ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ANDRÉ UNTERBERGER
JULIANNE UNTERBERGER

Quantification et analyse pseudo-différentielle

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 21, nº 1 (1988), p. 133-158
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1988_4_21_1_133_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 21, 1988, p. 133 à 158.

QUANTIFICATION ET ANALYSE PSEUDO-DIFFÉRENTIELLE

PAR ANDRÉ ET JULIANNE UNTERBERGER

PLAN DE L'ARTICLE

0. Introduction

Par la diversité des domaines où elle puise son inspiration, et de ceux où elle trouve à s'appliquer (physique mathématique, analyse harmonique, équations aux dérivées partielles, théorie des nombres...), la théorie de la quantification occupe en mathématiques une position remarquable. Cette singularité est encore renforcée par le fait que, jusqu'à une date récente, il s'agissait d'une théorie dans laquelle un seul modèle avait été développé dans tous ses aspects, à savoir le calcul symbolique de Weyl et ses satellites (calcul de Wick-anti-Wick, calcul des opérateurs pseudo-différentiels...). En revanche, le cadre général dans lequel il convient de situer la théorie avait été posé très tôt par les pères fondateurs de la mécanique quantique (en particulier Dirac) et peut être sommairement décrit comme suit.

Soient Π une variété C^∞, Γ un groupe de Lie connexe de difféomorphismes de Π opérant transitivement sur Π. Soient H un espace de Hilbert complexe et V une représentation unitaire projective de Γ dans H (le deuxième adjectif signifie que $V(\Psi)V(\Psi')=\mu V(\Psi\Psi')$ avec $\mu\in\mathbb{C}$, $|\mu|=1$). Soit L un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ constitué d'opérateurs autoadjoints non bornés sur H, extensions d'endomorphismes du même sous-espace dense de H : on suppose que $i[A, B]\in L$ quels que soient A et $B\in L$. Pour tout $A\in L$ soit Symb(A) (le *symbole* de A) une fonction C^∞ sur Π; on fait l'hypothèse que l'application Symb est $\mathbb{R}$-linéaire et jouit d'une propriété de covariance à l'égard de la représentation V : cela signifie que si $\Psi\in\Gamma$ et $A\in L$, alors $V(\Psi)AV(\Psi)^{-1}$ appartient à L et a pour symbole $\mathrm{Symb}(A)\circ\Psi^{-1}$. Pour terminer, on suppose que si (Ψ_t) est un sous-groupe à un paramètre de Γ, on peut choisir $\mu_t\in\mathbb{C}$, $|\mu_t|=1$ tel que l'on ait

$\mu_t V(\Psi_t)=\exp 2i\pi t A$ avec $A \in L$. Alors, si l'on pose $f=\mathrm{Symb}(A)$ et que l'on note X_f le champ de vecteurs générateur du groupe (Ψ_t), on voit en évaluant de deux façons différentes (utilisant la propriété de covariance) le symbole de $d/dt|_{t=0}(e^{2i\pi tA} B e^{-2i\pi tA})$ pour $B \in L$, que l'on a l'identité $\mathrm{Symb}(2i\pi[A, B])=-X_f[\mathrm{Symb}(B)]$.

La description qui précède est familière dans plusieurs domaines, même si les éléments de structure sur lesquels elle est basée ne sont pas toujours les mêmes. Ainsi, le problème de la quantification d'un système mécanique classique consiste-t-il, en supposant donnée une variété symplectique Π, à compléter la structure de telle sorte que $-X_f(g)$ ne soit autre que le crochet de Poisson de f et g. En particulier, cela exige que les transformations $\Psi \in \Gamma$ préservent la structure symplectique de Π, i. e. soient des transformations canoniques : on sait depuis longtemps, cependant, qu'il n'est pas possible de prendre pour Γ le groupe (de dimension infinie) de tous les automorphismes de la structure symplectique de Π. Dans la théorie des représentations, on part au contraire du groupe Γ, et l'on construit tout le reste. Ainsi, la théorie de Kirillov et ses extensions amènent-elles à prendre pour Π une orbite de la représentation coadjointe de Γ, puis à construire H et V au moyen de polarisations.

Le cas où Γ est le groupe d'Heisenberg est celui qui sert de premier modèle dans toutes les investigations : ici l'espace de Hilbert H est $L^2(\mathbb{R}^n)$, et la représentation de Γ dans H est celle dont les générateurs infinitésimaux sont les opérateurs de position et d'impulsion de la physique. Le calcul symbolique adéquat fut introduit par Weyl en 1927, et peut être résumé de la façon suivante. On prend pour espace de phase l'espace $\Pi=\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, muni de la forme symplectique $[\ ,\ ]$ telle que

$$[(y, \eta), (y', \eta')]=-\langle y, \eta' \rangle + \langle y', \eta \rangle,$$

laquelle permet de définir des crochets de Poisson $\{\ ,\ \}$. Pour tout $Y=(y, \eta) \in \Pi$, on définit la transformation unitaire involutive σ_Y de $L^2(\mathbb{R}^n)$ par

$$(\sigma_Y u)(x)=u(2y-x)\, e^{4i\pi\langle x-y, \eta\rangle}$$

et l'on définit le symbole f d'un opérateur à trace A sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ par la relation

$$f(Y)=2^n \operatorname{Tr}(A\, \sigma_Y).$$

Bien entendu, l'application Symb s'étend à des opérateurs beaucoup plus généraux que les opérateurs à trace, en particulier aux opérateurs différentiels à coefficients C^∞. La formule $2i\pi\,\mathrm{Symb}([A, B])=\{\mathrm{Symb}(A), \mathrm{Symb}(B)\}$, valable lorsque A ou B appartient à l'espace L constitué des générateurs infinitésimaux de la représentation d'Heisenberg, doit être élargie en remplaçant le crochet de Poisson au membre de droite par ce que les physiciens appellent en général « crochet de Moyal » : celui-ci résulte de la formule, classique également, qui exprime le symbole $f \# g$ du produit de deux opérateurs différentiels par la somme finie

$$(0.1) \qquad (f \# g)(x, \xi)=\sum \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!\,\beta!}\left(\frac{1}{4i\pi}\right)^{|\alpha|+|\beta|} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta f(x, \xi)\, \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha g(x, \xi).$$

Avec $Y=(y, \eta)$ et $Z=(z, \zeta)$, soit L l'opérateur sur les fonctions de (Y, Z) tel que

$$i\pi L=(4i\pi)^{-1}\sum\left[-\frac{\partial^2}{\partial y_j\partial\zeta_j}+\frac{\partial^2}{\partial z_j\partial\eta_j}\right].$$

On peut alors écrire (0.1) sous la forme

$$(0.2)\qquad (f\# g)(X)=[e^{i\pi L}(f(X+Y)\,g(X+Z))]\qquad (Y=Z=0),$$

et la version intégrale de (0.2) reste valable pour des symboles non différentiels. Une dernière découverte importante concernant la structure formelle du calcul de Weyl fut celle de sa covariance à l'égard de la représentation métaplectique du groupe symplectique : celle-ci est due à plusieurs auteurs indépendants, parmi lesquels A. Weil [23] se plaça dans le cadre le plus général.

Il serait tendancieux de soutenir que l'analyse pseudodifférentielle ait sa source dans le schéma qui précède : la rencontre, quoique fondamentale, est plus tardive, et l'introduction du calcul pseudo-différentiel par Calderon et Zygmund, à la fin des années cinquante, fut plutôt une étape dans la théorie des opérateurs intégraux singuliers, lesquels peuvent être considérés comme issus de la théorie du potentiel. Ces opérateurs ont reçu dans la théorie des équations aux dérivées partielles un champ d'applications qui, aujourd'hui encore, paraît illimité (voir par exemple les deux volumes de Trèves [13]). Quoiqu'il en soit, en ce qui concerne la technique seule des opérateurs pseudodifférentiels, il s'agit de prolonger l'application Symb à des opérateurs aussi généraux que possible tout en étendant, au moins en un sens asymptotique, la validité de la formule (0.1) du calcul symbolique. On y parvient en utilisant des symboles de classe C^∞ tels que les dérivations par rapport à ξ fassent gagner plus que ce que les dérivations par rapport à x ne font perdre (*cf.* Hörmander [7]). Toutefois, Calderon-Vaillancourt montrèrent qu'un symbole C^∞ dont toute dérivée est une fonction bornée fournit un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Leur article [5] prépara en même temps de nombreux travaux de la décennie suivante, en fournissant le plan suivant pour l'étude d'un opérateur de symbole f : en faire un découpage $f=\sum f_j$ et utiliser le lemme hilbertien de Cotlar pour ramener tout le problème à la recherche d'estimations efficaces pour les symboles $f_j\# f_k^*$. Le lien étroit de l'analyse pseudo-différentielle avec la mécanique quantique fut mis en évidence principalement par l'école russe, en particulier Egorov par sa méthode de quantification approchée des transformations canoniques et Maslov par sa théorie des développements asymptotiques. Leray [9] attira l'attention sur ces travaux, en même temps que sur l'importance du groupe métaplectique. Entre-temps, Beals [1] avait considérablement étendu les classes de symboles utilisables : ce dernier travail fut généralisé par l'un des auteurs [14] et par Hörmander [8], ces deux extensions prenant en compte la covariance du calcul de Weyl à l'égard de la représentation métaplectique. Enfin l'article [15] d'un des auteurs introduisit une nouvelle méthode d'étude des opérateurs essentielle pour notre propos : au lieu de découper le symbole et d'utiliser la formule de composition, on établit la possibilité d'écrire l'opérateur comme somme d'opérateurs de rang un $u\mapsto(u, \varphi_{Y'})\,\varphi_Y$, les fonctions φ_Y étant liées aux structures mises en jeu. Cette méthode est particulièrement appropriée à l'analyse pseudo-différentielle sur les espaces de phase non euclidiens, où d'une part l'analyse harmonique conduit à un choix naturel des fonctions φ_Y, et où d'autre part il n'existe pas encore, ou pas du tout, de formule de composition utilisable : on en verra un exemple ici.

Le développement (0.1) est à la base de certaines méthodes asymptotiques. Dans la théorie des opérateurs pseudo-différentiels, il est classique de faire appel à des symboles dont « l'ordre » diminue d'une unité à chaque dérivation par rapport à ξ, ce qui conduit à attribuer un poids de moins en moins important aux termes successifs du développement. Ce développement commence par

$$f \# g = fg + \frac{1}{4 i \pi} \{f, g\} + \ldots$$

et celui de $f \# g - g \# f$ par $(2 i \pi)^{-1} \{f, g\}$. On est quelquefois amené, par exemple si l'on utilise les symboles de Calderon-Vaillancourt rappelés plus haut, à la considération de classes de symboles pour lesquelles les termes successifs de ce développement ne vont pas en général en s'améliorant. Cela n'enlève rien au fait que ce développement doit être considéré comme faisant partie intégrante du calcul de Weyl, puisque de toute manière il reste valable pour des sous-algèbres denses de symboles. Du reste, les physiciens introduisent pour les raisons que l'on sait un petit paramètre h dans la définition du calcul de Weyl, ce qui permet d'accompagner de puissances d'ordre croissant de h les termes successifs du développement (0.1) et donne ainsi une autre signification à l'existence de ce développement : c'est tout simplement le fait que le second membre de la formule de composition (0.2), dans laquelle L a été remplacé par h L, est formellement une fonction analytique de h près de $h=0$.

Le but essentiel du présent travail est de montrer sur un modèle important, celui où l'espace de phase Π est le demi-plan de Poincaré, qu'il ne faut pas s'attendre en général à l'existence de formules asymptotiques de ce genre : en revanche, une généralisation à certains égards surprenante de (0.2) sera établie.

Une quantification des variétés Π munies d'une structure d'espace hermitien symétrique a été proposée par F. A. Berezin ([2], [3]) : elle constitue, par ses deux notions de symboles covariant et contravariant, une généralisation du calcul de Wick-anti-Wick des opérateurs sur $\mathbb{R}^n$. Ainsi qu'il a été expliqué dans [16], il y a cependant trop peu d'opérateurs admettant des symboles contravariants (et trop peu de fonctions qui soient des symboles covariants) pour que le calcul de Wick et ses généralisations constituent un calcul acceptable des opérateurs. Les auteurs ont étudié dans [21] et [22] une généralisation du calcul de Weyl, valable également dans le cas des espaces hermitiens symétriques : celle-ci constitue, dans le cas où $\Pi = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$, le modèle examiné dans le présent travail; nous appellerons calcul de Bessel sur $\mathbb{R}_*^+$ le calcul symbolique en question.

On peut regretter l'absence de validité, dans le calcul de Bessel, de formules asymptotiques du type (0.1). C'est pourquoi l'un des auteurs a introduit dans [17] le calcul de Fuchs des opérateurs sur $\mathbb{R}_*^+$, sorte de « contraction » du calcul de Bessel, qui rétablit la situation à cet égard. Du reste, la méthode que nous emploierons, pour établir dans le calcul de Bessel la généralisation correcte de (0.2), consistera précisément à utiliser les résultats déjà obtenus dans le calcul de Fuchs, plus maniable. Outre les brefs rappels nécessaires, concernant les calculs de Bessel et de Fuchs, nous décrirons certaines algèbres d'opérateurs sur $H=L^2(\mathbb{R}^+)$: il faudra bien, en effet, donner un sens à la composition de deux opérateurs avant de chercher à en exprimer le symbole.

Pour terminer, il nous paraît utile de dire quelques mots sur le prix que nous attachons au calcul de Bessel (et à la quantification des espaces symétriques, d'une manière plus générale). C'est en effet le propos essentiel de ce travail de montrer que ce calcul ne fonctionne pas, comme le calcul de Weyl, dans l'esprit des méthodes asymptotiques traditionnelles. En dépit de son caractère en partie négatif, ce résultat nous paraît intéressant en soi car il fait apparaître, dans la théorie de la quantification, des faits de structure peut-être inattendus. Enfin, le calcul de Bessel (qui dépend d'un paramètre $\lambda>0$) ne peut être dissocié du calcul de Fuchs, sorte de limite renormalisée, quand $\lambda \to \infty$, du calcul de Bessel. Or, d'une part le lien entre ces deux calculs symboliques met bien en évidence le rôle, que nous croyons essentiel dans la théorie de la quantification, joué par les contractions de groupes de Lie (*voir* également Guillemin-Sternberg [6]). D'autre part le calcul de Fuchs et ses diverses généralisations ([17], [18]) semblent à certains égards aussi prometteurs que le calcul de Weyl : le calcul symbolique y est en effet aussi satisfaisant que celui de Weyl, mais adapté à des variétés à bords ou à points coniques, et, dans le premier cas, aux techniques de microlocalisation au bord de Melrose [11]; enfin, une restriction convenable du calcul de Fuchs sur un cône conduit au calcul symbolique de Klein-Gordon [20], dont la relation au calcul de Weyl est analogue à celle de la mécanique relativiste à la mécanique classique.

La formule de composition dont la preuve est l'objet essentiel de ce travail a été annoncée dans la conférence [19].

1. Rappels sur le calcul de Bessel des opérateurs sur une demi-droite

Nous nous contenterons de rappeler ici, sans démonstration, ceux des résultats de [21] qui sont nécessaires pour la suite.

On désigne par Π le demi-plan droit constitué des points $X=x+i\xi$, avec $x>0$; on pose $d\mu(X)=x^{-2}\,dx\,d\xi$. Soit $\Gamma=SL(2,\mathbb{R})$. A tout élément $\gamma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de Γ on associe la transformation $[\gamma]$ de Π telle que

$$[\gamma]X=\frac{aX-bi}{icX+d}. \tag{1.1}$$

Le stabilisateur du point $X=1$ de Π est le sous-groupe $K=SO(2)$, d'où $\Pi=\Gamma/K$.

Soit λ un nombre réel >0. On désigne par H_λ l'espace de Hilbert des (classes de) fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs complexes, telles que

$$\|u\|_\lambda^2=\int_0^\infty |u(t)|^2\,t^{-\lambda}\,dt<\infty. \tag{1.2}$$

La représentation unitaire projective V_λ de Γ dans H_λ est définie comme suit.

Si $\gamma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $c>0$, on a

$$(1.3)\quad V_\lambda(\gamma^{-1})\,u(s)=e^{i\pi(\lambda+1)/2}\,\frac{2\pi}{c}\int_0^\infty u(t)\left(\frac{s}{t}\right)^{\lambda/2}\left(\exp-2i\pi\frac{at+ds}{c}\right)J_\lambda\left(\frac{4\pi}{c}(st)^{1/2}\right)dt.$$

Si $c=0$ et $d>0$, on a

$$(1.4)\quad V_\lambda(\gamma^{-1})\,u(s)=a^{\lambda-1}\left(\exp-2i\pi\frac{b}{a}s\right)u(a^{-2}s).$$

La représentation V_λ n'est autre qu'une version, déguisée par la transformation de Laplace, d'une représentation extraite de la série discrète de Γ : c'est une véritable représentation si λ est entier.

A tout point $Y=y+i\eta\in\Pi$ on associe l'opérateur « de symétrie » σ_Y^λ sur H_λ tel que

$$(1.5)\quad (\sigma_Y^\lambda u)(s)=2\pi y\int_0^\infty e^{2i\pi(t-s)\eta}\left(\frac{s}{t}\right)^{\lambda/2}J_\lambda(4\pi y(st)^{1/2})\,u(t)\,dt.$$

L'opérateur σ_Y^λ est unitaire et involutif. A toute fonction $f\in L^1(\Pi, d\mu)$ on associe l'opérateur $\mathrm{Op}_\lambda(f)$ de symbole actif f défini par

$$(1.6)\quad \mathrm{Op}_\lambda(f)=2\int_\Pi f(Y)\,\sigma_Y^\lambda\,d\mu(Y):$$

c'est un opérateur borné sur H_λ. Si B est un opérateur à trace sur H_λ, on définit le symbole passif $g=\mathrm{Symb}_\lambda(B)$ par la relation

$$(1.7)\quad g(Y)=2\,\mathrm{Tr}(B\,\sigma_Y^\lambda).$$

Dans les conditions qui précèdent, on a

$$(1.8)\quad \mathrm{Tr}(AB)=\int_\Pi f(Y)\,g(Y)\,d\mu(Y)$$

et comme $\mathrm{Op}_\lambda(f)^*=\mathrm{Op}_\lambda(\bar f)$ et que $\mathrm{Symb}_\lambda(B^*)$ est le conjugué de $\mathrm{Symb}_\lambda(B)$, les applications Op_λ et Symb_λ apparaissent comme adjointes l'une de l'autre pour les produits scalaires qui interviennent dans (1.8) : nous nous intéresserons principalement à la seconde. On a la relation de covariance

$$(1.9)\quad \mathrm{Symb}_\lambda(V(\gamma)\,A\,V(\gamma^{-1}))=\mathrm{Symb}_\lambda(A)\circ[\gamma]^{-1}$$

pour tout opérateur à trace A, et tout $\gamma\in\Gamma$, ainsi que la relation analogue avec les symboles actifs.

L'application Op_λ s'étend en une application linéaire continue de $L^2(\Pi, d\mu)$ dans l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur H_λ, et Symb s'étend en une application continue en sens opposé. L'opérateur $F_\lambda = \mathrm{Symb}_\lambda \circ \mathrm{Op}_\lambda$ qui fait passer d'un symbole actif $\in L^2(\Pi, d\mu)$ au symbole passif de l'opérateur associé est une fonction explicite de l'opérateur de Laplace-Beltrami $\Delta = -y^2((\partial^2/\partial y^2) + (\partial^2/\partial\eta^2))$ de Π : on pourra trouver dans ([21], section 5) cette fonction, ainsi que le noyau de l'opérateur F_λ. Rappelons cependant que l'on a

$$F_\lambda^{-1} = (4\pi)^{-2} F_{\lambda+1} [\lambda(\lambda+1) + \Delta]$$

et comme l'opérateur $F_{\lambda+1}$ est borné sur $L^2(\Pi, d\mu)$, l'application $\mathrm{Op}_\lambda \circ F_\lambda^{-1}$ attache à tout symbole g tel que g et Δg appartiennent à $L^2(\Pi, d\mu)$ un opérateur de Hilbert-Schmidt sur H_λ, qu'on appellera l'opérateur de symbole passif g.

Pour tout $X = x + i\xi \in \Pi$, on considère la fonction $\varphi_X^\lambda \in H_\lambda$ définie par

$$\varphi_X^\lambda(t) = 2^{\lambda+1} \pi^{(\lambda+1)/2} (\Gamma(\lambda+1))^{-1/2} x^{(\lambda+1)/2} t^\lambda e^{-2\pi X t}. \tag{1.10}$$

On a $\| \varphi_X^\lambda \|_\lambda = 1$ et, pour toute fonction $u \in H_\lambda$,

$$\int_\Pi |(u, \varphi_X^\lambda)_\lambda|^2 d\mu(X) = \frac{4\pi}{\lambda} \| u \|_\lambda^2. \tag{1.11}$$

L'intérêt de ces fonctions est qu'elles permettent d'écrire

$$u = \frac{\lambda}{4\pi} \int (u, \varphi_X^\lambda)_\lambda \varphi_X^\lambda \, d\mu(X) \tag{1.12}$$

en un sens faible, pour tout $u \in H_\lambda$. De plus, on a

$$V(\gamma) \varphi_X^\lambda = \mu \varphi_{[\gamma] X}^\lambda \tag{1.13}$$

si $\gamma \in \Gamma$, pour un certain nombre complexe μ (dépendant de γ et de X) tel que $|\mu| = 1$. La relation (1.8) et le calcul des symboles actif et passif d'un opérateur de rang un du type $u \mapsto (u, \varphi_Z^\lambda)_\lambda \varphi_X^\lambda$ conduisent aux résultats suivants :

(i) si un opérateur de Hilbert-Schmidt A sur H_λ a pour symbole passif g, alors, quels que soient X et $Z \in \Pi$, on a

$$(A \varphi_X^\lambda, \varphi_Z^\lambda)_\lambda = \int g(Y) W_{X,Z}^\#(Y) \, d\mu(Y) \tag{1.14}$$

où la fonction $W_{X,Z}^\#$ est définie par les formules

$$W_{X,Z}^\#(Y) = \frac{\lambda+1}{2\pi} (\varphi_X^\lambda, \varphi_Z^\lambda)_\lambda (\delta_{X,Z}(Y))^{-\lambda-2}, \tag{1.15}$$

$$(\varphi_X^\lambda, \varphi_Z^\lambda)_\lambda = \left[\frac{2(xz)^{1/2}}{X + \bar{Z}} \right]^{\lambda+1} \tag{1.16}$$

et

$$\delta_{X,Z}(Y) = (y(X + \bar{Z}))^{-1} [y^2 + (X - i\eta)(\bar{Z} + i\eta)]; \tag{1.17}$$

(ii) sous les mêmes hypothèses, on a

$$g(\mathrm{Y})=\left(\frac{\lambda}{4\pi}\right)^2\iint(\mathrm{A}\,\varphi_{\mathrm{Z}}^{\lambda},\,\varphi_{\mathrm{X}}^{\lambda})_{\lambda}\,\mathrm{W}_{\mathrm{X},\,\mathrm{Z}}(\mathrm{Y})\,d\mu(\mathrm{X})\,d\mu(\mathrm{Z}) \tag{1.18}$$

avec

$$\mathrm{W}_{\mathrm{X},\,\mathrm{Z}}(\mathrm{Y})=2(\varphi_{\mathrm{X}}^{\lambda},\,\varphi_{\mathrm{Z}}^{\lambda})_{\lambda}(\delta_{\mathrm{X},\,\mathrm{Z}}(\mathrm{Y}))^{-\lambda-1}. \tag{1.19}$$

Rappelons pour terminer que

$$\delta_{\mathrm{X},\,\mathrm{X}}(\mathrm{Y})=\mathrm{ch}\,d(\mathrm{X},\,\mathrm{Y}), \tag{1.20}$$

où d désigne la distance hyperbolique sur Π, et (*cf.* [21], (5.10)) l'égalité

$$\mathrm{Re}\,\delta_{\mathrm{X},\,\mathrm{Z}}(\mathrm{Y})=\left(\mathrm{ch}\frac{d(\mathrm{X},\,\mathrm{Z})}{2}\right)^{-1}\mathrm{ch}\,d(\mathrm{M},\,\mathrm{Y}), \tag{1.21}$$

en désignant par M le milieu de X et Z au sens de la géométrie hyperbolique.

2. Algèbres d'opérateurs

Pour prouver la formule de composition des symboles, objet essentiel de ce travail, il sera indispensable de sortir du cadre des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur H_{λ}. C'est pourquoi on décrit ici des classes de symboles donnant naissance à des opérateurs bornés plus généraux. Nous appellerons *fonction-poids* toute fonction $m>0$ sur Π vérifiant pour un couple de constantes C_1, N_1 l'inégalité

$$m(\mathrm{Y})\leqq \mathrm{C}_1\,m(\mathrm{Y}')\,(\mathrm{ch}\,d(\mathrm{Y}\ \mathrm{Y}'))^{\mathrm{N}_1} \tag{2.1}$$

quels que soient les points Y et Y′ appartenant à Π. On ne s'intéressera ici qu'aux fonctions-poids bornées. Étant donné un entier $k\geqq 0$, on appellera *symbole de poids m jusqu'à l'ordre de différentiabilité k* toute fonction $g\in\mathrm{C}^k(\Pi)$ vérifiant les inégalités

$$\left|\left(y\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^i\left(y\frac{\partial}{\partial y}\right)^j g(y+i\eta)\right|\leqq \mathrm{C}\,m(y+i\eta) \tag{2.2}$$

pour tout couple $(i,\,j)$ tel que $i+j\leqq k$, et pour C bien choisi.

THÉORÈME 2.1. — *Soit m une fonction-poids bornée vérifiant* (2.1); *soit k un entier* $\geqq 2$, *et supposons* $\lambda>\max(2k,\,2k+\mathrm{N}_1-1)$. *Soit* E_{2k}^m *l'espace des symboles de poids m jusqu'à l'ordre de différentiabilité* $2k$, *muni de sa norme naturelle* $g\mapsto\|g\|_{m;\,2k}$. *Alors l'application* $\mathrm{Op}_{\lambda}\circ\mathrm{F}_{\lambda}^{-1}$ (*qui, rappelons-le, attache à g l'opérateur de symbole passif g*) *initialement définie sur* $\mathrm{C}_0^{\infty}(\Pi)$ *et à valeurs dans l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur* H_{λ}, *s'étend en une application continue de* E_{2k}^m *dans l'espace des opérateurs bornés sur* H_{λ}. *De plus, pour* *tout* $g \in E_{2k}^m$, *il existe* $C>0$ *tel que l'opérateur* $A = Op_\lambda(F_\lambda^{-1} g)$ *vérifie*

$$|(A\,\varphi_X^\lambda,\ \varphi_Z^\lambda)_\lambda| \leqq C\,m(\mu(X, Z))\left(\operatorname{ch}\frac{d(X, Z)}{2}\right)^{1-2k}$$

quels que soient X *et* $Z \in \Pi$: $\mu(X, Z)$ *désigne le milieu de* X *et* Z.

Preuve. — Soit $g \in C_0^\infty(\Pi)$ et partons de (1.14) et (1.15) pour évaluer $(A\,\varphi_X^\lambda,\ \varphi_Z^\lambda)_\lambda$. D'après ([21], (5.29)), les puissances de la fonction $\delta_{X,Z}$ vérifient, si $\lambda>0$, l'équation différentielle

$$\delta_{X,Z}^{-\lambda-2} = (\lambda(\lambda+1))^{-1}[\lambda(\lambda-1)+\Delta]\,\delta_{X,Z}^{-\lambda} \tag{2.3}$$

et, puisque $\lambda > 2k$, il existe un polynôme $P_{\lambda, k}$ en une variable, de degré k, à coefficients dépendant de λ, tel que

$$\delta_{X,Z}^{-\lambda-2} = P_{\lambda,k}(\Delta)\,\delta_{X,Z}^{-\lambda-2+2k}. \tag{2.4}$$

En intégrant par parties, on écrit alors

$$(A\,\varphi_X^\lambda,\ \varphi_Z^\lambda)_\lambda = \frac{\lambda+1}{2\pi}\int (P_{\lambda,k}(\Delta)g)(Y)\,(\varphi_X^\lambda,\ \varphi_Z^\lambda)_\lambda\,(\delta_{X,Z}(Y))^{-\lambda-2+2k}\,d\mu(Y). \tag{2.5}$$

D'après (2.1), on a

$$|(P_{\lambda,k}(\Delta)g)(Y)| \leqq C\,\|g\|_{m;\,2k}\,m(\mu(X, Z))\,(\operatorname{ch} d(Y,\ \mu(X, Z)))^{N_1} \tag{2.6}$$

pour une certaine constante C. D'après (1.16) et (1.20) on a

$$|(\varphi_X^\lambda,\ \varphi_Z^\lambda)_\lambda| = \left(\operatorname{ch}\frac{d(X, Z)}{2}\right)^{-\lambda-1}. \tag{2.7}$$

Enfin, d'après (1.21), on a

$$|\delta_{X,Z}(Y)|^{-\lambda-2+2k} \leqq \left(\operatorname{ch}\frac{d(X, Z)}{2}\right)^{\lambda+2-2k}(\operatorname{ch} d(Y,\ \mu(X, Z)))^{-\lambda-2+2k}. \tag{2.8}$$

On voit que l'intégrale

$$\int (\operatorname{ch} d(Y,\ \mu(X, Z)))^{N_1-\lambda-2-2k}\,d\mu(Y)$$

est bornée si $\lambda > N_1 + 2k - 1$ en se rappelant que, dans les coordonnées polaires géodésiques (r, θ) sur Π centrées au point $\mu(X, Z)$ (de sorte que $r = d(Y,\ \mu(X, Z))$), l'élément de mesure est $d\mu(Y) = \operatorname{sh} r\, dr\, d\theta$. Il résulte de là que

$$|(A\,\varphi_X^\lambda,\ \varphi_Z^\lambda)_\lambda| \leqq C\,\|g\|_{m;\,2k}\,m(\mu(X, Z))\left(\operatorname{ch}\frac{d(X, Z)}{2}\right)^{1-2k}. \tag{2.9}$$

Puisque $k>3/2$, le noyau $(\operatorname{ch} d(X, Z)/2)^{1-2k}$ est celui d'un opérateur borné sur $L^2(\Pi, d\mu)$. En écrivant, pour u et $v \in H_\lambda$, l'identité

$$(2.10) \qquad (A u, v)_\lambda = \left(\frac{\lambda}{4\pi}\right)^2 \iint (u, \varphi_X^\lambda)_\lambda (A \varphi_X^\lambda, \varphi_Z^\lambda)_\lambda (\varphi_Z^\lambda, v)_\lambda \, d\mu(X)\, d\mu(Z)$$

et en utilisant (1.11), on voit que si m est bornée la norme de A dans l'espace des opérateurs bornés sur H_λ est majorée par $C \| g \|_{m;\, 2k}$. Le théorème 2.1 se déduit immédiatement de là.

La preuve d'une réciproque partielle du théorème 2.1 va nécessiter un lemme.

LEMME 2.1. — *Quels que soient les entiers j et $k \geqq 0$, on a, avec*

$$e_1 = y \frac{\partial}{\partial y} \qquad \textit{et} \qquad e_2 = y \frac{\partial}{\partial \eta},$$

l'inégalité

$$| e_2^k e_1^j \delta_{X, Z}(Y) | \leqq 7 \operatorname{ch} d(Y, \mu(X, Z)).$$

Preuve. — Remarquons d'abord la relation $[e_1, e_2] = e_2$, qui autorise à ne considérer dans l'algèbre engendrée par e_1 et e_2 que les opérateurs de la forme indiquée. En partant de (1.17), on obtient

$$(2.11) \qquad e_1^j \delta_{X, Z}(Y) = \frac{y}{X + \bar{Z}} + (-1)^j y^{-1} \frac{(X - i\eta)(\bar{Z} + i\eta)}{X + \bar{Z}},$$

$$(2.12) \qquad e_2 e_1^j \delta_{X, Z}(Y) = (-1)^j \frac{i(X - \bar{Z}) + 2\eta}{X + \bar{Z}}$$

et

$$(2.13) \qquad e_2^2 e_1^j \delta_{X, Z}(Y) = (-1)^j \frac{2y}{X + \bar{Z}}.$$

Pour $k \geqq 3$, on a $e_2^k e_1^j \delta_{X, Z}(Y) = 0$. Soient $Z = z + i\zeta$, $X = x + i\xi$.

La relation

$$(2.14) \qquad \mu(X, Z) = \frac{(xz)^{1/2}}{x + z} | X + \bar{Z} | + i \frac{x\zeta + z\xi}{x + z}$$

se vérifie le plus facilement en constatant qu'elle est vraie si $Z = X^{-1}$, et qu'elle est vraie pour le couple $(aX + ib, aZ + ib)$ si elle est vraie pour le couple (X, Z) et si a et b sont réels, $a > 0$.

On en déduit

$$(2.15) \qquad \operatorname{ch} d(Y, \mu(X, Z)) \geqq \frac{1}{2} y (\operatorname{Re} \mu(X, Z))^{-1} = \frac{x + z}{2(xz)^{1/2}} \frac{y}{| X + \bar{Z} |}$$

et

$$\operatorname{ch} d(\mathrm{Y}, \mu(\mathrm{X}, \mathrm{Z})) \geqq \frac{1}{2} y^{-1} (\operatorname{Re} \mu(\mathrm{X}, \mathrm{Z})) = \frac{1}{2} \frac{(xz)^{1/2}}{x+z} \frac{|\mathrm{X}+\bar{\mathrm{Z}}|}{y}. \tag{2.16}$$

En utilisant également (1.21), on obtient

$$\frac{y}{|\mathrm{X}+\bar{\mathrm{Z}}|} \leqq \operatorname{ch} d(\mathrm{Y}, \mu(\mathrm{X}, \mathrm{Z}) \tag{2.17}$$

et

$$y^{-1} \left| \frac{(\mathrm{X}-i\eta)(\bar{\mathrm{Z}} i\eta)}{\mathrm{X}+\bar{\mathrm{Z}}} \right| \leqq 2 \operatorname{ch} d(\mathrm{Y}, \mu(\mathrm{X}, \mathrm{Z})). \tag{2.18}$$

Il ne reste plus à majorer que le terme du second membre de (2.12) qui provient de la partie réelle du numérateur : or, si

$$\left| \eta - \frac{1}{2}(\xi+\zeta) \right| \leqq \frac{x+z}{2(xz)^{1/2}} y,$$

alors

$$\frac{\left| \eta - \frac{1}{2}(\xi+\zeta) \right|}{|\mathrm{X}+\bar{\mathrm{Z}}|} \leqq \operatorname{ch} d(\mathrm{Y}, \mu(\mathrm{X}, \mathrm{Z})) \tag{2.19}$$

d'après (2.15); dans le cas contraire, on a

$$\begin{aligned} \left| \eta - \frac{1}{2}(\xi+\zeta) \right| &\leqq \frac{2(xz)^{1/2}}{x+z} y^{-1} \left| \eta - \frac{1}{2}(\xi+\zeta) \right|^2 \\ &= \frac{2(xz)^{1/2}}{x+z} y^{-1} \left[|\xi-\eta||\zeta-\eta| + \frac{1}{4}(\xi-\zeta)^2 \right] \\ &\leqq y^{-1} |\mathrm{X}-i\eta||\bar{\mathrm{Z}}+i\eta| + \frac{1}{2} \frac{(xz)^{1/2}}{x+z} y^{-1} |\mathrm{X}+\bar{\mathrm{Z}}|^2 \end{aligned} \tag{2.20}$$

d'où

$$\frac{\left| \eta - \frac{1}{2}(\xi+\zeta) \right|}{|\mathrm{X}+\bar{\mathrm{Z}}|} \leqq 3 \operatorname{ch} d(\mathrm{Y}, \mu(\mathrm{X}, \mathrm{Z})) \tag{2.21}$$

d'après (2.18) et (2.16).

THÉORÈME 2.2. — *Soit m une fonction-poids bornée vérifiant* (2.1), *et supposons* $\lambda > N_1$. *Soit* N *un nombre réel* >2, *et soit* A *un opérateur borné sur* H_λ *tel que*

$$|(A\,\varphi_X^\lambda, \varphi_Z^\lambda)_\lambda| \leqq C\, m(\mu(X, Z)) \left(\operatorname{ch}\frac{d(X, Z)}{2}\right)^{-N}$$

pour une certaine constante $C>0$, *et tout couple* (X, Z) *de points de* Π.

Alors la fonction g sur Π *définie par*

$$g(Y) = \left(\frac{\lambda}{4\pi}\right)^2 \iint (A\,\varphi_Z^\lambda, \varphi_X^\lambda)_\lambda\, W_{X,Z}(Y)\, d\mu(X)\, d\mu(Z)$$

est un symbole de poids m jusqu'à tout ordre de différentiabilité (*entier*) $<N-2$. *L'application* $A \mapsto g$ *étend l'application* Symb_λ *définie jusqu'à présent sur l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt.*

Preuve. — La dernière affirmation, déjà énoncée en (1.18), résulte de l'identité

$$(A\,u, v) = \left(\frac{\lambda}{4\pi}\right)^2 \iint (A\,\varphi_Z^\lambda, \varphi_X^\lambda)_\lambda (u, \varphi_Z^\lambda)_\lambda (\varphi_X^\lambda, v)_\lambda\, d\mu(X)\, d\mu(Z),$$

une conséquence de (1.12). Pour estimer l'intégrale qui définit $g(Y)$, on écrit

$$|(A\,\varphi_Z^\lambda, \varphi_X^\lambda)_\lambda| \leqq C\, m(Y) \left(\operatorname{ch}\frac{d(X, Z)}{2}\right)^{-N} (\operatorname{ch} d(Y, \mu(X, Z)))^{N_1} \tag{2.22}$$

et l'on évalue $|W_{X,Z}(Y)|$ grâce à (1.19), (1.21) et (2.7). On obtient

$$|W_{X,Z}(Y)| \leqq 2(\operatorname{ch} d(Y, \mu(X, Z)))^{-\lambda-1} \tag{2.23}$$

et

$$|g(Y)| \leqq C\, m(Y) \iint \left[\operatorname{ch}\frac{d(X, Z)}{2}\right]^{-N} (\operatorname{ch} d(Y, \mu(X, Z)))^{N_1-\lambda-1}\, d\mu(X)\, d\mu(Z). \tag{2.24}$$

On effectue dans l'intégrale le changement de variables

$$(X, Z) \mapsto (T, \Theta) = (\mu(X, Z), a+bi) \qquad \text{avec} \quad a+bi \in \Pi$$

choisi tel que $Z = a\,T + bi$: alors X, symétrique de Z par rapport à $T = t + \theta\, i$, est donné par (*cf.* [21], (2.29))

$$X = t^2 (a\,T + bi - i\,\theta)^1 + i\,\theta, \tag{2.25}$$

et un calcul élémentaire mais fastidieux fournit

$$d\mu(X)\, d\mu(Z) = \operatorname{ch}\frac{d(X, Z)}{2}\, d\mu(T)\, d\mu(\Theta) = \operatorname{ch} d(1, \Theta)\, d\mu(T)\, d\mu(\Theta). \tag{2.26}$$

Il en résulte que $|g(Y)| \leqq C m(Y)$ pourvu que $N>2$ et $\lambda>N_1$. D'après le lemme 2.1 et (1.21), une dérivation suivant le vecteur e_1 ou e_2 d'une puissance de $\delta_{X,Z}(Y)$ fait perdre au plus le facteur

$$\operatorname{ch} d(Y, \mu(X, Z)) \, |\delta_{X,Z}^{-1}(Y)| \leqq \operatorname{ch} \frac{d(X, Z)}{2},$$

ce qui conduit au théorème 2.2.

Remarques. — (1) dans le théorème 2.1, seule est susceptible d'être utile la différentiabilité de g jusqu'à un ordre $<\lambda$: c'est pourquoi, ainsi que l'indiquera déjà la remarque suivante, les propriétés du calcul de Bessel sur H_λ s'améliorent lorsque λ augmente;

(2) l'application simultanée des théorèmes 2.1 et 2.2 permet d'obtenir une information sur le symbole passif g du produit $A_2 A_1$ de deux opérateurs A_1 et A_2 ayant des symboles passifs de poids m_1 et m_2 respectivement. En effet, supposons (2.1) vérifiée pour les poids m_1 et m_2, supposons $\lambda>\max(2k, 2k+N_1-1)$ et faisons l'hypothèse que A_1 et A_2 ont des symboles passifs de poids m_1 et m_2 respectivement jusqu'à l'ordre de différentiabilité $2k$. On a

$$(2.27) \quad (A_2 A_1 \varphi_X^\lambda, \varphi_Z^\lambda)_\lambda = (A_1 \varphi_X^\lambda, A_2^* \varphi_Z^\lambda)_\lambda = \frac{\lambda}{4\pi} \int (A_1 \varphi_X^\lambda, \varphi_Y^\lambda)_\lambda (A_2 \varphi_Y^\lambda, \varphi_Z^\lambda)_\lambda \, d\mu(Y)$$

et l'application du théorème 2.1 permet d'obtenir

$$(2.28) \quad |(A_2 A_1 \varphi_X^\lambda, \varphi_Z^\lambda)_\lambda| \leqq C m_1(\mu(X, Y)) \, m_2(\mu(Y, Z)) \left(\operatorname{ch} \frac{d(X, Y)}{2}\right)^{1-2k} \left(\operatorname{ch} \frac{d(Y, Z)}{2}\right)^{1-2k} d\mu(Y).$$

Soit $N \geqq 0$. En utilisant l'inégalité

$$(2.29) \quad \operatorname{ch} \frac{d(X, Y)}{2} \operatorname{ch} \frac{d(Y, Z)}{2} \geqq \frac{1}{2} \operatorname{ch} \frac{d(X, Z)}{2}$$

et l'inégalité de Schwarz, on obtient

$$(2.30) \quad |(A_2 A_1 \varphi_X^\lambda, \varphi_Z^\lambda)_\lambda| \leqq C \left(\operatorname{ch} \frac{d(X, Z)}{2}\right)^{-2N_1-N} \left[\int (m_1(\mu(X, Y)))^2 (\operatorname{ch} d(X, Y))^{1-2k+2N_1+N} d\mu(Y)\right]^{1/2} \left[\int (m_2(\mu(Y, Z)))^2 (\operatorname{ch} d(Y, Z))^{1-2k+2N_1+N} d\mu(Z)\right]^{1/2}.$$

En utilisant l'inégalité

$$(2.31) \quad (m_1(\mu(X, Y)))^2 \leqq C (m_1(X))^2 (\operatorname{ch} d(X, Y))^{N_1}$$

et celle similaire relative à m_2, on obtient, pourvu que $2k > N + 3N_1 + 2$,

$$(2.32)\quad |(A_2 A_1 \varphi_X^\lambda, \varphi_Z^\lambda)_\lambda| \leqq C m_1(X) m_2(Z) \left(\operatorname{ch} \frac{d(X, Z)}{2}\right)^{-2N_1 - N}$$

$$\leqq C m_1(\mu(X, Z)) m_2(\mu(X, Z)) \left(\operatorname{ch} \frac{d(X, Z)}{2}\right)^{-N}$$

ce qui permet d'appliquer le théorème 2.2. Ainsi, pourvu que k (et par suite λ également) soit assez grand, l'opérateur $A_2 A_1$ a un symbole de poids $m_1 m_2$ jusqu'à n'importe quel ordre de différentiabilité souhaité.

3. Rappels sur le calcul de Fuchs

Les propriétés qui précèdent montrent qu'il est tentant de remplacer le calcul de Bessel sur H_λ par la limite de ce calcul quand $\lambda \to \infty$, pour autant que cela ait un sens. Pour commencer, il convient de remplacer la représentation V_λ elle-même par une limite renormalisée. On obtient en fait une représentation V non du groupe $\Gamma = SL(2, \mathbb{R})$ lui-même, mais d'une *contraction* Γ_c de ce groupe, d'ailleurs isomorphe au groupe de Poincaré à une dimension d'espace : cet adjectif signifie ici qu'une constante de structure de l'algèbre de Lie de $SL(2, \mathbb{R})$ a été remplacée par 0. On trouvera les détails dans [17] et mieux, dans un cadre plus général, dans la section 17 de [18].

L'espace de phase naturel pour la définition du calcul de Fuchs est un demi-plan sur lequel opère Γ_c : si l'on désigne par KAN la décomposition d'Iwasawa du groupe Γ, l'identification de ce demi-plan avec le demi-plan de Poincaré n'est naturelle que si l'on se restreint à l'action du sous-groupe NA de Γ, lequel sous-groupe est également un sous-groupe de Γ_c. Cette identification, dont la possibilité a été mentionnée dans [17], déf. 4.1) n'a cependant pas été faite dans [17] : nous la ferons ici, ce qui simplifiera la comparaison des calculs de Bessel et de Fuchs. Compte tenu de ce changement de coordonnées sur l'espace de phase, énonçons brièvement les résultats relatifs au calcul de Fuchs qui seront utiles ici : la traduction se fait en repérant par $y + i\eta \in \Pi$ le point noté $(-y^{-1}\eta, y^{-1})$ dans [17].

L'espace de Hilbert que l'on considère est $H = L^2((0, \infty), t^{-1} dt)$, autrement dit H_1 avec les notations des deux sections qui précèdent : les normes et produits scalaires dans H ne seront pas affectés d'indices. Pour tout $\lambda > 0$, l'application $\omega_\lambda : H \to H_\lambda$ telle que

$$(3.1)\qquad (\omega_\lambda u)(t) = t^{1/2(\lambda - 1)} u(t)$$

est une isométrie. Posons, pour tout $X \in \Pi$,

$$(3.2)\qquad \psi_X^\lambda = \omega_\lambda^{-1} \varphi_X^\lambda$$

où φ_X^λ a été définie en (1.10). Comparant avec ([17], déf. 2.1), on note que cette fonction aurait été désignée par $\psi_X^{1/2(\lambda+1)}$ dans ce dernier travail, mais cela n'entraînera pas de confusion. Pour tout $Y=y+i\eta$, on définit l'opérateur unitaire involutif σ_Y sur H par

$$(3.3)\qquad (\sigma_Y u)(s)=u(y^{-2}s^{-1})\exp-2i\pi\eta(s-y^{-2}s^{-1}).$$

Comme dans (1.6) et (1.7), on définit l'opérateur $\mathrm{Op}^F(f)$ de symbole actif $f\in L^1(\Pi, d\mu)$ par

$$(3.4)\qquad \mathrm{Op}^F(f)=2\int_\Pi f(Y)\,\sigma_Y\,d\mu(Y)$$

et le symbole passif g d'un opérateur à trace B sur H par

$$(3.5)\qquad g(Y)=2\,\mathrm{Tr}(B\,\sigma_Y).$$

Avec $(\zeta, z)=(-y^{-1}\eta, y^{-1})$, les opérateurs $\partial/\partial\zeta$ et $z(\partial/\partial z)+\zeta(\partial/(\partial\zeta)$ introduits dans ([17], (3.1)) deviennent respectivement $-y(\partial/(\partial\eta)$ et $-y(\partial/\partial y)$. La proposition 1.2 de [17] montre alors que l'opérateur F qui donne le passage du symbole de Fuchs actif au symbole de Fuchs passif est

$$(3.6)\qquad F=\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2i\pi}y\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^2\right]^{-1/2}.$$

Cet opérateur et son inverse conservent les classes de symboles de poids donné. Celles-ci sont toujours définies par (2.2) : si l'on ne précise pas d'ordre de différentiabilité, il est sous-entendu que celui-ci est infini.

Un des résultats essentiels ([17], théorèmes 4.1 et 6.1) du calcul de Fuchs est le suivant. Soit m une fonction-poids bornée sur Π, et soit A un opérateur borné sur H. Pour que le symbole de Fuchs (actif ou passif) de A soit un symbole de poids m, il faut et il suffit que pour tout N il existe $\lambda_0>0$ et, pour tout $\lambda\geqq\lambda_0$, une constante $C>0$ telle que

$$|(A\,\psi_X^\lambda, \psi_Z^\lambda)|\leqq C\,m(\mu(X, Z))(\mathrm{ch}\,d(X, Z))^{-N}$$

quels que soient les points X et Z appartenant à Π. Bien entendu, la comparaison de ce résultat avec les théorèmes 2.1 et 2.2 est à l'avantage du calcul de Fuchs.

Dans le calcul de Fuchs, les formules (0.1) et (0.2) de composition des symboles se généralisent très bien. En effet, la proposition 1.3 de [17] montre que, si f et $g\in C_0^\infty(\Pi)$, le symbole passif $f\circ g$ du composé des opérateurs de symboles passifs f et g est donné par

$$(3.7)\qquad (f\circ g)(x+i\xi)=4\int f(x((1+q'^2)^{1/2}-q')(1-ip')+i\xi)\,g(x((1+q''^2)^{1/2}-q'')(1-ip'')+i\xi)\,e^{-4i\pi(-q'p''+q''p')}\,dq'\,dp'\,dq''\,dp''.$$

Si l'on pose $P=(q, p)$ et que l'on note Φ_X la carte $\mathbb{R}^2\to\Pi$ telle que

$$(3.8)\qquad \Phi_{x+i\xi}(q, p)=x((1+q^2)^{1/2}-q)(1-ip)+i\xi,$$

la formule (3.7) s'écrit aussi

$$(f \circ g)(X) = [e^{i\pi L}(f(\Phi_X(P'))\, g(\Phi_X(P'')))](P' = P'' = 0) \tag{3.9}$$

avec

$$i\pi L = (4i\pi)^{-1}\left(-\frac{\partial^2}{\partial q'\,\partial p''} + \frac{\partial^2}{\partial q''\,\partial p'}\right). \tag{3.10}$$

On observera la ressemblance de (3.9) avec (0.2).

La formule (3.7) s'écrit enfin

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x+i\xi) = \int & f(y'+i\eta')\, g(y''+i\eta'') \\ & \exp -2i\pi\left\{\left(\frac{y'}{y''}-\frac{y''}{y'}\right)\frac{\xi}{x} + \left(\frac{y''}{x}-\frac{x}{y''}\right)\frac{\eta'}{y'} + \left(\frac{x}{y'}-\frac{y'}{x}\right)\frac{\eta''}{y''}\right\} \\ & \left(\frac{y'}{x}+\frac{x}{y'}\right)\left(\frac{y''}{x}+\frac{x}{y''}\right) y'^{-2}\, y''^{-2}\, dy'\, d\eta'\, dy''\, d\eta''.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Nous aurons l'usage de cette dernière relation dans le cas où $f(x+i\xi)$ ne dépend que de ξ/x, i. e. $f(x+i\xi) = \varphi(\xi/x)$, et où l'on cherche à évaluer $f \circ g$ au point réel $x > 0$. Dans ce cas des manipulations formelles conduisent à écrire (en désignant par $\hat{\varphi}$ la transformée de Fourier de φ)

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) = \int & \hat{\varphi}\left(\frac{y''}{x}-\frac{x}{y''}\right) g(y''+i\eta'') \exp -2i\pi\left(\frac{x}{y'}-\frac{y'}{x}\right)\frac{\eta''}{y''} \\ & \left(\frac{y'}{x}+\frac{x}{y'}\right)\left(\frac{y''}{x}+\frac{x}{y''}\right) y'^{-1}\, y''^{-2}\, dy''\, d\eta''\, dy'\end{aligned}$$

puis, après avoir effectué le changement de variables

$$z' = y''^{-1}\left(\frac{x}{y}-\frac{y'}{x}\right), \qquad \text{d'où} \quad dz' = \left(\frac{y'}{x}+\frac{x}{y'}\right) y'^{-1}\, y''^{-1}\, dy',$$

$$(f \circ g)(x) = \int \hat{\varphi}\left(\frac{y''}{x}-\frac{x}{y''}\right) g(y'')\left(\frac{y''}{x}+\frac{x}{y''}\right)\frac{dy''}{y''}. \tag{3.12}$$

D'après le résultat essentiel du calcul de Fuchs mentionné plus haut et un argument analogue à celui développé dans la remarque à la fin de la section précédente, le symbole $f \circ g$ dépend continûment, pour la topologie de la convergence uniforme, du couple (f, g) variant dans $E^1_{2k} \times E^1_{2k}$ (*cf.* énoncé du théorème 2.1) pourvu que k soit assez grand.

Considérons la fonction-poids $m_N(X)=(\mathrm{ch}\, d(1, X))^{-N}$ ainsi que, vu l'inégalité

$$\frac{y^{-1}|\eta|}{1+x^{-1}|\xi|}\leqq\frac{x}{y}+y^{-1}|\xi-\eta|\leqq\frac{x}{y}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{(\xi-\eta)^2}{y^2}\right)\leqq\frac{1}{2}+2\,\mathrm{ch}\, d(X, Y)+2\,\mathrm{ch}^2 d(X, Y),$$

la fonction-poids $m'_N(X)=(1+x^{-1}|\xi|)^{-N}$. Il est alors aisé de justifier (3.12) dans le cas où $f\in E^{m_N}_{2k}$, $g\in E^{m'_N}_{2k}$, pourvu que N et k soient assez grands.

4. D'un calcul symbolique à l'autre

Soit A un opérateur borné sur H_λ ayant un symbole de Bessel actif f: avec l'aide de (3.1), considérons l'opérateur $\omega_\lambda^{-1}A\,\omega_\lambda$, qui est un opérateur borné sur H. D'après ([17], 10.9)), $\omega_\lambda^{-1}A\,\omega_\lambda$ admet si $f\in C_0^\infty(\Pi)$ un symbole de Fuchs actif a donné par

$$a(y+i\eta)=4\pi\int_0^\infty f(ty+i\eta)J_\lambda(4\pi t)\frac{dt}{t}. \tag{4.1}$$

Soit e_1 l'opérateur $y\,\partial/\partial y$ sur $L^2(\Pi, d\mu)$: il est normal et a pour spectre $(1/2)+i\mathbb{R}$.

En utilisant ([10], p. 91), on voit que le lien entre f_λ et a s'exprime sous la forme

$$a=R_\lambda(e_1)f \tag{4.2}$$

avec

$$R_\lambda(z)=4\pi\int_0^\infty t^{z-1}J_\lambda(4\pi t)\,dt=(2\pi)^{1-z}\frac{\Gamma((\lambda+z)/2)}{\Gamma(1+(\lambda-z)/2)}. \tag{4.3}$$

D'après (1.8) et la propriété analogue liant les symboles de Fuchs actif et passif, on voit que la relation

$$g=R_\lambda(1-e_1)b \tag{4.4}$$

lie le *symbole de Bessel passif* g de A et le *symbole de Fuchs passif* b de $\omega_\lambda^{-1}A\,\omega_\lambda$. Finalement, la relation qui nous importe est

$$b=G_\lambda g \tag{4.5}$$

avec

$$G_\lambda=(2\pi)^{-e_1}\frac{\Gamma(1/2(\lambda+1+e_1))}{\Gamma(1/2(\lambda+1-e_1))}=R_\lambda(1+e_1). \tag{4.6}$$

Dans le cas où $g\in C_0^\infty(\Pi)$, on peut écrire

$$b(y+i\eta)=4\pi\int_0^\infty g(ty+i\eta)J_\lambda(4\pi t)\,dt. \tag{4.7}$$

Il convient maintenant d'étudier l'opérateur G_λ et ses extensions, non plus sur $L^2(\Pi, d\mu)$, mais sur des espaces de symboles de poids donné. Plus généralement, pour tout entier $k \geqq 0$, posons

$$G_{\lambda, k} = R_\lambda(1-k+e_1), \tag{4.8}$$

i. e.

$$(G_{\lambda, k} g)(y+i\eta) = 4\pi \int_0^\infty g(ty+i\eta) J_\lambda(4\pi t) t^{-k} dt. \tag{4.9}$$

Quels que soient les entiers j et $k \geqq 0$, on a

$$G_{\lambda, j} = (4\pi)^{-k}(\lambda+1+j-e_1)\dots(\lambda+k+j-e_1) G_{\lambda+k, j+k}. \tag{4.10}$$

Évidemment, $G_{\lambda, k}$ commute avec e_1, et par ailleurs

$$e_2 G_{\lambda, k} = G_{\lambda, k+1} e_2 \tag{4.11}$$

si $e_2 = y\,\partial/\partial\eta$.

Soit m une fonction-poids vérifiant (2.1), de sorte que

$$m(ty+i\eta) \leqq C\,m(y+i\eta)(t+t^{-1})^{N_1}. \tag{4.12}$$

Comme

$$\int_0^\infty (t+t^{-1})^{N_1} |J_\lambda(4\pi t)| t^{-k} dt < \infty$$

si $\lambda > N_1 + k - 1$ et $k > N_1 + (1/2)$, on voit, avec les notations introduites dans le théorème 2.1, que $G_{\lambda, k}$ se prolonge sous ces hypothèses en un opérateur borné de E_0^m dans E_0^m. Avec l'aide de (4.10), on voit finalement que G_λ *se prolonge en un opérateur borné de* E_{k+p}^m *dans* E_p^m *pourvu que* $\lambda > N_1 + p - 1$ *et* $k > N_1 + (1/2)$. En particulier, si $g \in E_\infty^m = \bigcap_k E_k^m$ est le symbole passif de A, alors $G_\lambda g$ est un symbole de poids m jusqu'à tel ordre de différentiabilité que l'on souhaite pourvu que λ soit assez grand : de plus, dans ces conditions, $G_\lambda g$ est bien le symbole de Fuchs passif de $\omega_\lambda^{-1} A\, \omega_\lambda$ comme il résulte d'arguments de continuité basés sur le théorème 2.1 d'une part, sur l'analogue pour le calcul de Fuchs du théorème 2.2 d'autre part.

Enfin, nous aurons dans la prochaine section à utiliser le fait suivant : si $\lambda > 0$, l'opérateur G_λ défini sur E_2^1 et à valeurs dans E_1^1 (et borné d'après ce qui précède) est injectif. Posons en effet, pour tout entier $k \geqq 0$,

$$H_{\lambda, k} = R_\lambda(1-k-e_1) = 4\pi \int_0^\infty t^{-k-e_1} J_\lambda(4\pi t)\, dt, \tag{4.13}$$

la deuxième égalité étant valable si $\lambda > k-(1/2)$, au sens des opérateurs sur $L^2(\Pi, d\mu)$, d'après [10], p. 91. En particulier

$$H_{\lambda, 0} \circ G_\lambda = I \tag{4.14}$$

et

$$H_{\lambda, 0} = (4\pi)^{-1} H_{\lambda+1, 1}(\lambda+1+e_1). \tag{4.15}$$

La dernière égalité et la formule

$$(H_{\lambda, k} b)(y+i\eta) = 4\pi \int_0^\infty b(t^{-1}y+i\eta) J_\lambda(4\pi t) t^{-k} dt \tag{4.16}$$

montrent que $H_{\lambda, 0}$ se prolonge en un opérateur continu de E_1^1 dans E_0^1 : l'injectivité annoncée est alors une conséquence de (4.14).

5. La formule de composition des symboles

Considérons la carte $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \Pi$ définie par

$$\Psi(q, p) = [(1+q^2+p^2)^{1/2}+q](1-ip)^{-1} \tag{5.1}$$

et rappelons que, avec $\omega = \operatorname{tg} \theta/2$, la formule

$$x+i\xi = (e^{-r}+e^r\omega^2)^{-1}(1+\omega^2+2i\omega \operatorname{sh} r) \tag{5.2}$$

définit le point $x+i\xi$ à la distance r de $1 \in \Pi$ sur la droite (au sens de la géométrie hyperbolique) faisant au point 1 l'angle θ avec la droite $\xi=0$. Dans les coordonnées polaires (r, θ) au point 1, la formule (5.1) s'inverse donc par les formules

$$q = \operatorname{sh} r \cos\theta, \qquad p = \operatorname{sh} r \sin\theta. \tag{5.3}$$

Plus généralement, pour tout $X \in \Pi$, nous utiliserons la carte $\Psi_X : \mathbb{R}^2 \to \Pi$ telle que

$$\Psi_{x+i\xi}(q, p) = x\Psi(q, p)+i\xi. \tag{5.4}$$

Sur les fonctions de quatre variables $(q', p', q'', p'') = (P', P'')$, on définit l'opérateur

$$i\pi L = (4i\pi)^{-1}\left(-\frac{\partial^2}{\partial q'\, \partial p''}+\frac{\partial^2}{\partial p'\, \partial q''}\right). \tag{5.5}$$

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le résultat essentiel de ce travail.

THÉORÈME 5.1. — *Soit* E *la fonction holomorphe dans le plan complexe privé de la demi-droite réelle négative, définie lorsque* $\operatorname{Re} z > 0$ *par*

$$E(z) = 4\pi \int_0^\infty J_\lambda(4\pi t) e^{-t^{-1}z} dt.$$

Il existe $\lambda_0 > 0$ tel que, quels que soient $\lambda > \lambda_0$ et les symboles f, g appartenant à $C_0^\infty(\Pi)$, *la formule suivante soit vérifiée : soit* A (resp. B) *l'opérateur sur* H_λ *de symbole passif* f (resp. g)*; alors le symbole passif* $f \# g$*, au sens du calcul de Bessel, de l'opérateur* AB *est donné par*

$$(f \# g)(X) = [E(-i\pi L)((f \circ \Psi_X) \otimes (g \circ \Psi_X))](P' = P'' = 0),$$

expression dans laquelle l'opérateur $E(-i\pi L)$ *se définit via la transformation de Fourier dans les variables* (P', P'').

Remarque. — On observera l'analogie de cette formule avec (0.2) ou avec (3.9), formules qui expriment la composition des symboles dans les calculs de Weyl et de Fuchs. Mais il y a une différence essentielle, qui interdit tout développement du genre (0.1), et qui provient de ce que la fonction E, au contraire de la fonction exponentielle, n'est pas une fonction entière.

D'après [10], p. 447, on a en effet

$$E'(z) = -8\pi J_\lambda((8\pi z)^{1/2}) K_\lambda((8\pi z)^{1/2})$$

d'où, si λ n'est pas entier,

$$E(z) = \sum \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma((1/2)(\lambda - n + 1))}{\Gamma((1/2)(\lambda + n + 1))} (2\pi z)^n + \frac{2\pi}{\sin \pi\lambda} \sum \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(2\pi z)^{\lambda + 2n + 1}}{\Gamma(\lambda + n + 1)\Gamma(\lambda + 2n + 2)}.$$

Si λ est entier la présence du facteur $\log z$ dans l'un des termes de $E(z)$ interdit encore à cette fonction d'être entière.

LEMME 5.1. — *Posons* $m_N(X) = (\operatorname{ch} d(1, X))^{-N}$ *et* $m'_N(X) = (1 + x^{-1}|\xi|)^{-N}$. *Soient* $f \in E_{2k}^{m'_N}$ *et* $g \in E_{2k}^{m_N}$, *f étant en outre de la forme particulière* $f(X) = \varphi(x^{-1}\xi)$. *Si* N, k *et* λ *sont assez grands, la composition* $f \# g$ *des symboles de Bessel passifs f et g vérifie alors la relation*

$$(f \# g)(1) = 4\pi \int_0^\infty J_\lambda(4\pi s)\, ds \int_0^\infty \hat{\varphi}(t)(g \circ \Psi)\left(\frac{t}{2s}, 0\right) dt$$

dans laquelle $\hat{\varphi}$ *désigne la transformée de Fourier de* φ.

Preuve. — Les opérateurs A et B de symboles passifs f et g sont définis par le théorème 2.1. D'après les résultats de la section 4, les symboles passifs, au sens du calcul de Fuchs, des opérateurs $\omega_\lambda^{-1} A \omega_\lambda$ et $\omega_\lambda^{-1} B \omega_\lambda$ sont $G_\lambda f$ et $G_\lambda g$, avec

$$(G_\lambda f)(y' + i\eta') = 4\pi \int_0^\infty \varphi\left(\frac{\eta'}{sy'}\right) J_\lambda(4\pi s)\, ds \tag{5.6}$$

et

$$(G_\lambda g)(y'' + i\eta'') = 4\pi \int_0^\infty g(ty'' + i\eta'')\, J_\lambda(4\pi t)\, dt. \tag{5.7}$$

On sait aussi que, pourvu que λ soit assez grand, ce sont des symboles de poids m'_N et m_N jusqu'à tel ordre de différentiabilité que l'on souhaite.

On est donc en mesure d'appliquer la formule (3.12), ce qui permet d'obtenir

$$(5.8)\quad (G_\lambda f)\circ(G_\lambda g)(x)=(4\pi)^2\int J_\lambda(4\pi s)\,J_\lambda(4\pi t)\,ds\,dt$$
$$\int s\,\hat{\varphi}\left(s\left(\frac{y''}{x}-\frac{x}{y''}\right)\right)g(ty'')\left(\frac{y''}{x}+\frac{x}{y''}\right)\frac{dy''}{y''}.$$

En effectuant le changement de variable

$$(5.6)\qquad s\left(\frac{y''}{x}-\frac{x}{y''}\right)=z'',\qquad dz''=s\left(\frac{y''}{x}+\frac{x}{y''}\right)\frac{dy''}{y''},$$

on obtient

$$(5.10)\quad (G_\lambda f)\circ(G_\lambda g)(x)=(4\pi)^2\int J_\lambda(4\pi s)\,J_\lambda(4\pi t)\,ds\,dt$$
$$\int \hat{\varphi}(z'')\,g\left(\frac{tx}{2}\left[\frac{z''}{s}+\left(\left(\frac{z''}{s}\right)^2+4\right)^{1/2}\right]\right)dz''$$

d'où $(G_\lambda f)\circ(G_\lambda g)(x)=(G_\lambda h)(x)$ pour tout $x>0$ pourvu que

$$(5.11)\qquad h(x)=4\pi\int J_\lambda(4\pi s)\,ds\int\hat{\varphi}(z'')\,g\left(\frac{x}{2}\left[\frac{z''}{s}+\left(\left(\frac{z''}{s}\right)^2+4\right)^{1/2}\right]\right)dz''.$$

Comme l'opérateur G_λ commute avec l'opérateur de restriction des symboles à $\mathbb{R}_*^+$, l'injectivité de G_λ sur les classes de symboles appropriées, démontrée à la fin de la section 4, fournit en particulier $(f\# g)(1)=h(1)$. La formule annoncée dans le lemme 5.1 est donc une conséquence de (5.11), vu la formule (5.1).

Preuve du théorème 5.1. — Soit $k_\theta=\exp i\dfrac{\theta}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, de sorte que, d'après (1.1),

$$(5.12)\qquad [k_\theta]X=\left(-iX\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-1}\left(X\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}\right).$$

Les relations (5.3) montrent que, quel que soit $(q, p)\in\mathbb{R}^2$, on a

$$(5.13)\qquad ([k_\theta]\circ\Psi)(q, p)=\Psi(q\cos\theta-p\sin\theta,\ q\sin\theta+p\cos\theta).$$

Avec la même hypothèse sur φ que dans l'énoncé du lemme 5.1, supposons cette fois que, pour un certain θ réel, on ait l'identité

$$(5.14)\qquad f(x+i\xi)=\varphi\left(\frac{\xi}{x}\cos\theta-\left(\frac{1}{2}(x-x^{-1})+\frac{\xi^2}{2x}\right)\sin\theta\right),$$

autrement dit

$$f(\Psi(q, p)) = \varphi(-q \sin\theta + p \sin\theta). \tag{5.15}$$

On conserve les hypothèses relatives à g énoncées dans le lemme 5.1. La relation de covariance (1.9) permet d'écrire

$$(f \# g)(1) = ((f \circ [k_\theta]) \# (g \circ [k_\theta]))(1). \tag{5.16}$$

D'après (5.13) et (5.15), on a

$$(f \circ [k_\theta])(\Psi(q, p)) = \varphi(p) \tag{5.17}$$

soit

$$(f \circ [k_\theta])(x + i\xi) = \varphi(\xi/x) \tag{5.18}$$

d'où, d'après le lemme 5.1,

$$(f \# g)(1) = 4\pi \int_0^\infty J_\lambda(4\pi s)\, ds \int_0^\infty \hat{\varphi}(t)(g \circ \Psi)\left(\frac{t}{2s}\cos\theta, \frac{t}{2s}\sin\theta\right) dt. \tag{5.19}$$

Prenons maintenant f et g dans $C_0^\infty(\Pi)$ conformément aux hypothèses du théorème 5.1. Il est commode de définir la transformation de Fourier « symplectique » $\mathcal{G}$ sur les fonctions de $P = (q, p)$ par

$$(\mathcal{G}(f \circ \Psi))(\alpha, \beta) = \iint (f \circ \Psi)(q, p)\, e^{2i\pi(-\alpha p + \beta q)}\, dq\, dp \tag{5.20}$$

ce qui donne en particulier $\mathcal{G}^2 = I$: l'emploi de coordonnées polaires permet d'écrire

$$(f \circ \Psi)(q, p) = \int_0^{2\pi} \varphi_\theta(-q \sin\theta + p \cos\theta)\, d\theta \tag{5.21}$$

avec

$$\varphi_\theta(p) = \int_0^\infty (\mathcal{G}(f \circ \Psi))(r\cos\theta, r\sin\theta)\, e^{2i\pi r p}\, r\, dr, \tag{5.22}$$

fonction dont la transformée de Fourier est

$$\hat{\varphi}_\theta(t) = t\,(\mathcal{G}(f \circ \Psi))(t\cos\theta, t\sin\theta)\, Y(t), \tag{5.23}$$

en désignant par Y la fonction caractéristique de $\mathbb{R}_*^+$. La formule (5.19) fournit alors

$$(f \# g)(1) = 4\pi \int_0^\infty J_\lambda(4\pi s)\, ds \iint \mathcal{G}(f \circ \Psi)(q', p')(g \circ \Psi)\left(\frac{q'}{2s}, \frac{p'}{2s}\right) dq'\, dp'. \tag{5.24}$$

En écrivant

$$(5.25)\qquad (g\circ\Psi)\left(\frac{q'}{2s},\frac{p'}{2s}\right)=\iint \mathscr{G}(g\circ\Psi)(q'',p'')\exp\frac{i\pi}{s}(-q'p''+q''p')\,dq''\,dp''$$

on obtient finalement

$$(5.26)\qquad (f\#g)(1)=\int \mathscr{G}(f\circ\Psi)(q',p')\,\mathscr{G}(g\circ\Psi)(q'',p'')\,dq'\,dp'\,dp''\,dp''$$

$$4\pi\int_0^\infty J_\lambda(4\pi s)\exp\frac{i\pi}{s}(-q'\,p''+q''\,p')\,ds,$$

ce qui est le sens précis qu'il convient d'attribuer à la formule énoncée dans le théorème 5.1, la covariance assurant bien entendu la validité de cette dernière en un point quelconque dès qu'elle est valable au point 1.

6. Commentaire sur les puissances de la constante de Planck

La théorie de Berezin a bénéficié récemment de l'intérêt suscité en physique par les états cohérents [12] : il s'agit de physique mathématique et certains calculs, purement formels, ne pourraient être considérés comme légitimes par des mathématiciens. Néanmoins, il nous a paru impossible de passer sous silence l'origine d'une contradiction entre une affirmation importante contenue dans [4] et le présent travail : celle-ci pourrait en effet, à bon droit, troubler le lecteur.

Avec des modifications de détail (ainsi, seule la réalisation de H_λ comme espace de fonctions holomorphes est utilisée), voici pour le demi-plan de Poincaré la théorie de Berezin, basée sur l'emploi des fonctions φ_X^λ définies en (1.10). Si f est une fonction sur Π, l'opérateur A de symbole contravariant f est défini par

$$(5.27)\qquad A\,u=\int f(X)\,(u,\varphi_X^\lambda)_\lambda\,\varphi_X^\lambda\,d\mu(X)$$

et le symbole covariant g d'un opérateur A est défini par

$$(5.28)\qquad g(X)=(A\,\varphi_X^\lambda,\varphi_X^\lambda)_\lambda.$$

Il est clair que la fonction

$$(5.29)\qquad \tilde g(X,Z)=(\varphi_X^\lambda,\varphi_Z^\lambda)_\lambda^{-1}(A\,\varphi_X^\lambda,\varphi_Z^\lambda)_\lambda$$

est le prolongement unique de g holomorphe en X et antiholomorphe en Z. Il est évident également que l'opérateur $T_\lambda : f\mapsto g$ qui fait passer d'un symbole contravariant au symbole covariant de l'opérateur associé a pour noyau la fonction $(X,Y)\mapsto|(\varphi_X^\lambda,\varphi_Y^\lambda)_\lambda|^2$.

Dans les travaux de Berezin, la question de savoir dans quels espaces de fonctions il convenait de faire varier les symboles covariants g a été passée sous silence. On observera que, compte tenu de (5.29), les théorèmes 2.1 et 2.2 apportent une réponse à cette question, qui s'exprime en termes du prolongement $\tilde{g}(X, Z)$: bien entendu, les conditions équivalentes relatives aux symboles de Bessel passifs sont beaucoup plus maniables, ce qui est lié au caractère à notre avis partiellement tautologique de la définition du symbole covariant d'un opérateur.

La formule de composition des symboles covariants, à l'opposé de la formule correspondante du calcul de Bessel, est immédiate. En effet, si A_1 (resp. A_2) a pour symbole covariant g_1 (resp. g_2), la formule (1.12) montre que le symbole covariant $g=g_1 * g_2$ de l'opérateur $A_1 A_2$ est donné par

$$(5.30)\quad \begin{aligned} g(X) &= (A_2 \varphi_X^\lambda, A_1^* \varphi_X^\lambda)_\lambda \\ &= \frac{\lambda}{4\pi}\int (A_2 \varphi_X^\lambda, \varphi_Y^\lambda)_\lambda (A_1 \varphi_Y^\lambda, \varphi_X^\lambda)_\lambda \, d\mu(Y) \\ &= \frac{\lambda}{4\pi}\int \tilde{g}_2(X, Y)\, \tilde{g}_1(Y, X)\, |(\varphi_X^\lambda, \varphi_Y^\lambda)_\lambda|^2 \, d\mu(Y) \\ &= \frac{\lambda}{4\pi}[T_\lambda(Y \mapsto \tilde{g}_1(Y, X)\, \tilde{g}_2(X, Y))](Y=X). \end{aligned}$$

Avec $\Omega=(1/2)+i(\Delta-(1/4))^{1/2}$, le résultat essentiel de la théorie de Berezin est la relation

$$(5.31)\qquad T_\lambda = \frac{4\pi}{(\Gamma(\lambda+1))^2}\Gamma(\lambda+)\,\Gamma(\lambda+1-\Omega).$$

On trouvera dans ([16], théorème 3.4) une preuve de ce résultat ne faisant pas intervenir de produit infini d'opérateurs différentiels.

Dans [4], il est affirmé que le développement de $g_1 * g_2$ suivant les puissances de λ^{-1} présente un intérêt considérable. Même si le calcul de Berezin et le nôtre sont distincts (*cf.* [16] pour la comparaison des calculs de Wick et de Weyl, ainsi que de leurs généralisations), l'existence d'un tel développement en série entrerait en contradiction avec le théorème 5.1. Or, ce développement est justifié, dans [4], par une formule

$$T_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} P_n(\Delta)$$

qui n'a pas d'existence, et qui semble basée sur un emploi de la formule de Stirling.

Pour terminer, qu'il nous soit permis d'exprimer notre désaccord avec l'interprétation de λ^{-1} comme constante de Planck : c'est en effet cette interprétation qui conduit à la recherche coûte que coûte de tels développements, à notre avis sans signification. Dans le calcul de Weyl sur $\mathbb{R}^n$, soient

$$q_j = x_j \text{ et } p_j = (h/2i\pi)(\partial/\partial x_j)$$

les opérateurs de position et d'impulsion, de sorte que $[p_j, q_k] = (h/2 i\pi)\,\delta_{jk}$. Si l'on remplace h par zéro (cette opération consiste à effectuer une certaine *contraction* de l'algèbre de Lie du groupe d'Heisenberg), on obtient une algèbre de Lie commutative : c'est d'ailleurs la raison pour laquelle, conformément à la tradition, faire tendre h vers zéro fait passer de la mécanique quantique à la mécanique classique. Or, si l'on fait tendre λ vers ∞, les opérateurs infinitésimaux de la représentation V_λ convergent [après une renormalisation nécessaire pour celui qui correspond au groupe $K = SO(2)$] vers les opérateurs infinitésimaux d'une représentation d'un groupe non commutatif, à savoir le groupe de covariance du calcul de Fuchs (*voir* [17], section 10, ou [18], section 17) : ce dernier groupe, tout en étant une contraction de SL $(2, \mathbb{R})$, n'est pas commutatif, sans quoi le calcul de Fuchs serait inutilisable. En conclusion, l'analogie de λ avec une constante de Planck nous paraît limitée dans sa portée, et la recherche de développements suivant les puissances de λ^{-1} sans objet. A l'opposé, la formule énoncée dans le théorème 5.1 est satisfaisante, par son analogie frappante avec les formules (0.2) et (3.9) des calculs de Weyl et de Fuchs.

Signalons qu'une critique, motivée par des faits différents, des développements formels suivant les puissances de h, a été exprimée par M. V. Karasëv et V. P. Maslov dans leur article « Asymptotic and geometric quantization », Russian Math. Surveys, vol. 39, n° 6, 1984, p. 144. Ils observent en effet que de tels développements ne sauraient faire la différence entre les quantifications de deux espaces de phase dont l'un serait un revêtement de l'autre : or les propriétés topologiques de l'espace de phase jouent dans leur théorie, par la présence de « conditions de discrétisation », un rôle essentiel.

Notre point de vue est le résultat d'une longue pratique des opérateurs pseudo-différentiels. Il est de fait amplement prouvé que les développements asymptotiques du composé de deux symboles présentent un intérêt dans les applications de l'analyse pseudo-différentielle aux équations aux dérivées partielles. Nous pensons seulement qu'un tel développement ne va pas de soi, et qu'il importe de distinguer les calculs symboliques (tel le calcul de Fuchs) où tout se passe comme dans le calcul de Weyl, et ceux, tel le calcul de Bessel, qui apportent des faits de structure nouveaux dont il faudra bien tenir compte dans une future théorie axiomatique générale de la quantification.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. BEALS, *A General Calculus of Pseudodifferential Operators* (*Duke Math. J.*, vol. 42, 1975, p. 1-42).

[2] F. A. BEREZIN, *Quantization*, [*Izv. Akad. Nauk. U.S.S.R.*, vol. 38, (5), 1974; *Math. U.S.S.R. Izvestija*, vol. 8, (5), 1974, p. 1109-1165].

[3] F. A. BEREZIN, *Quantization in Complex Symmetric Spaces* [*Izv. Akad. Nauk. U.S.S.R.*, vol. 39, (2), 1975; *Math. U.S.S.R. Izvestija*, vol. 9, (2), 1975, p. 341-379].

[4] F. A. BEREZIN, *A Connection between the co- and contravariant Symbols of Operators on Classical Complex Symmetric Spaces* [*Dokl. Akad. Nauk. U.S.S.R.*, vol. 241, (1), 1978; *Soviet Math. Dokl.*, vol. 19, (4), 1978, p. 786-789].

[5] A. CALDERON, R. VAILLANCOURT, *On the Boundedness of Pseudodifferential Operators* (*J. Math. Soc. Japan*, vol. 23, 1971, p. 374-378).

[6] V. GUILLEMIN et S. STERNBERG, *Symplectic Techniques in Physics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge-London-New York-New Rochelle-Melbourne-Sydney, 1984.

[7] L. HÖRMANDER, *On the* L^2*-continuity of Pseudodifferential Operators* (*Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 24, 1971, p. 529-535).

[8] L. HÖRMANDER, *The Weyl Calculus of Pseudodifferential Operators* (*Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 23, (3), 1979, p. 359-443).

[9] J. LERAY, *Analyse lagrangienne et mécanique* (*Séminaire au Collège de France*, 1967-1977, Paris).

[10] W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER et R. P. SONI, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, 3e édition, Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[11] R. B. MELROSE, *Transformation of Boundary Problem* (*Acta Math.*, vol. 147, 1981, p. 149-236).

[12] A. PERELOMOV, *Generalized Coherent States and their Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[13] F. TREVES, *Introduction to Pseudodifferential Operators and Fourier Integral Operators*, Plenum Press, New York-London, 1980.

[14] A. UNTERBERGER, *Symboles associés aux champs de repères de la forme symplectique* (*C. R. Acad. Sc., Paris*, tome 285, 1977, p. 1005-1008).

[15] A. UNTERBERGER, *Oscillateur harmonique et opérateurs pseudo-différentiels* (*Ann. Inst. Fourier*, vol. 29, (3), 1979, p. 201-221).

[16] A. UNTERBERGER, *Symbolic calculi and the duality of homogeneous spaces* (*Contemp. Math.*, vol. 27, 1984, p. 237-252).

[17] A. UNTERBERGER, *The Calculus of Pseudodifferential Operators of Fuchs Type* (*Comm. Part. Diff. Equ.*, vol. 9, (12), 1984, p. 1179-1236).

[18] A. UNTERBERGER, *L'analyse harmonique et l'analyse pseudo-différentielle du cône de lumière* (à paraître dans « Astérisque », Soc. Math. de France).

[19] A. UNTERBERGER, *Quantification et équations aux dérivées partielles* (*Colloque J. Braconnier*, Lyon, 1986).

[20] A. UNTERBERGER, *Analyse relativiste* (*C. R. Acad. Sc., Paris*, vol. 305, 1987, p. 415-418).

[21] A. UNTERBERGER et J. UNTERBERGER, *La série discrète de* $SL(2, \mathbb{R})$ *et les opérateurs pseudo-différentiels sur une demi-droite* (*Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, vol. 17, 1984, p. 83-116).

[22] A. UNTERBERGER et J. UNTERBERGER, *A Quantization of the Cartan Domain* $BDI(q=2)$ *and operators on the light-cone* (*J. Funct. Anal.*, vol. 72, (2), 1987, p. 279-319).

[23] A. WEIL, *Sur certains groupes d'opérateurs unitaires* (*Acta Math.*, vol. 111, 1964, p. 143-211).

(Manuscrit reçu le 29 janvier 1987,
révisé le 12 novembre 1987).

André et Julianne UNTERBERGER,
Université de Reims,
Département de Mathématiques,
Moulin de la Housse,
B.P. n° 347, 51062 Reims Cedex.