $\lambda$ -lemme.

IV. 4. LEMME 1. — Soit  $\mathcal{E}$  l'espace de Fréchet des fonctions  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$ , nulles sur  $\mathbb{R}^n \setminus U$  et telles que  $\partial L / \partial r_1(a_t) = 0$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . Le sous-ensemble  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{E}$  formé des fonctions  $L$  pour lesquelles tout  $t \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$  vérifie :

$$\left( (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}^n \quad \text{et} \quad \sum_{i=2}^n l_i(\tau_i(a_t) + \frac{\partial L}{\partial r_i}(a_t)) = l_1 \right) \Rightarrow l_1 = \dots = l_n = 0$$

est dense dans  $\mathcal{E}$  muni de la topologie  $C^\infty$ .

Démonstration. — Le lemme résulte du théorème de Baire quand on remarque que  $\mathcal{D}$  est l'intersection des ouverts denses  $\mathcal{D}_N$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , formés des fonctions  $L \in \mathcal{E}$  telles que

$$\sum_{i=2}^n l_i(\tau_i(a_t) + \frac{\partial L}{\partial r_i}(a_t)) \neq l_1$$

chaque fois que  $t$  est un rationnel de dénominateur plus petit que  $N$  et que  $0 < \sum_{i=1}^n |l_i| < N$ . ■

Quitte à remplacer  $H_0$  par  $H_0 + L$ , où  $L$  est une fonction de  $\mathcal{D}$  suffisamment petite pour que l'application  $(\theta, r) \rightarrow (\theta + \tau(r) + \text{grad } L(r), r)$  soit dans  $\mathcal{V}$ , nous pouvons supposer que pour tout  $t \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$  et tout  $(l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ ,

$$\sum_{i=2}^n l_i \tau_i(a_i) \neq l_1.$$

IV. 5. Dans la suite,  $d$  désignera la distance associée à la structure riemannienne plate sur  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{R}^n$ .

La courbe  $\Gamma$  étant compacte, on supposera, quitte à le restreindre, que l'ouvert  $U$  est relativement compact.

Soient  $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^\infty$  à support dans  $U$ , égale à 1 au voisinage de la courbe  $\Gamma$  et  $H : \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$H(\theta, r) = H_0(r) - \frac{p}{q} r_1 + \varepsilon \eta(r) \cos 2\pi q \theta_1$$

où  $\varepsilon$  est un réel petit du signe, constant, de  $\tau_{11}(a_i)$ . Le champ hamiltonien  $X_H = ((\partial H / \partial r) - (\partial H / \partial \theta))$  associé à  $H$  est invariant sous l'action de la rotation symplectique  $\rho : (\theta, r) \mapsto (\theta_1 + (p/q), \theta_2, \dots, \theta_n, r_1, \dots, r_n)$  donc les applications  $\rho$  et  $\exp X_H$ , temps 1 du champ  $X_H$ , commutent ( $X_H$  est complet car  $\mathbb{T}^n \times U$  est invariant sous son action et d'adhérence compacte).

Soit :

$$f_{1/2} = \rho \circ \exp X_H.$$

Clairement,  $f_{1/2}$  coïncide avec  $f_0$  en dehors de  $\mathbb{T}^n \times U$ , est symplectique et tend vers  $f_0$  dans  $\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0. Dans la suite, on supposera  $\varepsilon$  suffisamment petit pour que  $f_{1/2} \in \mathcal{V}$ .

Les crochets de Poisson  $\{H, r_i\} = \partial H / \partial \theta_i$  sont nuls si  $2 \leq i \leq n$ , ce qui a pour conséquence que si l'on pose

$$f_{1/2}(\theta_1, \dots, \theta_n, r_1, \dots, r_n) = (\Theta_1, \dots, \Theta_n, R_1, \dots, R_n)$$

alors

$$(1) \quad \begin{cases} R_i = r_i, & 2 \leq i \leq n \\ \Theta_i = \theta_i + \sigma_i(\theta_1, r_1, \dots, r_n), & 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

où  $\sigma_i : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^\infty$ ; enfin :

$$(2) \quad (\Theta_1, R_1) = g_s(\theta_1, r_1), \quad s = (r_2, \dots, r_n)$$

où  $g_s = \bar{\rho} \circ \exp \xi_s \in \text{Diff}_\omega^\infty(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$ ,

$\bar{\rho}(\theta_1, r_1) = (\theta_1 + p/q, r_1)$  et  $\exp \xi_s$  est le temps 1 du champ hamiltonien  $\xi_s$  associé au hamiltonien  $h_s: (\theta_1, r_1) \rightarrow H(\theta_1, 0, \dots, 0, r_1, r_2, \dots, r_n)$  (ces deux transformations commutent :  $g_s = \exp \xi_s \circ \bar{\rho}$ ).

En outre, lorsque  $(r_1, \dots, r_n) \notin U$ , on vérifie aisément que :

$$\sigma_i(\theta_1, r_1, \dots, r_n) = \tau_i(r_1, \dots, r_n)$$

et que

$$g_s(\theta_1, r_1) = (\theta_1 + \tau_1(r_1, r_2, \dots, r_n), r_1).$$

IV. 6. Par construction, si  $(r_{1t}, \dots, r_{nt}) = a_t$  et toujours en posant  $s = (r_{2t}, \dots, r_{nt})$ , les points  $(k/q, r_{1t})$ ,  $k \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ , de  $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$  forment une orbite périodique de  $g_s$  de période  $q$ , en effet, on a :

$$g_s\left(\frac{k}{q}, r_{1t}\right) = \left(\frac{k+p}{q}, r_{1t}\right)$$

car

$$\xi_s\left(\frac{k}{q}, r_{1t}\right) = 0.$$

Par le choix du signe de  $\varepsilon$ , la hessienne :

$$d^2 h_s\left(\frac{k}{q}, r_{1t}\right) = \begin{pmatrix} -4\pi^2 q^2 \varepsilon & 0 \\ 0 & \tau_{11}(a_t) \end{pmatrix}$$

est de signature (1,1), donc cette orbite est hyperbolique.

Si les réels  $\beta > 0$  et  $\delta > 0$  sont assez petits, la fonction  $\eta$  vaut 1 sur l'ouvert  $V = \{r \in \mathbb{R}^n / d(r, \Gamma) < \delta\}$  et  $\min_v |\tau_{11}| \geq \beta$ . La trace  $V_s$  de  $V$  sur  $\mathbb{R} \times \{s\}$  est alors une réunion d'intervalles disjoints de longueur  $2\delta$  centrés aux points de  $\Gamma \cap (\mathbb{R} \times \{s\})$  et la restriction de  $H_0$  à ces intervalles est fortement convexe (resp. concave), i. e. sa dérivée seconde est strictement positive (resp. négative), si  $\tau_{11}$  est positif (resp. négatif) sur  $\Gamma$ . Dans le cas où  $\tau_{11} > 0$ , on a :

$$H_0(a_t) - \frac{p}{q} r_{1t} \leq H_0(r_{1t} \pm \delta, s) - \frac{p}{q} (r_{1t} \pm \delta) - \beta \frac{\delta^2}{2}.$$

L'inégalité et le signe de  $\beta \delta^2/2$  sont renversés si  $\tau_{11} < 0$ .

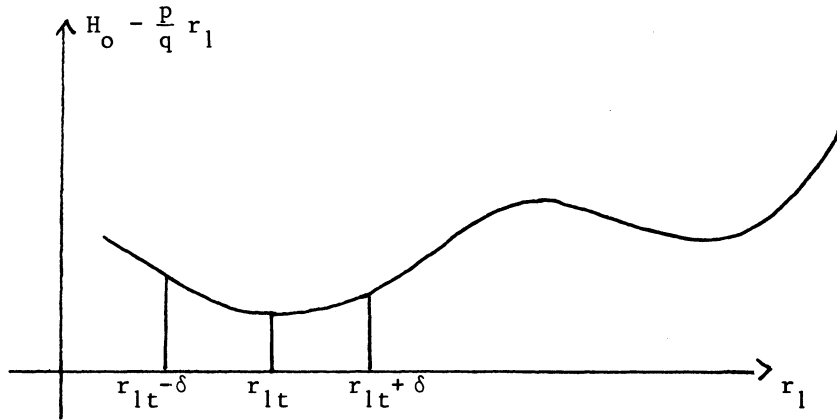


Fig. 2.

Soit  $W_t = \{(\theta_1, r_1) \in \mathbb{T} \times V_s / h_s(\theta_1, r_1) = h_s(k/q, r_{1t})\}$ . En choisissant la valeur absolue  $|\varepsilon|$  assez petite, la ligne de niveau  $W_t$  ne rencontre pas le bord de  $\mathbb{T} \times V_s$ ; son équation :

$$H_0(r_1, s) - \frac{p}{q} r_1 = H_0(a_t) - \frac{p}{q} r_{1t} + \varepsilon(1 - \cos 2\pi q \theta_1)$$

prouve qu'elle est la réunion de deux graphes de fonctions de classe  $C^\infty$  de  $\mathbb{T}$  dans  $]r_{1t} - \delta, r_{1t} + \delta[$  possédant des zéros simples aux points  $k/q, k \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  (et seulement en ces points).

Il est clair que la variété stable  $W_{g_s}^s(k/q, r_{1t})$  et la variété instable  $W_{g_s}^u(k/q, r_{1t})$  de l'orbite périodique hyperbolique  $\{(k/q, r_{1t}), k \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}\}$  sont toutes deux égales à  $W_t$  (ce sont des sous-variétés de dimension 1 de  $W_t$  et leurs extrémités sont des points critiques de  $\xi_s$ ).

IV. 7. Revenant à  $f_{1/2}$ , les tores

$$T_{k,t} = \left\{ \frac{k}{q} \right\} \times \mathbb{T}^{n-1} \times \{a_t\}, \quad k \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}, \quad t \in [0, 1],$$

sont invariants par  $f_{1/2}^q$  et, posant :

$$T_t = \bigcup_k T_{k,t}$$

les ensembles :

$$W_{f_{1/2}}^s(T_t) = \{x \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n / \lim_{l \rightarrow +\infty} d(f_{1/2}^l(x), T_t) = 0\}$$

et

$$W_{f_{1/2}}^u(T_t) = \{x \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n / \lim_{l \rightarrow +\infty} d(f_{1/2}^{-l}(x), T_t) = 0\}$$

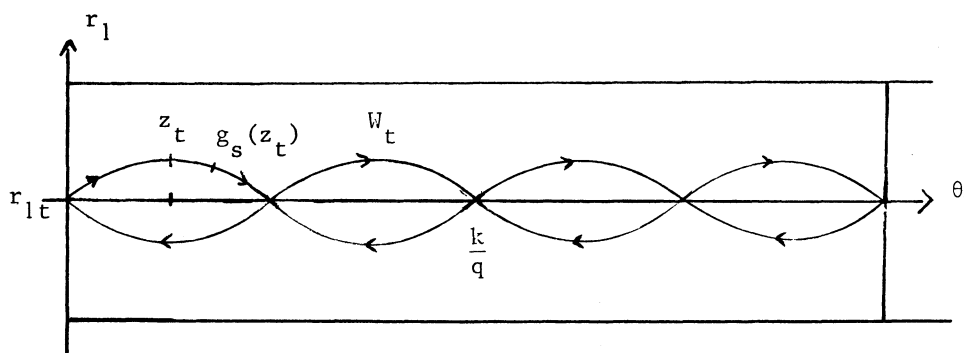


Fig. 3.

sont tous deux égaux à :

$$\tilde{W}_t = \{(\theta_1, \dots, \theta_n, r_1, r_{2t}, \dots, r_{nt}) / (\theta_1, r_1) \in W_t\}.$$

Soit  $z_t$  le point de  $W_t$  d'abscisse  $\frac{1}{2q}$  et d'ordonnée  $r'_{1t} > r_{1t}$  cf. fig. 3) et  $\tilde{z}_t = \left(\frac{1}{2q}, 0, \dots, 0, r'_{1t}, r_{2t}, \dots, r_{nt}\right) \in \tilde{W}_t$ . Les points  $\tilde{z}_t$  dépendent de façon  $C^\infty$  de  $t$ .

On notera

$$a'_t = (r'_{1t}, r_{2t}, \dots, r_{nt}) \quad \text{et} \quad \Gamma' = \{a'_t, t \in [0, 1]\}.$$

L'application  $f_1$  sera une perturbation de  $f_{1/2}$  pour laquelle les tores  $T_{k,t}$  seront toujours périodiques et leur variétés stables et instables seront transverses en  $\tilde{z}_t$ .

Soient  $\alpha, \delta' \in \mathbb{R}$  tels que  $0 < \alpha < \frac{1}{2q}$  et  $0 < \delta' < \inf_{t \in [0, 1]} (r'_{1t} - r_{1t})$ .

On considère l'ouvert :

$$V' = \left\{ (\theta, r) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n / d(r, \Gamma') < \delta' \text{ et } \left| \theta_1 - \frac{1}{2q} \right| < \alpha \right\}$$

(où  $\left| \theta_1 - \frac{1}{2q} \right| = \inf \left| \tilde{\theta}_1 - \frac{1}{2q} \right|$ ,  $\tilde{\theta}_1$  parcourant l'ensemble des représentants de  $\theta_1$  dans  $\mathbb{R}$ ).

IV. 8. LEMME 2. — Il existe une fonction  $K \in C^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  à support dans  $V'$  pour laquelle, si l'on note  $X_K$  le champ hamiltonien associé,  $X_K(\tilde{z}_t) = 0$  pour tout  $t$  et les variétés  $\tilde{W}_t$  et  $\exp \varepsilon' X_K(\tilde{W}_t)$  se coupent transversalement en  $\tilde{z}_t$  pour tout  $\varepsilon'$  assez petit et non nul.

Démonstration. — Soit  $\chi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^\infty$  telle que  $\chi(0) > 0$ ,  $\chi'(0) < 0$  et  $\chi(x) = 0$  si  $x \geq 1$  (par exemple  $\chi(x) = e^{1/(x-1)}$  si  $x < 1$  et  $\chi(x) = 0$  si  $x \geq 1$ ).

On pose :

$$K(\theta, r) = \chi \left[ \frac{1}{\alpha^2} \left( \left( \tilde{\theta}_1 - \frac{1}{2q} \right)^2 + \sum_{i=2}^n \tilde{\theta}_i^2 \right) + \frac{1}{\delta'^2} d(r, \Gamma')^2 \right]$$

où  $\tilde{\theta}_i$  est un représentant de  $\theta_i$  choisi dans  $[0, 1[$  lorsque  $i=1$  et dans  $[-1/2, 1/2[$  lorsque  $i \geq 2$ . Si  $\delta'$  est assez petit, la fonction  $r \rightarrow d(r, \Gamma')^2$  est de classe  $C^\infty$  tant que  $d(r, \Gamma') \leq \delta'$  (c'est le théorème du voisinage tubulaire) donc la fonction  $K$  est de classe  $C^\infty$  et à support dans  $V'$ .

Il est immédiat que  $dK(\tilde{z}_i) = 0$ . Le choix de la première coordonnée  $\theta_1 = \frac{1}{2q}$  de  $\tilde{z}_i$  implique (voir l'équation de  $W_i$ ) que  $\tilde{W}_i$  est tangente en  $\tilde{z}_i$  au tore  $\mathbb{T}^n \times \{r'_i\}$ . Dans la base canonique de  $\mathbb{R}^{2n}$ , la matrice de la différentielle  $dX_K(\tilde{z}_i)$  du champ  $X_K$  au point  $\tilde{z}_i$  vaut :

$$D_i = \begin{pmatrix} & & \chi'(0) D'_i \\ 0 & & \frac{\chi'(0)}{\delta'^2} D'_i \\ -\frac{2}{\alpha^2} \chi'(0) I_n & & 0 \end{pmatrix}$$

où  $I_n$  est la matrice identité d'ordre  $n$  et où la matrice  $D'_i$  d'ordre  $n$  est la hessienne de la fonction  $r \rightarrow d(r, \Gamma')^2$  au point  $r'_i$ . De l'inversibilité de  $I_n$ , on déduit que, si  $\varepsilon' \neq 0$  est assez petit,  $e^{\varepsilon' D_i}(\mathbb{R}^n \times 0)$  est un supplémentaire de  $\mathbb{R}^n \times 0$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$  (la valeur maximale de  $\varepsilon'$  autorisée ne dépend que de  $\|D'_i\|$  qui est majorée lorsque  $t$  varie dans  $[0, 1]$ ). Comme  $\exp \varepsilon' X_K(\tilde{z}_i) = \tilde{z}_i$  et que  $\exp \varepsilon' X_K(\tilde{w}_i)$  est tangent en  $\tilde{z}_i$  à  $e^{\varepsilon' D_i}(\mathbb{R}^n \times 0)$ , les variétés  $\tilde{W}_i$  et  $\exp \varepsilon' X_K(\tilde{w}_i)$  sont transverses en  $\tilde{z}_i$  pour tout  $\varepsilon'$  non nul et assez petit. ■

IV. 9. Si l'on note  $g_s(z_i) = (\theta'_{1t}, r'_{1t})$ , on a pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $\theta'_{1t} \neq \frac{1}{2q}$  [plus précisément,  $\theta'_{1t} - \frac{1}{2q}$  a le signe de  $\tau_{11}$ ]. De plus la suite des abscisses (coordonnées  $\theta_1$ ) des points  $g_s^l(z_i)$ ,  $l \in \mathbb{Z}$  est strictement monotone (croissante si  $\tau_{11} > 0$  et inversement). Si l'on a choisi  $\alpha < \inf_{t \in [0, 1]} \left| \theta'_{1t} - \frac{1}{2q} \right|$  alors  $\tilde{z}_i$  est le seul point de son orbite  $\{f_{1/2}^l(\tilde{z}_i), l \in \mathbb{Z}\}$  qui appartienne à  $\tilde{V}'$ .

IV. 10. On pose :

$$f_1 = (\exp \varepsilon' X_K) \circ f_{1/2}$$

où  $\varepsilon' > 0$  est assez petit pour que  $f_1 \in \mathcal{V}$ . Comme  $f_1$  et  $f_{1/2}$  coïncident au voisinage des  $T_p$ , ces derniers sont invariants par  $f_1$  et les ensembles :

$$W_{f_1}^s(T_i) = \{x \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n / \lim_{l \rightarrow +\infty} d(f_1^l(x), T_i) = 0\}$$

et

$$W_{f_1}^u(T_i) = \{x \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n / \lim_{l \rightarrow +\infty} d(f_1^{-l}(x), T_i) = 0\}$$



contiennent tous deux le point  $\tilde{z}_t$ , puisque :

$$f_1^l(\tilde{z}_t) = f_{1/2}^l(\tilde{z}_t)$$

pour tout  $l \in \mathbb{Z}$ . Qui plus est, si  $V_t'' \subset V'$  est un voisinage de  $\tilde{z}_t$  dont la première projection sur  $\mathbb{T}$  [par  $(\theta, r) \rightarrow \theta_1$ ] est un intervalle de la forme  $\left] \frac{1}{2q} - \alpha', \frac{1}{2q} + \alpha' \right[$  suffisamment petit pour que  $f_1^q(V_t'') \cap V' = \emptyset$ , alors un point  $x \in V_t'' \cap W_{f_{1/2}}^s(T_t)$  verra ses orbites positives  $\{f_{1/2}^l(x), l \in \mathbb{N}\}$  et  $\{f_1^l(x), l \in \mathbb{N}\}$  coïncider. En particulier,

$$V_t'' \cap W_{f_{1/2}}^s(T_t) \subset W_{f_1}^s(T_t).$$

Inversement, quitte à restreindre  $V_t''$ , on a aussi :

$$f_{1/2}^{-1}(V_t'') \cap W_{f_{1/2}}^u(T_t) \subset W_{f_1}^u(T_t),$$

donc  $\exp \varepsilon' X_K(V_t'' \cap W_{f_{1/2}}^u(T_t)) \subset W_{f_1}^u(T_t)$ .

Par conséquent les variétés immergées injectivement  $W_{f_1}^s(T_t)$  et  $W_{f_1}^u(T_t)$  se coupent transversalement en  $\tilde{z}_t$ .

*Remarque.* — Les ensembles  $W_{f_1}^s(T_t)$  et  $W_{f_1}^u(T_t)$  sont des variétés immergées injectivement car ils s'obtiennent en réunissant les itérées des ensembles stable et instable locaux de  $T_t$  pour  $f_1$ , qui coïncident avec ceux correspondant à  $f_{1/2}$  (puisque  $f_{1/2} = f_1$  au voisinage de  $T_t$ ), et on a montré que, pour  $f_{1/2}$ , ces derniers étaient bien des sous-variétés :

$$W_{f_{1/2}}^s(T_t) = W_{f_{1/2}}^u(T_t) = \tilde{W}_r.$$

IV. 11. Comme  $W_{f_1}^s(T_t)$  et  $W_{f_1}^u(T_t)$  dépendent continûment en topologie  $C^\infty$  compacte ouverte de  $t$ , si la suite  $0 = t_0 < \dots < t_m = 1$  est de pas assez petit les variétés  $W_{f_1}^u(T_{t_j})$  et  $W_{f_1}^s(T_{t_{j+1}})$  se couperont transversalement en au moins un point pour tout  $j \leq m-1$ .

On pose :

$$T_j = T_{0, t_j} = \{0\} \times \mathbb{T}^{n-1} \times \{a_{t_j}\}, \quad 0 \leq j \leq m.$$

Nous choisirons les  $t_j$  rationnels pour que  $f_1^q|_{T_j}$  soit une rotation minimale (cf. lemme 1).

IV. 12. LEMME 3. — *Pour tout  $j \leq m-1$ , on a :*

$$W_{f_1}^s(T_j) \subset \overline{W_{f_1}^s(T_{j+1})}.$$

IV. 13. *Démonstration.*

IV. 13. 1. Nous allons montrer que  $W_{f_1}^s(T_{j+1})$  rencontre tout ouvert  $\Omega$  ayant un point commun  $y$  avec  $W_{f_1}^s(T_j)$ . Puisque  $W_{f_1}^s(T_{j+1})$  est invariante par  $f_1$ , nous pouvons, en remplaçant  $y$  et  $\Omega$  par leurs images par une itérée de  $f_1^q$ , supposer que  $y \in U'$  et  $\Omega \subset U'$  où  $U'$  est un voisinage de  $T_j$  sur lequel  $f_1^q$  et  $f_{1/2}^q$  coïncident. En particulier, pour la topologie de sous-variété immergée,  $W_{f_{1/2}}^u(T_j) \cap U'$  est un voisinage de  $T_j$  dans  $W_{f_1}^u(T_j)$ .

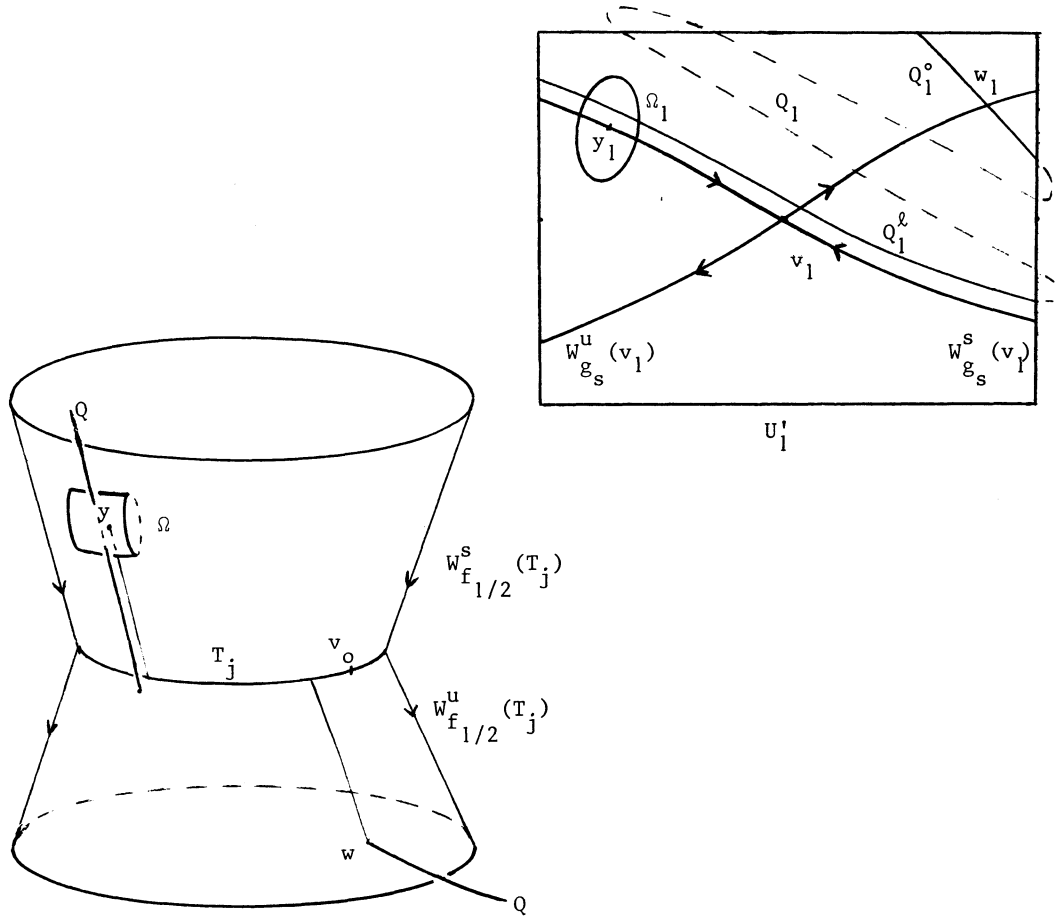


Fig. 4.

IV. 13.2. Le principe de la démonstration est le suivant. On commence par se restreindre à  $U'$ , ce qui permet d'oublier  $f_1$ . La variété  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$  est feuilletée en sous-variétés  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R} \times \{s\}$ ,  $s \in \mathbb{R}^{n-1}$ , de dimension  $n+1$  et invariantes par  $f_{1/2}$ . Soit  $\Lambda$  la feuille contenant le tore  $T_j$ . Il suffit de voir que la courbe

$$Q = \Lambda \cap W_{f_1}^s(T_{j+1}) \cap U'$$

rencontre  $\Omega$  (cf. fig. 4). On a :

$$f_{1/2}^{-q}(Q) \cap U' \subset Q$$

car  $f_{1/2}^q$  et  $f_1^q$  coïncident sur  $U'$ . Pour montrer que  $Q \cap \Omega \neq \emptyset$ , on remarque que  $\Lambda$  se décompose en un produit :

$$\Lambda = (\mathbb{T} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{T}^{n-1}$$

et que  $f_{1/2}^q$  est fibrée au-dessus d'une transformation  $g_s^q$  de  $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ . Soit :

$$\pi_1: \Lambda \rightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{R}$$

la projection canonique. Le point  $v_1 = \pi_1(T_j)$  est un point fixe hyperbolique de  $g_s^q$  et la courbe  $Q_1 = \pi_1(Q)$  coupe transversalement  $W_{gg}^u(v_1)$  en un point  $w_1 = \pi_1(w)$ , où  $w \in W_{f_{1/2}}^s(T_j) \cap W_{f_1}^u(T_{j+1}) \cap U'$ . Le  $\lambda$ -lemme permet d'affirmer que  $Q_1$  rencontre  $\Omega_1 = \pi_1(\Omega)$ . On aurait pu conclure si  $f_{1/2}^q$  avait été un produit direct de  $g_s^q$  par une rotation minimale de  $\mathbb{T}^{n-1}$ . Le sous-lemme (cf. IV. 13.6) permet de se ramener à ce cas.

IV. 13.3. Nous noterons, pour simplifier ( $j$  étant fixé) :

$$a_{ij} = (r_{1j}, \dots, r_{nj})$$

$$s = (r_{2j}, \dots, r_{nj})$$

$$v_0 = (0, a_{ij}) \in T_j$$

$$\Lambda = \mathbb{T}^n \times \mathbb{R} \times \{s\}.$$

La variété  $\Lambda$  est de dimension  $n+1$  et vérifie :

$$f_{1/2}(\Lambda) = \Lambda.$$

L'invariance par  $f_1$  de la variété  $W_{f_1}^s(T_{j+1})$  amène celle-ci à couper transversalement  $W_{f_{1/2}}^u(T_j)$  en un point  $w \in U'$  (ces deux variétés sont de dimension  $n$ ). D'autre part,  $\Lambda$  contient  $W_{f_{1/2}}^u(T_j)$ , par conséquent,  $w \in \Lambda$  et l'ensemble :

$$Q = W_{f_1}^s(T_{j+1}) \cap \Lambda \cap U'$$

est, au voisinage de  $w$ , une courbe de classe  $C^\infty$  coupant transversalement l'hypersurface  $W_{f_{1/2}}^u(T_j)$  de  $\Lambda$ . Cette courbe a la propriété d'invariance suivante :

$$f_{1/2}^{-q}(Q) \cap U' \subset Q.$$

IV. 13.4. La variété  $\Lambda$  se décompose naturellement en un produit cartésien :

$$\Lambda = (\mathbb{T} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{T}^{n-1}$$

à travers les deux projections :

$$\pi_1: \Lambda \rightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{R}, \quad (\theta, r) \mapsto (\theta_1, r_1)$$

$$\pi_2: \Lambda \rightarrow \mathbb{T}^{n-1}, \quad (\theta, r) \mapsto (\theta_2, \dots, \theta_n).$$

L'application  $f_{1/2}^q$  est, on s'en souvient (cf. IV. 5, (1) et (2)), un produit croisé : si l'on pose, pour  $x_1 \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}$ ,

$$\sigma(x_1) = (\sigma_2(x_1, s), \dots, \sigma_n(x_1, s)) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

et

$$\sigma^q(x_1) = \sigma(x_1) + \sigma \circ g_s(x_1) + \dots + \sigma \circ g_s^{q-1}(x_1),$$

on a, pour tout  $(x_1, x_2) \in (\mathbb{T} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{T}^{n-1} = \Lambda$ ,

$$f_{1/2}^q(x_1, x_2) = (g_s^q(x_1), x_2 + \sigma^q(x_1)).$$

Soit :

$$w_i = \pi_i(w), \quad i = 1, 2;$$

la fibre  $\pi_1^{-1}(w_1)$  est contenue dans  $W_{f_{1/2}}^s(T_j)$  qui est transverse à  $Q$  en  $w$ , donc  $\pi_1$  est un difféomorphisme local d'un voisinage de  $w$  dans  $Q$  sur un voisinage de  $w_1$  dans la courbe  $Q_1 = \pi_1(Q)$ . De plus,  $Q_1$  est transverse en  $w_1$  à la projection  $\pi_1(W_{f_{1/2}}^u(T_s))$  qui n'est autre que  $W_{g_s}^u(v_1)$  où, le lecteur l'aura deviné,  $v_1 = \pi_1(v_0) = (0, r_{1j})$  (cf. fig. 3).

Soit :

$$U'_1 = \pi_1(\Lambda \cap U')$$

On supposera dans la suite, que :

$$\Lambda \cap U' = \pi_1^{-1}(U'_1) = U'_1 \times \mathbb{T}^{n-1}.$$

La courbe  $Q_1$  vérifie alors :

$$g_s^{-q}(Q_1) \cap U'_1 \subset Q_1.$$

De même, on supposera, quitte à le restreindre, que :

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2,$$

où  $\Omega_1 = \pi_1(\Omega)$  est un voisinage de  $y_1 = \pi_1(y)$  et  $\Omega_2$  un ouvert non vide de  $\mathbb{T}^{n-1}$ .

IV. 13. 5. Considérons la suite de courbes  $(Q^l)_{l \in \mathbb{N}}$  où  $Q^0$  est la composante connexe de  $w$  dans  $Q \cap U'$  et  $Q^{l+1}$  celle de  $f_1^{-q(l+1)}(w)$  dans  $f_1^{-q}(Q^l) \cap U'$ .

On a, pour tout  $l \in \mathbb{N}$ ,

$$Q^l \subset Q.$$

Il suffit donc de voir qu'une des courbes  $Q^l$  rencontre  $\Omega$ .

Soit :

$$Q'_1 = \pi_1(Q^l).$$

Si l'on choisit  $U'_1$  pour que la projection  $\pi_1: Q^0 \rightarrow Q'_1$  soit un difféomorphisme, alors  $Q'_1$  est la composante connexe de  $w_1$  dans  $Q_1 \cap U'_1$  et  $Q^{l+1}$  celle de  $g_s^{-q(l+1)}(w_1)$  dans  $g_s^{-q}(Q'_1) \cap U'_1$ .

Lorsque, de plus,  $U'_1$  est un rectangle :

$$U'_1 = \{(\theta_1, r_1) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} \mid |\theta_1| < \alpha'_1 \text{ et } |r_1| < \delta'_1\}$$

où  $\alpha'_1 > 0$ ,  $\delta'_1 > 0$ , les courbes  $W_{g_s^s}^s(v_1) \cap U'_1$  et  $W_{g_s^u}^u(v_1) \cap U'_1$  sont connexes et invariantes par  $g_s^q$  et  $g_s^{-q}$  respectivement.

*Commentaire.* — Le  $\lambda$ -lemme (cf. IV.3, voir aussi Schub [14], p. 140 ou Palis [12]) affirme que, dans cette situation, la suite  $(Q'_1)_l \in \mathbb{N}$  tend au sens  $C^\infty$  vers  $W_{g_s^s}^s(v_1) \cap U'_1$ . En particulier,  $Q'_1 \cap \Omega_1 \neq \emptyset$  pour tout  $l$  assez grand. Nous utiliserons la minimalité de  $f_{1/2}^q|_{T_j}$  pour montrer l'existence d'un entier  $l$  tel que :

$$Q^l \cap \Omega \neq \emptyset.$$

IV.13.6. *Sous-lemme :* Si  $U'_1$  est assez petit, il existe une fonction  $\gamma: U'_1 \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  telle que  $\gamma(v_1) = 0$  et :

$$(\star) \quad \gamma - \gamma \circ g_s^q = \sigma^q - \sigma^q(v_1).$$

*Démonstration.* — Identifions  $U'_1$  à un voisinage de l'origine dans  $\mathbb{R}^2$  à l'aide d'un système de coordonnées  $(\zeta, \zeta')$  dans lequel on a :

$$W_{g_s^s}^s(v_1) = \{(0, \zeta') \in U'_1\}$$

et

$$W_{g_s^u}^u(v_1) = \{(\zeta, 0) \in U'_1\}.$$

Définissons les fonctions  $Z$  et  $Z'$  de  $U'_1$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$g_s^q(\zeta, \zeta') = (Z, Z');$$

on a, à l'origine :

$$\frac{\partial Z'}{\partial \zeta}(0, 0) = \frac{\partial Z}{\partial \zeta'}(0, 0) = 0$$

et

$$0 < \left( \frac{\partial Z}{\partial \zeta}(0, 0) \right)^{-1} = \frac{\partial Z'}{\partial \zeta'}(0, 0) < 1.$$

Si  $U'_1$  est suffisamment petit, il existe une constante  $c < 1$  majorant  $(\partial Z / \partial \zeta)^{-1}$  et  $\partial Z' / \partial \zeta'$  sur  $U'_1$ . On peut alors, quitte à augmenter légèrement  $c$  (en conservant  $c < 1$ ), prolonger  $g_s^q$  et  $\sigma^q - \sigma^q(v_1)$  en applications  $\tilde{g}$  et  $\tilde{\sigma}$  respectivement, définies et de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^2$ , de telle manière que :

- $\tilde{g}$  soit un difféomorphisme global;
- en dehors d'une boule  $B$  contenant  $U'_1$ , on ait :

$$\tilde{\sigma} = 0$$

et

$$\tilde{g}(\zeta, \zeta') = \left( \frac{\zeta}{\mu}, \mu \zeta' \right)$$

où  $0 < \mu \leq c < 1$ .

On suppose en outre que les deux axes  $\mathbb{R} \times \{0\}$  et  $\{0\} \times \mathbb{R}$  sont invariants par  $\tilde{g}$  et que :

$$\frac{\partial Z}{\partial \zeta} \geq c^{-1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial Z'}{\partial \zeta'} \leq c$$

sur le plan  $\mathbb{R}^2$  entier.

Posons

$$\tilde{g}(\zeta, 0) = (g_0(\zeta), 0)$$

et

$$\sigma_0(\zeta) = \tilde{\sigma}(\zeta, 0).$$

Si  $\gamma_0(\zeta) = \gamma(\zeta, 0)$ , on doit avoir

$$\gamma_0 - \gamma_0 \circ g_0 = \sigma_0$$

soit, en composant par  $g_0^{-1}$  et en dérivant :

$$\gamma'_0 - (g_0^{-1})' \gamma'_0 \circ g_0^{-1} = -(g_0^{-1})' \sigma'_0 \circ g_0^{-1}.$$

Cette équation possède une unique solution donnée par :

$$\gamma'_0 = - \sum_{k=1}^{\infty} (g_0^{-k})' \sigma'_0 \circ g_0^{-k}$$

(cette série converge normalement, car  $(g_0^{-k})' \leq c^k$  et  $\sigma'_0$  est à support compact donc bornée). Nous choisisons pour  $\gamma_0$  sa primitive nulle en 0, qui satisfait bien l'équation requise puisque celle-ci est satisfaite à l'origine [on a  $\tilde{\sigma}(0) = 0$ ].

Posons maintenant :

$$\gamma(\zeta, \zeta') = \gamma_0(\zeta) + \zeta' \gamma_1(\zeta, \zeta')$$

et

$$\tilde{\sigma}(\zeta, \zeta') = \sigma_0(\zeta) + \zeta' \sigma_1(\zeta, \zeta').$$

L'équation (★) devient :

$$\gamma_0(\zeta) + \zeta' \gamma_1(\zeta, \zeta') - \gamma_0(Z) - Z' \gamma_1(Z, Z') = \sigma_0(\zeta) + \zeta' \sigma_1(\zeta, \zeta')$$

soit, comme  $\gamma_0 - \gamma_0 \circ g_0 = \sigma_0$ ,

$$(\star\star) \quad \gamma_1(\zeta, \zeta') - \frac{Z'}{\zeta'} \gamma_1(Z, Z') = \sigma_1(\zeta, \zeta') + \frac{\gamma_0(Z) - \gamma_0(Z_0)}{\zeta'} \stackrel{\text{déf}}{=} \varphi_1$$

où  $Z_0 = g_0(\zeta)$ . Notons que les fonctions  $Z'$  et  $\gamma_0(Z) - \gamma_0(Z_0)$  sont de classe  $C^1$  et nulles si  $\zeta' = 0$  donc  $Z'/\zeta'$  et  $\gamma_0(Z) - \gamma_0(Z_0)/\zeta'$  sont définies et continues sur  $\mathbb{R}^2$ . De plus,

$$Z = Z_0 = \frac{\zeta}{\mu}$$

en dehors de  $B$ , donc le second membre  $\varphi_1$  de  $(\star\star)$  est borné puisque nul hors de  $B$ . D'autre part,

$$\frac{Z'(\zeta, \zeta')}{\zeta'} = \int_0^1 \frac{\partial Z'}{\partial \zeta'}(\zeta, t\zeta') dt \leq c.$$

Soit  $C_b^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^{n-1})$  l'espace des fonctions continues bornées sur  $\mathbb{R}^2$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^{n-1}$  et

$$\Phi: C_b^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow C_b^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^{n-1})$$

définie par :

$$\Phi(\varphi)(\zeta, \zeta') = \frac{Z'}{\zeta'} \varphi(Z, Z').$$

L'application  $\Phi$  est linéaire, continue et de norme

$$\|\Phi\| \leq c$$

donc  $\text{Id} - \Phi$  est inversible. L'application :

$$\gamma = \gamma_0 + \zeta'(\text{Id} - \Phi)^{-1}(\varphi_1)$$

est nulle en  $(0, 0)$  et satisfait  $(\star)$ . ■

*Remarques.* — 1. L'unicité apparente vient de ce que l'on a imposé à  $\gamma_1$  d'être bornée. Les restrictions de  $\gamma$  aux courbes  $W_{g_s}^s(v_1)$  et  $W_{g_s}^u(v_1)$  sont, elles, uniques et de classe  $C^\infty$ .

2. Si  $v = (v_1, v_2)$  est un point quelconque de  $T_j(v_1 = (0, r_{1j}) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}$  et  $v_2 \in \mathbb{T}^{n-1})$ , la variété stable locale du point  $v$  relativement à  $U'$  :

$$W_{f_1}^s(v, U') = \{x \in U' / \forall l \geq 0, f_1^l(x) \in U' \text{ et } \lim_{l \rightarrow +\infty} d(f_1^l(x), f_1^l(v)) = 0\}$$

est égale à :

$$\{(x_1, v_2 - \gamma(x_1)) / x_1 \in W_{g_1}^s(v_1) \cap U_1'\}.$$

En effet,

$$f_1^q(x_1, v_2 - \gamma(x_1)) = (g_s^q(x_1), v_2 - \gamma(x_1) + \sigma^q(x_1)) = (g_s^q(x_1), v_2 + \sigma^q(v_1) - \gamma \circ g_s^q(x_1))$$

donc

$$f_1^{ql}(x_1, v_2 - \gamma(x_1)) - f_1^{ql}(v) = (g_s^{ql}(x_1) - v_1, -\gamma \circ g_s^{ql}(x_1))$$

tend vers 0 lorsque  $l$  tend vers l'infini. De même

$$W_{f_1}^u(v, U') = \{(x_1, v_2 + \gamma(x_1)) / x_1 \in W_{g_s}^u(v_1) \cap U_1'\}.$$

IV. 13. 7. Pour tout  $l \in \mathbb{N}$ , la projection  $\pi_{1|Q^l}$  est un difféomorphisme de  $Q^l$  sur  $Q_1^l$ , puisque c'est le cas lorsque  $l=0$  et que

$$\pi_{1|Q^l} = g_s^{-ql} \circ \pi_{1|Q^0} \circ f_1^{ql}.$$

Par conséquent,  $Q_l$  est le graphe d'une application  $\psi^l$  de classe  $C^\infty$  de  $Q_1^l$  dans  $\mathbb{T}^{n-1}$ . Les  $\psi^l$  satisfont la relation de récurrence :

$$\psi_l = \psi_{l-1} \circ g_s^q - \sigma^q.$$

Si l'on pose :

$$\bar{\psi}_l = \psi_l + \gamma|_{Q_1^l} - l\sigma^q(v_1),$$

on vérifie aisément que :

$$\bar{\psi}_l = \bar{\psi}_{l-1} \circ g_s^q = \bar{\psi}_0 \circ g_s^{ql}.$$

D'autre part,

$$\bar{\psi}_0(w_1) = w_2 + \gamma(w_1),$$

car  $w = (w_1, w_2) \in Q^0$ .

Si  $v_2 \in \mathbb{T}^{n-1}$ , on note

$$\Omega_2 + v_2 = \{x_2 + v_2 / x_2 \in \Omega_2\}$$

le translaté de l'ouvert  $\Omega_2$ . Gardant  $\Omega_2$  fixe, on peut, en restreignant  $\Omega_1$ , supposer que l'ensemble :

$$\Omega'_2 = \bigcap_{x \in \Omega_1} (\Omega_2 + \gamma(x_1))$$

est un voisinage de  $y_2 + \gamma(y_1)$ . Soit  $\Omega''_2$  un voisinage de  $y_2 + \gamma(y_1)$  tel que  $\bar{\Omega}''_2 \subset \Omega'_2$ . Comme la translation de  $\mathbb{T}^{n-1}$  :

$$x_2 \rightarrow x_2 + \sigma^q(v_1)$$

est minimale, il existe un entier  $l_0$  tel que

$$w_2 + \gamma(w_1) + l_0 \sigma^q(v_1) \in \Omega''_2.$$

L'ensemble  $Q_1^0 = \{x \in Q_1^0 / \bar{\psi}_0(x_1) + l_0 \sigma^q(v_1) \in \Omega''_2\}$  est un voisinage de  $w_1$  dans  $Q_1^0$ . Considérons une suite  $(l_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $l_i \in \mathbb{N}$  tendant vers l'infini et telle que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} l_i \sigma^q(v_1) = l_0 \sigma^q(v_1).$$

D'après le  $\lambda$ -lemme, si  $i$  est assez grand, on a :

$$g_s^{-ql_i}(Q_1^0) \cap \Omega_1 \neq \emptyset,$$



donc il existe un  $x_i \in \Omega_1$  tel que  $g_s^{q_i}(x_i) \in Q_1^0$ , c'est-à-dire :

$$\bar{\Psi}_{l_i}(x_i) + l_0 \sigma^q(v_1) \in \Omega_2'.$$

Toujours si  $i$  est assez grand pour que :

$$\Omega_2' + (l_i - l_0) \sigma^q(v_1) \subset \Omega_2',$$

on aura aussi :

$$\bar{\Psi}_{l_i}(x_i) + l_i \sigma^q(v_1) = \psi_{l_i}(x_i) + \gamma(x_i) \in \Omega_2'$$

donc  $\psi_{l_i}(x_i) \in \Omega_2$ , d'où l'on déduit que :

$$(x_i, \psi_{l_i}(x_i)) \in Q^{l_i} \cap \Omega \neq \emptyset. \quad \blacksquare$$

IV. 14. Pour conclure, remarquons que le lemme 3 entraîne les inclusions :

$$W_{f_1}^s(T_j) \subset \overline{W_{f_1}^s(T_{j'})}$$

pour tous  $j \leq j'$ . En particulier,

$$T_0 \subset W_{f_1}^s(T_0) \subset \overline{W_{f_1}^s(T_m)},$$

donc tout ouvert  $\Omega$  rencontrant  $T_0$  contient un point  $x$  tel que :

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} d(f_1^l(x), T_m) = 0. \quad \blacksquare$$

## V. Tores invariants instables

V. 1. On considère ici un plongement symplectique de classe  $C^\infty$  :

$$f: \mathbb{T}^n \times B_\delta \rightarrow \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$$

où  $B_\delta$  est la boule ouverte de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , de rayon  $\delta > 0$  centrée à l'origine (les variétés  $\mathbb{T}^n \times B_\delta$  et  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$  sont munies de leur structure symplectique canonique  $\omega = \sum_{i=1}^n d\theta_i \wedge dr_i$ ).

On suppose qu'il existe une fonction de classe  $C^\infty$  :

$$H_0: B_\delta \rightarrow \mathbb{R}$$

vérifiant :

$$\det d^2 H_0(0) \neq 0$$

et telle que, si l'on pose :

$$f_0(\theta, r) = (\theta + \tau(r), r)$$

où

$$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) = \left( \frac{\partial H_0}{\partial r_1}, \dots, \frac{\partial H_0}{\partial r_n} \right),$$

alors  $f_0$  et  $f$  coïncident ainsi que toutes leurs dérivées sur le tore  $T = \mathbb{T}^n \times \{0\}$ . En particulier, si  $\alpha = \tau(0)$ , alors :

$$f(\theta, 0) = (\theta + \alpha, 0).$$

V. 2. Cette situation apparaît lorsque  $f$  est une perturbation au sens  $C^\infty$  d'un difféomorphisme  $g_0$  complètement intégrable, i. e. possédant une famille  $(T_r)_{r \in B_\delta}$  de tores lagrangiens invariants sur chacun desquels  $g_0$  est conjugué à une rotation de vecteur  $\tau(r)$  (tout étant de classe  $C^\infty$ ). Si le vecteur  $\alpha = \tau(0)$  satisfait à une condition diophantienne :

$$\exists \beta \geq 0, \quad \gamma > 0 \quad \text{tels que} \quad \forall (k_0, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \setminus \{0\},$$

$$\left| k_0 + \sum_{i=1}^n k_i \alpha_i \right| \geq \frac{\gamma}{\left( \sum_{i=0}^n |k_i| \right)^{n+\beta}}$$

et si :

$$\det. d\tau(0) \neq 0$$

alors le théorème de Kolmogorov-Arnol'd-Moser (*cf.* Bost [5] et réf. cit.) assure l'existence d'un tore  $T$  invariant par  $f$  et sur lequel  $f$  est conjugué à une rotation de vecteur  $\alpha$ . C'est le lemme de formes normales de Birkhoff (*cf.* [4], p. 109-115 ou l'appendice 2) qui fournit le difféomorphisme  $f_0$  tangent à  $f$  à l'ordre infini sur  $T$ .

V. 3. Le théorème suivant est l'analogue du théorème 1 (*cf.* II. 3) dans cette situation. Sa déduction du théorème 2 (*cf.* II. 4) se fait, pas à pas, de manière identique à celle du théorème 1 (*voir* § III), aussi nous ne la référons pas.

Rappelons que le tore  $T$  est dit topologiquement stable sous l'action d'un difféomorphisme symplectique s'il possède un système fondamental de voisinages invariants par ce difféomorphisme.

Il est clair que  $T$  est topologiquement stable sous l'action de  $f_0$ .

THÉORÈME 3. — *Sous les hypothèses de V. 1, il existe un plongement symplectique de classe  $C^\infty$  :*

$$g: \mathbb{T}^n \times B_\delta \rightarrow \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n,$$

*tangent à  $f$  l'ordre infini sur  $T$  et arbitrairement proche de  $f$  en topologie  $C^\infty$ , sous l'action duquel  $T$  n'est pas topologiquement stable.*

## VI. Diffusion dans les systèmes hamiltoniens

Dans ce paragraphe, nous étudions la possibilité de diffusion d'Arnol'd dans les systèmes hamiltoniens ayant au moins 3 degrés de liberté.

VI. 1. Soient  $n \geq 3$ ,  $\delta > 0$  et  $B_\delta$  la boule de  $\mathbb{R}^n$  de rayon  $\delta$  centrée à l'origine. On considère deux fonctions :

$$H_0: B_\delta \rightarrow \mathbb{R}$$

et

$$H: \mathbb{T}^n \times B_\delta \rightarrow \mathbb{R}$$

de classe  $C^\infty$  (on regardera aussi  $H_0$  comme une fonction définie sur  $\mathbb{T}^n \times B_\delta$  ne dépendant pas de la variable  $\theta \in \mathbb{T}^n$ ). On suppose que  $H_0$  vérifie :

$$dH_0(0) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0),$$

$$\det \left[ \frac{\partial^2 H_0}{\partial r_i \partial r_j}(0) \right] \neq 0$$

et que  $H_0$  et  $H$  coïncident, ainsi que toutes leurs dérivées, sur  $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ .

On munit en outre la variété  $\mathbb{T}^n \times B_\delta$  de sa structure symplectique canonique :

$$\omega = \sum_{i=1}^n d\theta_i \wedge dr_i.$$

De même que dans le paragraphe V, cette situation apparaîtra, grâce au théorème des tores invariants de Kolmogorov-Arnol'd-Moser (cf. [5] et réf. cit.) et au principe des formes normales exposé à l'appendice 2 (voir aussi [4], p. 109-115) lorsque  $H$  sera une petite perturbation  $C^\infty$  d'une fonction ne dépendant que de la variable  $r \in B_\delta$  et que  $\alpha = dH_0(0)$  satisfera à une condition diophantienne homogène :

$$\exists \beta \geq 0, \quad \gamma > 0 \quad \text{tels que} \quad \forall (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$$

$$\left| \sum_{i=1}^n k_i \alpha_i \right| \geq \gamma \left( \sum_{i=1}^n |k_i| \right)^{-n+1-\beta}.$$

VI. 1. THÉORÈME 4. — *Il existe une fonction de classe  $C^\infty$  :*

$$H_1: \mathbb{T}^n \times B_\delta \rightarrow \mathbb{R}$$

*coïncidant avec  $H$  sur  $\mathbb{T}^n \times \{0\}$  ainsi que toutes ses dérivées, et arbitrairement proche de  $H$  en topologie  $C^\infty$  telle que, si*

$$X_1 = \left( \frac{\partial H_1}{\partial r}, -\frac{\partial H_1}{\partial \theta} \right)$$

*désigne le champ hamiltonien associé à  $H_1$ , alors  $\mathbb{T}^n \times \{0\}$  n'est pas topologiquement stable sous l'action du flot de  $X_1$  restreint à l'équipotentielle  $H_1^{-1}(H_0(0))$ .*

*Démonstration.* — Nous déduirons ce théorème du théorème 3 (cf. V. 3). Cette déduction n'est pas sans rappeler l'équivalence directe entre les théorèmes de tores invariants pour difféomorphismes et champs de vecteurs de [7] et repose sur un principe de section de Poincaré et de suspension.

Supposons, par exemple, que  $\alpha_1 \neq 0$  et posons

$$H_0(0) = E.$$

L'équation :

$$H_0(r) = E$$

permet d'écrire implicitement  $r_1$  comme fonction de  $r' = (r_2, \dots, r_n)$  :

$$r_1 = \varphi_0(r_2, \dots, r_n)$$

au voisinage de  $0 \in B_\delta$  [on a  $\varphi_0(0) = 0$ ].

D'autre part, le champ hamiltonien

$$X_0 = \left( \frac{\partial H_0}{\partial r}, 0 \right)$$

associé à  $H_0$  a une première composante :

$$X_{0\theta_1} = \frac{\partial H_0}{\partial r_1}$$

qui est non nulle au voisinage de  $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ .

Pour chaque fonction  $H_1: \mathbb{T}^n \times B_\delta \rightarrow \mathbb{R}$  coïncidant avec  $H$  sur  $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ , ainsi que ses dérivées, on peut donc, d'une part résoudre l'équation implicite en  $r_1$  au voisinage de  $\mathbb{T}^n \times \{0\}$  :

$$H_1(\theta, r) = E \Leftrightarrow r_1 = \varphi_1(\theta, r')$$

où  $r' = (r_2, \dots, r_n)$  [on a encore  $\varphi_1(\theta, 0) = 0$ ]. D'autre part, nous pouvons considérer l'application de premier retour  $f_1$  sur la section :

$$\Sigma_1 = \{(\theta, r) \in \mathbb{T}^n \times B_\delta / \theta_1 = 0 \text{ et } H_1(\theta, r) = E\}$$

du flot du champ hamiltonien  $X_1$  associé à  $H_1$ . Remarquons que, sur  $\Sigma_1$ , les coordonnées :

$$(\theta'; r') = (\theta_2, \dots, \theta_n; r_2, \dots, r_n)$$

sont symplectiques, c'est-à-dire :

$$\omega|_{\Sigma_1} = \sum_{i=2}^n d\theta_i \wedge dr_i.$$

L'application  $f_1$  induit alors un plongement symplectique, noté encore  $f_1$ , de  $\mathbb{T}^{n-1} \times B'_\delta$ , dans  $\mathbb{T}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1}$ , où  $B'_\delta$  est la boule de  $\mathbb{R}^{n-1}$  de rayon  $\delta'$  centrée en 0 et où  $0 < \delta' < \delta$  sera supposé assez petit. Cette application est tangente à l'ordre infini sur  $\mathbb{T}^{n-1} \times \{0\}$ , à :

$$f_0: (\theta', r') \rightarrow (\theta' + \tau(r'), r')$$

où

$$\tau(r') = -d\varphi_0(r') = \left( \left( \frac{\partial H_0}{\partial r_2} \right) \left( \frac{\partial H_0}{\partial r_1} \right)^{-1}, \dots, \left( \frac{\partial H_0}{\partial r_n} \right) \left( \frac{\partial H_0}{\partial r_1} \right)^{-1} \right),$$

la valeur de  $\partial H_0 / \partial r_i$  étant prise au point  $r = (\varphi_0(r'), r')$ .

Le théorème 4 résulte alors du théorème 3 et du lemme suivant. On remarque en effet que la stabilité topologique de  $\mathbb{T}^n \times \{0\}$  sous l'action du flot du champ  $X_1$ , équivaut à celle de  $\mathbb{T}^{n-1} \times \{0\}$  sous l'action de  $f_1$ . La proximité de  $H_1$  et de  $H$  s'obtient en remarquant — ce qui est élémentaire dans ce cadre — que, si la fonction  $H_1$  fournit l'instabilité topologique, on peut la remplacer par une fonction  $H_2$  coïncidant avec  $H_1$  au voisinage de  $\mathbb{T}^n \times \{0\}$  et avec  $H$  en dehors d'un petit voisinage de  $\mathbb{T}^n \times \{0\}$  de telle sorte que  $H$  et  $H_2$  soient proches au sens  $C^\infty$  (cette proximité résulte du contact infini entre  $H_1$  et  $H$  sur  $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ ). On peut aussi noter que, par construction, si  $f_1$  est proche de l'application  $f$  induite par  $H$ , alors  $H_1$  sera proche de  $H$ .

VI. 1.2 LEMME. — *Pour tout plongement symplectique :*

$$f_1: \mathbb{T}^{n-1} \times B'_\delta \rightarrow \mathbb{T}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1}$$

coïncidant avec  $f_0$ , ainsi que ses dérivées, sur  $\mathbb{T}^{n-1} \times \{0\}$ , il existe une application :

$$H_1: \mathbb{T}^n \times B_\delta \rightarrow \mathbb{R}$$

coïncidant avec  $H_0$ , ainsi que ses dérivées, sur  $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ , pour laquelle  $f_1$  est l'application de premier retour du flot du champ hamiltonien  $X_1$  associé à  $H_1$  sur la section  $\Sigma_1$  définie plus haut.

*Démonstration.* — Nous allons tout d'abord construire une isotopie symplectique  $(g_t)_{t \in [0, 1]}$  de classe  $C^\infty$ , de  $\text{Id}_{\mathbb{T}^{n-1} \times B'_\delta}$  à l'application  $g = f_1 \circ f_0^{-1}$  telle que, pour tout  $t$ , l'application  $g_t$  coïncide avec l'identité sur  $\mathbb{T}^{n-1} \times \{0\}$  ainsi que toutes ses dérivées.

Pour ce faire, considérons la fonction génératrice de  $g$  (cf. appendice 1) :

$$S: \mathbb{T}^{n-1} \times B'_\delta \rightarrow \mathbb{R}$$

définie par  $S(\theta, 0) = 0$  et :

$$g(\theta', r') = (\Theta', R') \Leftrightarrow \begin{cases} \Theta_i = \theta_i + \frac{\partial S}{\partial R_i}(\theta, R) \\ R_i = r_i - \frac{\partial S}{\partial \theta_i}(\theta, R) \end{cases}, \quad i = 2, \dots, n.$$

Une telle fonction existe au voisinage de  $\mathbb{T}^{n-1} \times \{0\}$ , car là,  $g$  est proche au sens  $C^1$  de l'identité et laisse invariant le tore  $\mathbb{T}^{n-1} \times \{0\}$  (voir l'appendice 1). De plus, comme  $g$  est tangent à l'ordre infini à l'identité sur  $\mathbb{T}^{n-1} \times \{0\}$ , l'application  $S$  est plate sur ce tore. On définit alors, pour chaque  $t \in [0, 1]$ , le symplectomorphisme  $g_t$  par sa fonction génératrice  $\eta(t)S$ , où la fonction  $\eta: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  est de classe  $C^\infty$  et coïncide avec 0 au voisinage de 0 et 1 au voisinage de 1 [de sorte que  $g_t = \text{Id}$  pour  $t$  petit et  $g_t = g$  pour  $t$  proche de 1]. Ce détail sera utile par la suite.

On pose alors, pour  $t \in [0, 1]$ ,

$$f_0^t(\theta', r') = (\theta' + t\tau(r'), r')$$

et

$$f_1^t = g_t \circ f_0^t.$$

Le champ  $\xi_t$  défini sur  $\mathbb{T}^{n-1} \times B'_\delta$  par :

$$\xi_t \circ f_1^t = \frac{d}{dt} f_1^t$$

est localement hamiltonien, puisque son flot  $f_1^t$  préserve la structure symplectique. Il est en fait globalement hamiltonien, car il coïncide sur  $\mathbb{T}^{n-1} \times \{0\}$  avec le champ  $\xi_0$  de hamiltonien  $-\varphi_0$ . De plus,  $\xi_t = \xi_0$  pour  $t$  voisin de 0 et de 1. Pour chaque  $t \in [0, 1]$ , soit  $h_t$  le hamiltonien de  $\xi_t$ , normalisé par :

$$h_t(\theta', 0) = -\varphi_0(0) = 0$$

On a alors  $h_t = -\varphi_0$  pour  $t$  proche de 0 et de 1. On peut donc considérer la fonction de classe  $C^\infty$  :

$$\begin{aligned} h: \mathbb{T}^n \times B'_\delta &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\theta, r') &\rightarrow h_{\theta_1}(\theta', r') \end{aligned}$$

où  $\theta' = (\theta_2, \dots, \theta_n)$ , ainsi que la fonction :

$$\begin{aligned} \bar{H}_1: \mathbb{T}^n \times B_\delta &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\theta, r) &\rightarrow r_1 + h(\theta, r') \end{aligned}$$

où  $r' = (r_2, \dots, r_n)$ . Cette application coïncide avec

$$\begin{aligned} \bar{H}_0: B_\delta &\rightarrow \mathbb{R} \\ r &\rightarrow r_1 - \varphi_0(r') \end{aligned}$$

ainsi que toutes ses dérivées, sur  $\mathbb{T}^n \times \{0\}$  et l'application de premier retour du flot du champ  $\bar{X}_1$  de hamiltonien  $\bar{H}_1$  sur la section  $\Sigma_1 = \Sigma_0 = \{(\theta, r) \in \mathbb{T}^n \times B_\delta / \theta_1 = 0 \text{ et } r_1 = \varphi_0(r')\}$  est, par construction, l'application  $f_1$ .

L'application  $H_1$  cherchée est définie par :

$$H_1(\theta, r) = H_0(\bar{H}_1(\theta, r) + \varphi_0(r'), r_2, \dots, r_n).$$

On remarque en effet que, outre d'être tangente à l'ordre infini à  $H_0$  sur  $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ , cette application vérifie :

$$H_1(\theta, r) = E \Leftrightarrow \bar{H}_1(\theta, r) = 0.$$

Par conséquent, le champ  $X_1$  de hamiltonien  $H_1$  est, en tout point de l'équipotentielle  $H_1^{-1}(E) = \bar{H}_1^{-1}(0)$ , parallèle au champ  $\bar{X}_1$  (puisque sa direction est donnée par l'orthogonal symplectique de l'hyperplan tangent à l'équipotentielle). Cette propriété implique que  $f_1$  est aussi l'application de premier retour du flot de  $X_1$  sur  $\Sigma_1$ . ■

VI. 2. Nous nous intéressons ici, au cas des points singuliers elliptiques des champs de vecteurs hamiltoniens. On considère  $n \geq 3$  et  $\mathbb{R}^{2n}$  muni de sa structure symplectique usuelle :

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i.$$

Soient  $H_0$  et  $H$  deux fonctions de classe  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^{2n}$  dans  $\mathbb{R}$ , ayant 0 comme point critique commun et coïncidant ainsi que toutes leurs dérivées en ce point. On pose

$$r_i = \pi(x_i^2 + y_i^2), \quad i = 1, \dots, n$$

et on suppose que  $H_0$  est une fonction des  $r_i$  seulement, de la forme :

$$H_0(x, y) = \tilde{H}_0(r) = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i + \sum_{i,j} \lambda_{ij} r_i r_j + 0(\|r\|^3)$$

où

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ji}, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

et où les  $\alpha_i$  sont indépendants sur  $\mathbb{Q}$  :

$$(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\} \Rightarrow \sum_{i=1}^n k_i \alpha_i \neq 0.$$

On fait de plus, l'hypothèse de non dégénérescence isoénergétique suivante : la restriction de la forme quadratique  $r \rightarrow \sum \lambda_{ij} r_i r_j$  à l'hyperplan d'équation  $\sum \alpha_i r_i = 0$  est non dégénérée.

Grâce aux formes normales de l'appendice 2, cette situation se produit lorsque l'on dispose d'un point singulier totalement elliptique d'un champ de vecteurs hamiltonien générique.

Si tous les  $\alpha_i$  sont de même signe, disons positif, alors la forme quadratique  $d^2 H(0)$  (à ne pas confondre avec la forme quadratique  $d^2 \tilde{H}_0/dr^2$  liée à la partie quartique de  $H_0$ )

est définie positive, donc 0 est un minimum non dégénéré de H. Les ensembles

$$V_{\varepsilon\delta} = \{z \in \mathbb{R}^{2n} / H(0) \leq H(z) \leq H(0) + \varepsilon \text{ et } \|z\| \leq \delta\}$$

forment alors, lorsque  $\delta > 0$  est fixé suffisamment petit et  $\varepsilon$  tend vers 0, une base de voisinages de l'origine invariants par le flot du champ X de hamiltonien H. L'origine est donc un point singulier topologiquement stable de X. On montre (cf. [15], p. 250-254) que, lorsque  $n=2$  et que  $\alpha_1 \alpha_2 < 0$ , alors grâce au théorème de Kolmogorov-Arnol'd-Moser, si les  $\lambda_{ij}$  vérifient la condition de non dégénérescence décrite plus haut (elle s'écrit ici :

$$\lambda_{11} \alpha_2^2 - 2 \lambda_{12} \alpha_1 \alpha_2 + \lambda_{22} \alpha_1^2 \neq 0)$$

alors l'origine est un point fixe topologiquement stable de X. Notons que, pour ce résultat, la condition :

$$\lambda_{11} \lambda_{22} - \lambda_{12}^2 \neq 0$$

ne suffit pas; il faut sans doute l'assortir de conditions du type « steepness » de Nekhoroshev (cf. [11]).

Lorsque  $n \geq 3$  et que les  $\alpha_i$  ne sont pas tous de même signe, on a le résultat suivant :

**THÉORÈME 5.** — *Il existe une fonction  $H_1$  coïncidant à l'origine avec  $H_0$ , ainsi que toutes ses dérivées, telle que l'origine est un point singulier non topologiquement stable du champ  $X_1$  de hamiltonien  $H_1$ . On peut choisir  $H_1$  arbitrairement proche de H en topologie  $C^\infty$ .*

*Démonstration.* — L'application

$$\begin{aligned} \Phi: \quad \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}_+^n &\rightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ (\theta, r) &\mapsto \left( \sqrt{\frac{r_1}{\pi}} \cos 2\pi\theta_1, \sqrt{\frac{r_1}{\pi}} \sin 2\pi\theta_1, \dots, \sqrt{\frac{r_n}{\pi}} \cos 2\pi\theta_n, \sqrt{\frac{r_n}{\pi}} \sin 2\pi\theta_n \right) \end{aligned}$$

se restreint en un difféomorphisme symplectique de  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}_+^n$  sur un ouvert dense de  $\mathbb{R}^{2n}$ , complémentaire de la réunion des  $n$  sous-espaces de codimension 2, d'équations :

$$x_i = y_i = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

(ici,  $\mathbb{R}_+$  désigne l'ensemble des réels positifs ou nuls et  $\mathbb{R}_+^*$  celui des réels strictement positifs). Le théorème de prolongement de Whitney permet d'étendre les fonctions  $\tilde{H}_0 = H_0 \circ \Phi$  et  $\tilde{H} = H \circ \Phi$  à  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$  en des fonctions de classe  $C^\infty$ , notées encore  $\tilde{H}_0$  et  $\tilde{H}$ . On supposera, ce qui est possible, que  $\tilde{H}_0$  ne dépend que de la variable  $r$ .

L'équation implicite en  $r_1$  :

$$H_0(r) = H_0(0)$$

peut alors se résoudre au voisinage de 0 :

$$r_1 = \varphi_0(r'), \quad r' = (r_2, \dots, r_n).$$



L'hypothèse faite sur les signes des  $\alpha_i$  montre que l'ouvert de  $\mathbb{R}^{n-1}$  :

$$\{r' \in \mathbb{R}_+^{*n-1} / \varphi_0(r') > 0\}$$

contient l'intersection  $B'_\delta \cap C$  d'une boule ouverte de  $\mathbb{R}^{n-1}$  de rayon  $\delta' > 0$ , centrée à l'origine avec un cône ouvert non vide  $C$ .

Notons :

$$\begin{aligned} f_0: \mathbb{T}^{n-1} \times B'_\delta &\rightarrow \mathbb{T}^{n-1} \times B'_\delta \\ (\theta', r') &\mapsto (\theta' + \tau(r'), r') \end{aligned}$$

où

$$\tau(r') = \left( -\frac{\partial \varphi_0}{\partial r_2}, \dots, -\frac{\partial \varphi_0}{\partial r_n} \right).$$

L'application  $f_0$  n'est autre que la section de Poincaré du champ hamiltonien  $\tilde{X}_0$  associé à  $\tilde{H}_0$  sur  $\mathbb{T}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1}$  décrite en VI. 1.

Il est exposé en détail au paragraphe III comment l'on peut perturber  $f_0$  en  $f_1$  de telle manière que  $\mathbb{T}^{n-1} \times \{0\}$  ne soit plus topologiquement stable sous l'action de  $f_1$ , mais que  $f_0$  et  $f_1$  coïncident en dehors de  $\mathbb{T}^{n-1} \times C'$ , où  $C'$  est un cône ouvert dont l'adhérence est contenue dans  $C$ .

La construction du paragraphe VI. 1 fournit alors, à partir de  $f_1$ , une application  $\tilde{H}_1$  coïncidant avec  $\tilde{H}_0$  en dehors de  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R} \times C'$ , telle que  $\mathbb{T}^n \times \{0\}$  est un tore invariant non topologiquement stable du champ hamiltonien  $\tilde{X}_1$  associé à  $\tilde{H}_1$ .

On peut alors modifier  $\tilde{H}_1$  en  $\tilde{H}_2$  de sorte que  $\tilde{H}_2$  coïncide avec  $\tilde{H}_0$  en dehors de  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}_+^{*n}$  et avec  $\tilde{H}_1$  sur un voisinage de l'équipotentielle tronquée :

$$\{(\theta, r) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}_+^{*n} / \tilde{H}_1(\theta, r) = \tilde{H}_1(0)\}.$$

On pose, par exemple (en suivant les notations de VI. 1) :

$$\begin{aligned} \psi(\theta, r') &= h(\theta, r') - \varphi_0(r') \\ \tilde{H}_2(\theta, r) &= r_1 - \varphi_0(r') + \eta \left( \frac{r_1 - \varphi_0(r')}{\|r'\|} \right) \psi(\theta, r') \end{aligned}$$

où la fonction  $\eta$  est de classe  $C^\infty$ , vaut 1 au voisinage de 0 et a son support contenu dans  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ , le réel  $\varepsilon$  vérifiant :

$$\forall r' \in \bar{C}', \quad \varphi_0(r') > \varepsilon \|r'\|.$$

On a ainsi  $\bar{H}_2 = \bar{H}_0$  en dehors de  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}_+^{*n}$  et on peut poser :

$$\tilde{H}_2(\theta, r) = H_0(\bar{H}_2(\theta, r) + \varphi_0(r'), r_2, \dots, r_n).$$

L'application  $H_1$  coïncidant avec  $H_0$  sur les sous-espaces d'équation :

$$x_i = y_i = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

et avec  $\tilde{H}_2 \circ \Phi^{-1}$  sur l'ouvert restant convient. ■

## APPENDICE 1

## Fonctions génératrices

Les résultats qui suivent n'ont rien de nouveau (*voir* [2]) mais nous n'avons pas trouvé de références les exposant de manière appropriée à cet article.

Soient  $n \geq 1$ ,  $\delta > 0$  et  $B_\delta$  la boule de  $\mathbb{R}^n$  de rayon  $\delta$ , centrée en 0.

On considère un plongement symplectique homotope à l'identité :

$$f: \mathbb{T}^n \times B_\delta \rightarrow \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n.$$

La forme symplectique standard :

$$\omega = \sum d\theta_i \wedge dr_i$$

sur  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$  est exacte :

$$\omega = -d\alpha$$

où

$$\alpha = \sum_{i=1}^n r_i d\theta_i.$$

Comme  $f$  préserve  $\omega$ , la forme  $f^*\alpha - \alpha$  est fermée :

$$d(f^*\alpha - \alpha) = -f^*\omega + \omega = 0.$$

DÉFINITION. — On dit que  $f$  est *globalement canonique* si la forme  $f^*\alpha - \alpha$  est exacte :

$$f^*\alpha - \alpha = dh.$$

Une application globalement canonique est donc symplectique (canonique, suivant l'ancienne terminologie).

Si  $\lambda \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , l'application :

$$(\theta, r) \rightarrow (\theta, r + \lambda)$$

est symplectique mais pas globalement canonique.

PROPOSITION A1.1. — *Si  $f$  est symplectique et laisse invariant un tore lagrangien  $T$  homotope à  $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ , alors elle est globalement canonique.*

Rappel. — Un tore lagrangien est l'image d'un plongement :

$$j: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$$

tel que :

$$j^*\omega = 0.$$

Remarque. — La proposition est fausse si on ne suppose pas  $T$  lagrangien.

*Démonstration de la proposition A1.1.* — La forme  $j^* \alpha$  est fermée sur  $\mathbb{T}^n$  et, comme  $j$  induit un isomorphisme sur l'homologie (puisque  $\mathbb{T}$  est homotope à  $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ ), l'application  $g = j^{-1} \circ f|_{\mathbb{T}} \circ j$  opère trivialement sur l'homologie de  $\mathbb{T}^n$ . On en déduit que, pour tout lacet  $\gamma$  tracé sur  $\mathbb{T}^n$ ,

$$\int_{\gamma} g^* j^* \alpha = \int_{g(\gamma)} j^* \alpha = \int_{\gamma} j^* \alpha$$

donc

$$\int_{j(\gamma)} f^* \alpha = \int_{j(\gamma)} \alpha.$$

La forme  $f^* \alpha - \alpha$ , ayant des intégrales nulles sur une famille de lacets engendrant le groupe fondamental de  $\mathbb{T}^n$ , est exacte. ■

Lorsque  $f$  est globalement canonique et proche en topologie  $C^1$  de l'identité, on définit sa fonction génératrice comme suit. On pose :

$$f(\theta, r) = (\Theta, R).$$

Soit

$$\begin{aligned} \iota: \mathbb{T}^n \times B_\delta &\rightarrow \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \\ (\theta, r) &\rightarrow (\theta, R). \end{aligned}$$

C'est un difféomorphisme de classe  $C^k$  si  $f$  est de classe  $C^k$ , et proche de l'identité en topologie  $C^1$ . La fonction

$$\Theta - \theta: \mathbb{T}^n \times B_\delta \rightarrow \mathbb{T}^n$$

est, par hypothèse, de degré 0; elle peut donc se relever en une fonction :

$$\tau: \mathbb{T}^n \times B_\delta \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Nous normaliserons le choix de  $\tau$  par la condition :

$$\forall x \in \mathbb{T}^n \times B_\delta, \quad \|\tau(x)\| < \frac{1}{2}$$

(un tel choix est possible si  $f$  est suffisamment proche de l'identité).

La fonction génératrice de  $f$  (définie à une constante près) est :

$$S(\theta, R) = -h \circ \iota^{-1}(\theta, R) + \sum_{i=1}^n R_i \tau_i \circ \iota^{-1}(\theta, R)$$

où

$$f^* \alpha - \alpha = dh.$$

L'avantage de considérer  $S$  plutôt que  $S \circ \iota$  est que, lorsque  $f$  est de classe  $C^k$ , alors  $S \circ \iota$  est aussi de classe  $C^k$ , alors que  $S$  est de classe  $C^{k+1}$ .

On retrouve, inversement,  $f$  à partir de  $S$  par les formules implicites :

$$(A1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta_i = \theta_i + \frac{\partial S}{\partial R_i} \pmod{1} \\ R_i = r_i - \frac{\partial S}{\partial \theta_i} \end{array} \right. \quad i = 1, \dots, n$$

qui rendent  $f$  de classe  $C^k$  si  $S$  est de classe  $C^{k+1}$ .

*Remarque.* — Si  $f(\mathbb{T}^n \times \{0\}) = \mathbb{T}^n \times \{0\}$ , alors  $S$  est constante sur  $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ , et inversement.

En outre, les applications de la forme suivante (dites complètement intégrables) :

$$f(\theta, r) = (\theta + \tau(r), r)$$

où, pour que  $f$  soit symplectique, la forme  $\sum \tau_i dr_i$  est exacte, sont caractérisées par le fait que leur fonction génératrice  $S$  ne dépend que de  $r$ . On a alors :

$$\tau_i = \frac{\partial S}{\partial r_i}.$$

Soit  $\bar{B}_\delta$  l'adhérence de  $B_\delta$  et  $\partial B_\delta$  son bord. Le groupe  $\text{Diff}^k(\mathbb{T}^n \times \bar{B}_\delta, \partial B_\delta)$  des difféomorphismes symplectiques de  $\mathbb{T}^n \times \bar{B}_\delta$  valant l'identité sur  $\partial B_\delta$  est donc une variété banachique modelée sur l'espace  $C_1^{k+1}(\mathbb{T}^n \times \bar{B}_\delta, \partial B_\delta)$  des fonctions de classe  $C^{k+1}$  sur  $\mathbb{T}^n \times \bar{B}_\delta$  s'annulant au bord, ainsi que leur première dérivée, à condition que  $n \geq 2$  (pour que  $\partial B_\delta$  soit connexe).

Lorsque  $n=1$ ,  $\mathbb{T} \times \bar{B}_\delta$  est un anneau fermé et on doit alors considérer l'espace des fonctions de classe  $C^{k+1}$  sur  $\mathbb{T} \times \bar{B}_\delta$ , nulles sur le bord inférieur, constante sur le bord supérieur et dont la dérivée est nulle sur les deux bords.

L'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : \text{Diff}_\omega^k(\mathbb{T}^n \times \bar{B}_\delta, \partial B_\delta) &\rightarrow C_1^{k+1}(\mathbb{T}^n \times \bar{B}_\delta, \partial B_\delta) \\ f &\mapsto S \end{aligned}$$

définie au voisinage de l'identité, n'est que continue, de même que sa réciproque  $\mathcal{S}^{-1}$ . Elles deviennent différentiables à condition de baisser la classe de différentiabilité dans l'espace d'arrivée. Précisément, si  $l \leq k-1$ , alors :

$$\mathcal{S} : \text{Diff}_\omega^k(\mathbb{T}^n \times \bar{B}_\delta, \partial B_\delta) \rightarrow C_1^{k-l}(\mathbb{T}^n \times \bar{B}_\delta, \partial B_\delta)$$

est de classe  $C^{l+1}$  au voisinage de l'identité (l'analogie est valable pour  $\mathcal{S}^{-1}$ ).

Si l'on considère des applications de classe  $C^\infty$ , alors  $\mathcal{S}$  est un bon difféomorphisme de classe  $C^\infty$  au voisinage de l'identité (*voir* [5] pour la définition des bons espaces de Fréchet et des bonnes applications, en anglais : tame).

La même théorie peut être faite pour les applications symplectiques de  $\mathbb{R}^{2n}$  dans lui-même, définies au voisinage de 0. Dans ce cas, comme  $\mathbb{R}^{2n}$  est simplement connexe, il n'y a pas de différence entre les applications symplectiques et globalement canoniques.

PROPOSITION A1.2. — *On considère une variété symplectique  $(M, \omega)$  de dimension  $2n$ , un difféomorphisme symplectique  $f$  de  $M$  et un tore lagrangien  $T$  invariant par  $f$ , le tout de classe  $C^\infty$ . Soit  $f_0$  un germe d'application symplectique de classe  $C^\infty$  au voisinage de  $T$ , coïncidant, ainsi que toutes ses dérivées, avec  $f$  sur  $T$ .*

*Il existe un difféomorphisme symplectique  $f_1$  de classe  $C^\infty$  de  $M$ , coïncidant avec  $f_0$  au voisinage de  $T$  et avec  $f$  en dehors d'un voisinage de  $T$  que l'on peut choisir arbitrairement petit. De plus, on peut demander que  $f$  et  $f_1$  soient proches en topologie  $C^\infty$ .*

*Ce résultat reste valable si l'on remplace  $T$  par un point de  $M$  fixé par  $f$ .*

Rappelons le résultat de Weinstein [9], p. 109 (et de Darboux [9], p. 109 dans le cas où  $T$  est un point de  $M$ ) :

*Si  $j: \mathbb{T}^n \rightarrow M$  est un plongement de classe  $C^\infty$  vérifiant  $j^* \omega = 0$ , il existe un  $\delta > 0$  et un plongement symplectique :*

$$\bar{j}: \mathbb{T}^n \times B_\delta \rightarrow M$$

*vérifiant :*

$$\bar{j}(\theta, 0) = j(\theta).$$

*L'image de  $\bar{j}$  est alors un voisinage de  $T = j(\mathbb{T}^n)$ .*

*Démonstration de la proposition A1.2. — Nous la ferons pour un tore invariant, le cas du point fixe étant similaire.*

Grâce au théorème de Weinstein, on peut supposer que  $M = \mathbb{T}^n \times B_\delta$ . Comme  $g = f_0 \circ f^{-1}$  coïncide avec l'identité, ainsi que toutes ses dérivées, sur  $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ , l'application  $g$  est globalement canonique (elle fixe  $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ ) et on peut trouver un  $\delta' > 0$  tel que  $g|_{B_{\delta'}}$  soit suffisamment proche de l'identité pour posséder une fonction génératrice  $S$ , que l'on normalise par :

$$S|_{\mathbb{T}^n \times \{0\}} = 0.$$

En fait,  $S$  est plate sur  $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ . Il n'est alors pas difficile de trouver une fonction  $S_1$  petite en topologie  $C^\infty$ , coïncidant avec  $S$  sur  $\mathbb{T}^n \times B_{\delta_1}$  et nulle en dehors de  $\mathbb{T}^n \times B_{\delta_1}$ , où  $0 < \delta_1 < \delta'_1 < \delta'$ , le réel  $\delta'_1$  pouvant être choisi arbitrairement petit.

Si  $g_1$  est le difféomorphisme de fonction génératrice  $S_1$  alors  $g_1$  coïncide avec l'identité en dehors de  $\mathbb{T}^n \times B_{\delta_1}$  et avec  $g$  au voisinage de  $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ .

On peut le prolonger par l'identité sur  $\mathbb{T}^n \times (B_\delta \setminus B_{\delta_1})$  et on pose :

$$f_1 = g_1 \circ f. \quad \blacksquare$$

*Remarque. — La stabilité topologique est une notion locale : si  $f_0$  et  $f_1$  coïncident au voisinage d'un compact invariant  $T$ , la stabilité de  $T$  pour  $f_0$  équivaut à celle pour  $f_1$ .*

## APPENDICE 2

## Formes normales

Les résultats présentés ici étaient connus des astronomes du XIX<sup>e</sup> siècle sous le nom de « séries de perturbations ». Ils expriment que, sous des conditions de *non-résonance*, un système hamiltonien ou un difféomorphisme symplectique (de classe  $C^\infty$ ) est, au voisinage d'un point fixe elliptique ou de certains tores lagrangiens invariants, formellement conjugué à un système complètement intégrable (cf. Birkhoff [4], p. 109-115). Le travail de Poincaré [13] montre qu'en général, les séries formelles obtenues ont un rayon de convergence nul; cependant, le théorème de réalisation  $C^\infty$  des séries formelles de Borel montre qu'un système non résonnant est  $C^\infty$ -tangent à un système intégrable (cf. A2. 1. 4).

A2. 1. Nous exposerons d'abord le cas des tores invariants d'un système hamiltonien, fournis par le théorème de Kolmogorov-Arnol'd-Moser.

Nous nous trouvons donc sur la variété  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$  munie de sa forme symplectique standard :

$$\omega = \sum_{j=1}^n d\theta_j \wedge dr_j,$$

en présence d'une application de classe  $C^\infty$  :

$$H: \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

ayant, au voisinage de  $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ , le développement limité :

$$H(\theta, r) = \sum_{j=1}^n \alpha_j r_j + \mathcal{O}(\|r\|^2)$$

où le vecteur  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  satisfait à une condition diophantienne homogène :

$$\exists \beta \geq 0 \quad \text{tel que} \quad \min_{z^n \setminus \{0\}} |\langle k, \alpha \rangle| \|k\|^{n-1+\beta} > 0$$

où l'on a noté :  $\langle k, \alpha \rangle = \sum_{j=1}^n k_j \alpha_j$ .

A2. 1. 1 THÉORÈME. — *Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , il existe un difféomorphisme symplectique  $\Phi_m$  de  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$  vérifiant :*

$$\Phi_m(\theta, 0) = (\theta, 0)$$

et

$$H \circ \Phi_m(\theta, r) = H_m(r) + \mathcal{O}(\|r\|^{m+1})$$

où  $H_m$  est un polynôme degré au plus  $m$  en  $r$ . Cette réduction a un sens formel en ce que :

$$H_{m+1}(r) = H_m(r) + \mathcal{O}(\|r\|^{m+1})$$

et, si  $\Phi_m(\theta, r) = (\theta_m, r_m)$ , alors :

$$\begin{cases} \theta_{m+1} = \theta_m + \mathcal{O}(\|r\|^m) \\ r_{m+1} = r_m + \mathcal{O}(\|r\|^{m+1}). \end{cases}$$

La démonstration procède par récurrence sur  $m$  et repose sur un lemme de résolution d'une équation aux dérivées partielles.

LEMME. — Soit  $a \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$  une fonction vérifiant :

$$\int_{\mathbb{T}^n} a(\theta) d\theta = 0.$$

Il existe une fonction  $b \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ , unique à une constante près, telle que :

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \frac{\partial b}{\partial \theta_j} = a.$$

Démonstration du lemme. — On écrit :

$$a(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \hat{a}(k) e^{2i\pi \langle k, \theta \rangle}.$$

Comme  $a$  est de classe  $C^\infty$ , on a :

$$\lim_{\|k\| \rightarrow \infty} \|k\|^p |\hat{a}(k)| = 0$$

pour tout  $p \in \mathbb{N}$ . Du fait que  $\alpha$  est diophantien, on a aussi :

$$\lim_{\|k\| \rightarrow \infty} \|k\|^p \left| \frac{\hat{a}(k)}{\langle k, \alpha \rangle} \right| = 0.$$

La fonction  $b$  est alors donnée par :

$$b(\theta) = \hat{b}(0) + \frac{1}{2i\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \frac{\hat{a}(k)}{\langle k, \alpha \rangle} e^{2i\pi \langle k, \theta \rangle}$$

l'unique choix résidant dans la constante  $\hat{b}(0)$ . ■

A2.1.3. *Démonstration du théorème.* — L'hypothèse de récurrence à l'ordre  $m-1 \geq 1$  voit la fonction  $H$  sous la forme :

$$H(\theta, r) = H_{m-1}(r) + \sum_{|p|=m} a_p(\theta) r^p + \mathcal{O}(\|r\|^{m+1})$$

où

$$H_{m-1}(r) = \sum_{j=1}^n \alpha_j r_j + \mathcal{O}(\|r\|^2).$$

On a noté ici  $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{N}^n$  un  $n$ -entier,  $|p| = \sum_{j=1}^n p_j$  et  $r^p = r_1^{p_1} \dots r_n^{p_n}$ , et les fonctions  $a_p: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sont de classe  $C^\infty$ . On cherche un difféomorphisme symplectique de  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$  :

$$\psi: (\theta, r) \rightarrow (\Theta, R)$$

dont la fonction génératrice  $S$  est de la forme :

$$S(\theta, R) = \sum_{|p|=m} b_p(\theta) R^p.$$

On a :

$$(A2.1.3.1) \quad \begin{cases} R_j = r_j - \frac{\partial S}{\partial \theta_j} = r_j + \mathcal{O}(\|R\|^m) = r_j + \mathcal{O}(\|r\|^m) \\ \Theta_j = \theta_j + \frac{\partial S}{\partial R_j} = \theta_j + \mathcal{O}(\|r\|^{m-1}) \end{cases}, \quad j = 1, \dots, n$$

donc :

$$\begin{aligned} H \circ \psi(\theta, r) &= \sum_{j=1}^n \alpha_j (R_j - r_j) + H(\theta, r) + \mathcal{O}(\|r\|^{m+1}) \\ &= H_{m-1}(r) + \sum_{|p|=m} \left( a_p(\theta) - \sum_{j=1}^n \alpha_j \frac{\partial b_p}{\partial \theta_j} \right) r^p + \mathcal{O}(\|r\|^{m+1}). \end{aligned}$$

Le lemme permet de conclure. ■

*Remarque.* — On peut montrer l'unicité des polynômes  $H_m$ , sans toutefois obtenir celle des  $\Phi_m$ .

A2.1.4. Ce théorème montre qu'il existe des séries formelles :

$$S_\infty = \sum_{|p| \geq 2} b_p(\theta) R^p$$

et

$$H_\infty = \sum_{|p| \geq 1} a_p r^p$$

telles que, si  $\Phi_\infty$  est le difféomorphisme formel au voisinage de  $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ , de fonction génératrice  $S_\infty$ , alors :

$$H \circ \Phi_\infty = H_\infty.$$

D'après le théorème de Borel, il existe des fonctions de classe  $C^\infty$  :

$$\bar{S}_\infty: \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

et

$$\bar{H}_\infty: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$



ayant les développements de Taylor respectifs  $S_\infty$  et  $H_\infty$ . On peut supposer  $\partial\bar{S}_\infty/\partial\theta$  petite en topologie  $C^1$ , de sorte que l'application :

$$\iota^{-1}: (\theta, R) \mapsto (\theta, r)$$

où

$$r_j = R_j + \frac{\partial\bar{S}_\infty}{\partial\theta_j}, \quad j=1, \dots, n,$$

est un difféomorphisme global de  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ , ce qui permet de définir le difféomorphisme globalement canonique  $\bar{\Phi}_\infty$  de  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$  ayant pour fonction génératrice  $\bar{S}_\infty$ . Les fonctions  $H \circ \bar{\Phi}_\infty$  et  $\bar{H}_\infty$  coïncident alors à l'ordre infini sur  $\mathbb{T}^n \times \{0\}$ .

A2.2. Nous considérons ici un point singulier elliptique d'un champ de vecteurs hamiltonien.

Soit  $\mathbb{R}^{2n}$  muni de sa forme symplectique standard :

$$\omega = \sum_{j=1}^n dx_j \wedge dy_j$$

et

$$H: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$$

une application de classe  $C^\infty$  dont l'origine est un point critique non dégénéré.

On note :

$$X = \left( \frac{\partial H}{\partial y_1}, -\frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial y_n}, -\frac{\partial H}{\partial x_n} \right)$$

le champ de vecteurs hamiltonien associé à  $H$ .

A2.2.1. *La partie linéaire.* On suppose que les valeurs propres de  $DX(0)$  (qui sont nécessairement deux à deux opposées) sont imaginaires pures et distinctes, en particulier non nulles. On les appelle  $\pm i\alpha_1, \dots, \pm i\alpha_n$ .

Dans ce cas, il existe un opérateur linéaire symplectique  $L$  de  $\mathbb{R}^{2n}$  tel que :

$$H \circ L(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \alpha_j (x_j^2 + y_j^2) + \mathcal{O}(\|(x, y)\|^3).$$

Cette formule impose le choix du signe des  $\alpha_j$ . Comme  $L$  est symplectique, si  $Y$  est le champ hamiltonien associé à  $H \circ L$ , on a :

$$Y = L^* X$$

et

$$DY(0) = L^{-1} \circ DX(0) \circ L: (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \rightarrow (\alpha_1 y_1, -\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n y_n, -\alpha_n x_n).$$

*Remarque.* — Si  $DX(0)$  avait des valeurs propres réelles  $\pm \alpha_j$ , il faudrait modifier le terme correspondant de la partie quadratique de  $H \circ L$  en :

$$\alpha_j (x_j^2 - y_j^2),$$

le signe de  $\alpha_j$  étant alors libre.

A2.2.2. *La partie non linéaire.* — On suppose H de la forme :

$$H(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \alpha_j (x_j^2 + y_j^2) + \mathcal{O}(\|(x, y)\|^3)$$

et on introduit la transformation en coordonnées polaires symplectiques :

$$P: \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

$$(\theta_1, \dots, \theta_n, r_1, \dots, r_n) \mapsto (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$$

définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_j = \sqrt{\frac{r_j}{\pi}} \sin 2\pi\theta_j \\ y_j = \sqrt{\frac{r_j}{\pi}} \cos 2\pi\theta_j \end{array} \right., \quad j=1, \dots, n$$

de sorte que :

$$\omega = \sum_{j=1}^n d\theta_j \wedge dr_j = \sum_{j=1}^n dx_j \wedge dy_j$$

On a alors :

$$H \circ P(\theta, r) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \alpha_j r_j + \sum_{2|p|=3} r^p a_p(\theta) + \mathcal{O}(\|r\|^2)$$

où  $p = (p_1, \dots, p_n)$  et  $p_j \in 1/2\mathbb{N}$ . De plus, les  $a_p$  sont des polynômes trigonométriques de degré au plus  $2|p|=3$ , ayant la propriété suivante :

(\*) Pour chaque  $j$  et chaque terme de  $a_p$ , la somme des exposants de  $\cos 2\pi\theta_j$  et  $\sin 2\pi\theta_j$  dans ce terme n'excède pas  $p_j$ .

En effet,  $r^p a_p(\theta)$  est un polynôme homogène en  $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$  de degré  $2|p|$ .

Dès que les  $\alpha_j$  ne vérifient aucune relation du type suivant (dites de résonance) :

$$\sum_{j=1}^n k_j \alpha_j = 0$$

où

$$k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\} \quad \text{et} \quad |k| = \sum_{j=1}^n |k_j| \leq 2|p|,$$

on peut trouver, pour chaque  $p$ , un polynôme trigonométrique  $b_p$  de degré au plus  $2|p|$  ayant la propriété (\*) et vérifiant :

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \frac{\partial b_p}{\partial \theta_j} = a_p(\theta)$$

(voir pour cela la démonstration du lemme A2.1.2). Notons que l'on a ici :

$$\int_{\mathbb{T}^n} a_p(\theta) d\theta = 0$$

car, comme  $2|p|$  est impair, un des  $p_j$  au moins n'est pas entier et :

$$a_p\left(\theta_1, \dots, \theta_j + \frac{1}{2}, \dots, \theta_n\right) = -a_p(\theta).$$

A2.2.2.1. *Remarque.* — Dans le cas où  $2|p|$  est pair et si  $p$  a toutes ses coordonnées entières, on doit modifier l'équation précédente en la suivante :

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \frac{b_p}{\partial \theta_j} = a_p - [a_p]$$

où  $[a_p]$  est la moyenne de  $a_p$  sur  $\mathbb{T}^n$ , pour pouvoir la résoudre.

Plutôt que de donner le difféomorphisme  $\psi$  cherché par sa fonction génératrice, nous l'exprimerons comme temps 1 d'un champ hamiltonien associé à la fonction :

$$S(\theta, r) = \sum_{2|p|=3} b_p(\theta) r^p.$$

Ceci ne modifie l'expression des nouvelles variables  $(\Theta, R) = \psi(\theta, r)$  par rapport à la formule (A2.1.3.1), que par un terme d'ordre  $|p| + \frac{1}{2} = 2$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Theta_j = \theta_j + \frac{\partial S}{\partial r_j} + \mathcal{O}(\|r\|^2) \\ R_j = r_j - \frac{\partial S}{\partial \theta_j} + \mathcal{O}(\|r\|^2) \end{array} \right., \quad j=1, \dots, n$$

[en effet,  $S$  varie d'une quantité  $\mathcal{O}(\|r\|^2)$  pendant le temps 1], de sorte que l'on a :

$$H \circ P \circ \psi(\theta, r) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \alpha_j r_j + \mathcal{O}(\|r\|^2).$$

Notons que  $T = S \circ P^{-1}$  est un *polynôme* en  $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$  homogène de degré  $2|p|=3$  et que  $\varphi = P \circ \psi \circ P^{-1}$  n'est autre que le temps 1 du champ hamiltonien associé à  $T$ , car  $P$  est symplectique. Par conséquent, on a :

$$H \circ \varphi(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \alpha_j (x_j^2 + y_j^2) + \mathcal{O}(\|(x, y)\|^4).$$

Ce procédé, assorti de la remarque A2.2.2.1 permet de réduire progressivement  $H$  sous la forme :

$$H \circ \varphi_m(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = H_m(r) + \mathcal{O}(\|(x, y)\|^{2m+1})$$

où  $m \in 1/2 \mathbb{N}$  et  $H_m$  est un polynôme en les  $r_j = \pi(x_j^2 + y_j^2)$  de degré majoré par  $m$ , ceci à condition que les  $\alpha_j$  ne satisfassent aucune résonance :

$$\sum_{j=1}^n k_j \alpha_j = 0$$

où

$$0 < |k| \leq 2m.$$

*Remarque.* — Les difféomorphismes symplectiques  $\varphi_m$  ne sont pas uniques (même à un terme négligeable près) mais les polynômes  $H_m$  le sont.

Le procédé de réduction décrit ici donne, pour tout  $m \in 1/2 \mathbb{N}$  :

$$\Phi_{m+\frac{1}{2}} = \Phi_m + \mathcal{O}(\|(x, y)\|^{2m+1})$$

et pour tout  $m \in \mathbb{N}$  :

$$H_{m+\frac{1}{2}} = H_m$$

$$H_{m+\frac{1}{2}} = H_m + \mathcal{O}(\|r\|^{m+1}).$$

Ce qui permet d'obtenir une réduction *formelle* de  $H$  (en général non convergente : voir Poincaré [13]).

Le principe de réalisation  $C^\infty$  de cette réduction à une fonction plate près, exposé en A2.1.4, s'applique ici aussi.

A2.3. Dans le cas des difféomorphismes symplectiques, on utilise le principe de suspension énoncé par le lemme IV.1.2 (voir aussi [7]) et réduisons en forme normale le système hamiltonien obtenu.

A2.3.1. Considérons un tore invariant fourni par le théorème de Kolmogorov-Arnol'd-Moser. Nous disposons donc d'un germe de difféomorphisme  $f$  de classe  $C^\infty$  de  $(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{T}^n \times \{0\})$  vérifiant :

$$f(\theta, 0) = (\theta + \alpha, 0)$$

où  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  satisfait à une condition diophantienne forte :

$$\exists \beta \geq 0 \quad \text{tel que} \quad \min_{z^{n+1} \setminus \{0\}} \left| k_0 + \sum_{j=1}^n k_j \alpha_j \right| \|k\|^{n+\beta} > 0.$$

**THÉORÈME.** — *Il existe un germe de difféomorphisme symplectique  $\varphi$  de classe  $C^\infty$  de  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$  fixant  $\mathbb{T}^n \times \{0\}$  et un germe de fonction  $T \in C^\infty(\mathbb{R}^n, 0)$  vérifiant :*

$$T(r) = \sum_{j=1}^n \alpha_j r_j + \mathcal{O}(\|r\|^2)$$

tels que les germes :  $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$

$$f_0 : (\theta, r) \mapsto (\theta + \tau(r), r)$$

où

$$\tau_j = \frac{\partial T}{\partial r_j}, \quad j=1, \dots, n,$$

coïncident sur  $\mathbb{T}^n \times \{0\}$  ainsi que toutes leurs dérivées.

*Démonstration.* — En suivant la démonstration du lemme IV.1.2, on montre l'existence d'une application  $H \in C^\infty(\mathbb{T}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1})$ , vérifiant :

$$H(\theta, r) = r_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j r_j + \mathcal{O}(\|r\|^2),$$

telle que  $f$  soit l'application de premier retour du champ hamiltonien  $X$  associé à  $H$  sur la section

$$\Sigma = \{(\theta, r) \in \mathbb{T}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} / \theta_0 = 0 \text{ et } H(\theta, r) = 0\}$$

de l'équipotentielle  $H^{-1}(0)$ , repérée à l'aide des coordonnées symplectiques  $(\theta_1, \dots, \theta_n, r_1, \dots, r_n)$  au voisinage de  $\{0\} \times \mathbb{T}^n \times \{0\} \subset \mathbb{T} \times \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ .

D'après les résultats du paragraphe A2.1, il existe un difféomorphisme symplectique  $\Phi$  de  $\mathbb{T}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ , fixant  $\mathbb{T}^{n+1} \times \{0\}$ , et une fonction  $H_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$  qui coïncide avec  $H_1 = H \circ \Phi$  à l'ordre infini sur  $\mathbb{T}^{n+1} \times \{0\}$ .

Les germes de sous-variété de dimension  $2n$  au voisinage de  $\{0\} \times \mathbb{T}^n \times \{0\}$ .

$$\Sigma_0 = \{(\theta, r) \in \mathbb{T}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} / \theta_0 = 0 \text{ et } H_0(r) = 0\}$$

et

$$\Sigma_1 = \{(\theta, r) \in \mathbb{T}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} / \theta_0 = 0 \text{ et } H_1(\theta, r) = 0\}$$

ont un contact infini le long de  $\{0\} \times \mathbb{T}^n \times \{0\}$  et les applications de premier retour respectives  $f_0$  et  $f_1$  des champs  $X_0$  et  $X_1$  associés à  $H_0$  et  $H_1$  sur  $\Sigma_0$  et  $\Sigma_1$  coïncident ainsi que toutes leurs dérivées sur  $\{0\} \times \mathbb{T}^n \times \{0\}$ .

On remarque, par ailleurs, que  $f$  et  $f_1$  sont symplectiquement conjugués (car  $f$  et  $\Phi \circ f_1 \circ \Phi^{-1}$  sont deux sections de Poincaré d'un même champ hamiltonien) et que  $f_0$  a la forme requise, l'application  $T$  étant définie de façon implicite par :

$$H_0(-T(r_1, \dots, r_n), r_1, \dots, r_n) = 0. \quad \blacksquare$$

*Remarque.* — Il existe une démonstration plus directe, par récurrence sur l'ordre de la forme normale, où, pour calculer la fonction génératrice du difféomorphisme cherché on est amené à résoudre une équation aux différences finies :

$$b(\theta + \alpha) - b(\theta) = a(\theta) - [a]$$

où  $a \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$  est donnée,  $[a]$  est sa moyenne et  $b \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$  est une fonction inconnue. On retrouve la nécessité d'une condition diophantienne forte.

A2.3.2. Soit  $f$  un germe de difféomorphisme symplectique de  $(\mathbb{R}^{2n}, 0)$  dont l'origine est un point fixe elliptique. On notera  $e^{\pm 2\pi i \alpha_1}, \dots, e^{\pm 2\pi i \alpha_n}$  les valeurs propres de

$Df(0)$ , supposées distinctes (donc non réelles). On peut alors, quitte à faire un changement linéaire symplectique de coordonnées, supposer que :

$$Df(0) \cdot (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = (x_1 \cos 2\pi\alpha_1 + y_1 \sin 2\pi\alpha_1, -x_1 \sin 2\pi\alpha_1 + y_1 \cos 2\pi\alpha_1, \dots).$$

Il est alors possible, comme dans le lemme IV.1.2, de trouver un germe de fonction  $H \in C^\infty(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n}, \mathbb{T}^1 \times \{0\})$  vérifiant :

$$H(\theta_0, r_0, x, y) = r_0 + \pi \sum_{j=1}^n \alpha_j (x_j^2 + y_j^2) + \mathcal{O}(\|(x, y)\|^3)$$

tel que  $f$  soit l'application de premier retour du champ  $X$  associé à  $H$  sur la section :

$$\Sigma = \{(\theta_0, r_0, x, y) \in \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} / \theta_0 = 0 \text{ et } H(\theta_0, r_0, x, y) = 0\}$$

repérée à l'aide des coordonnées symplectiques  $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ . Après un passage en coordonnées polaires symplectiques, on obtient une application :  $\bar{H} : \mathbb{T}^{n+1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :

$$\bar{H}(\theta, r) = r_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j r_j + \mathcal{O}(\|(r_1, \dots, r_n)\|^{3/2}).$$

De plus les applications  $a_p, p \in 1/2 \mathbb{N}^n$ , intervenant dans le développement de  $\bar{H}$  sont de classe  $C^\infty$  et possèdent la propriété suivante :

Pour  $\theta_0 \in \mathbb{T}^1$  fixé, l'application  $(\theta_1, \dots, \theta_n) \mapsto a_p(\theta_0, \dots, \theta_n)$  est un (★★) polynôme trigonométrique de degré au plus  $2|p|$  ayant la propriété (★) de A2.2.2.

On vérifie aisément que l'on peut résoudre l'équation aux dérivées partielles :

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j \frac{\partial b_p}{\partial \theta_j} = a_p - [a_p]$$

où  $[a_p]$  est la moyenne de  $a_p$  et  $\alpha_0 = 1$ , dès que  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  ne satisfait aucune résonance du type :

$$k_0 + \sum_{j=1}^n k_j \alpha_j = 0$$

où  $k_0 \in \mathbb{Z}$  et  $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$  vérifie  $|k| \leq 2|p|$  (il n'y a pas de petits dénominateurs car seul un nombre fini de valeurs de  $k_0$  est à envisager, pour  $|p|$  fixé).

On en déduit le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Il existe un germe de difféomorphisme symplectique  $\varphi$  de classe  $C^\infty$  de  $(\mathbb{R}^{2n}, 0)$  et un germe de fonction  $T \in C^\infty(\mathbb{R}^n, 0)$  vérifiant :*

$$T(r) = \sum_{j=1}^n \alpha_j r_j + \mathcal{O}(\|r\|^2)$$

tels que les applications  $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$  et  $f_0$ , temps 1 du champ hamiltonien  $\tilde{X}$  sur  $\mathbb{R}^{2n}$  associé à :

$$\tilde{T}: (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \rightarrow T(\pi(x_1^2 + y_1^2), \dots, \pi(x_n^2 + y_n^2))$$

ont même série de Taylor à l'origine.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] V. I. ARNOLD, *Instability of Dynamical Systems with Many Degrees of Freedom* (Dokl. Akad. Nauk. U.S.S.R., vol. 156, n° 1, 1964, p. 9-12).
- [2] V. I. ARNOLD, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique* (MIR, Moscou, 1974).
- [3] V. I. ARNOLD et A. AVEZ, *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Gauthier-Villars, Paris, 1967.
- [4] G. D. BIRKHOFF, *Dynamical Systems* (A.M.S. Colloq. Pub., vol. 9, 1927).
- [5] J. B. BOST, *Tores invariants des systèmes dynamiques hamiltoniens* (Séminaire Bourbaki, n° 639, février 1985, Astérisque, vol. 133-134, 1986).
- [6] A. DELSHAMS-VALDÈS, *Por qué la difusión de Arnol'd aparece genéricamente en los sistemas hamiltonianos con más de dos grados de libertad*, Tesa, facultad de matemáticas, Universidad de Barcelona, Espagne, 1984.
- [7] R. DOUADY, *Une démonstration directe de l'équivalence des théorèmes de tores invariants pour difféomorphismes et champs de vecteurs* (C.R. Acad. Sci. Paris, t. 295, 1982, p. 201-204).
- [8] R. DOUADY et P. LE CALVEZ, *Exemple de point fixe elliptique non topologiquement stable en dimension 4* (C.R. Acad. Sci. Paris, t. 296, 1983, p. 895-898).
- [9] V. GUILLEMIN et S. STERNBERG, *Geometric asymptotics* (A.M.S. Survey, vol. 14, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1977).
- [10] J. MOSER, *On Invariant Curves of Area-preserving Mappings of an Annulus* (Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, M.P.K., 1962, p. 1-20).
- [11] N. N. NEKHOROSHEV, *An Exponential Estimate of the Time of Stability of Nearly-integrable Hamiltonian Systems* (Russian Math. Surveys, vol. 32, n° 6, 1977, p. 1-65).
- [12] J. PALIS, *On Morse-Smale Dynamical Systems* (Topology, vol. 8, 1969, p. 385-405).
- [13] H. POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Gauthier-Villars, Paris, 1892-1899.
- [14] M. SHUB, *Stabilité globale des systèmes dynamiques* (Astérisque, vol. 56, S.M.F., 1978).
- [15] C. L. SIEGEL et J. MOSER, *Lectures on Celestial Mechanics*, Springer, Grundlehren Bd., vol. 187, 1971.
- [16] V. N. TKHAI, *The Stability of Multidimensional Hamiltonian Systems* (PMM U.S.S.R., vol. 49, t. 3, 1985, p. 273-281).

(Manuscrit reçu le 30 août 1986,  
révisé le 13 novembre 1987).

Raphaël DOUADY,  
Unité Associée au C.N.R.S. n° 169,  
Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique,  
Plateau de Palaiseau, 91128 Palaiseau Cedex.