F. CAMPANA

Connexité rationnelle des variétés de Fano

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 25, nº 5 (1992), p. 539-545
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1992_4_25_5_539_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 25, 1992, p. 539 à 545.

CONNEXITÉ RATIONNELLE DES VARIÉTÉS DE FANO

PAR F. CAMPANA

Introduction

Rappelons qu'une variété de Fano (complexe) est une variété projective connexe lisse X à fibré anticanonique ample, et de dimension n. Elles sont classifiées pour $n \leqq 3$: il n'y a qu'un nombre fini de familles de déformations (égal à 1, 10 et 104 pour $n=1$, 2 et 3). Il est conjecturé que ceci est vrai en dimension quelconque. Il suffit pour cela d'établir l'existence d'une borne $B(n)$ telle que $c_1(X)^n \leqq B(n)$ pour X fano avec $\dim(X)=n$.

Lorsque $b_2(X)=1$, une telle borne $B^1(n) \simeq (n/2)^{2n}$ est fournie dans [C']. (Voir aussi [T], [K-M-M] et [N]).

Lorsque X est suffisamment uniréglée, on montre aussi dans [C'] que $c_1(X)^n \leqq (n(n+1))^n$; cette propriété signifie que 2 points génériques de X peuvent être joints par une courbe connexe C à composantes irréductibles rationnelles de degré anticanonique au plus $(n+1)$, telles que la restriction du fibré tangent à X y soit semi-positif. Il est vraisemblable que toute variété de Fano est suffisamment uniréglée.

On se propose d'établir ici une propriété plus faible : la connexité rationnelle des variétés de Fano : deux points de X peuvent être joints par une courbe connexe à composantes irréductibles rationnelles. L'ingrédient essentiel de la démonstration (3.1) est une version relative de l'argument de S. Mori pour produire des courbes rationnelles lorsque K_X n'est pas numériquement effectif.

L'essentiel de ce travail a été réalisé lors d'un séjour à Varsovie sur l'invitation de M. Szurek, que je voudrais remercier, ainsi que J. Wiśniewski pour d'intéressantes conversations, et des remarques déterminantes pour le présent travail.

Note. — S. Mori m'a informé de ce que Y. Miyaoka avait également démontré la connexité rationnelle des variétés de Fano, par une méthode légèrement différente. Je voudrais remercier J. Kollár, Y. Miyaoka, S. Mori pour m'avoir signalé une erreur dans la première version.

Par ailleurs, le corollaire 3.2 du présent travail peut être renforcé en utilisant le théorème 2.2 de [Ko-Mi-Mo] : un sous-ensemble fini quelconque d'une variété de Fano X est contenu dans une courbe rationnelle **irréductible** de X.

0. Notations

0.1. On désignera par X une variété projective complexe compacte connexe lisse de dimension n. On notera K_X et T_X respectivement ses fibrés canonique et tangent. Rappelons que X est de **Fano** si, par définition $(-K_X)$ est ample. On notera $\rho(X)$ le nombre de Picard de X.

0.2. On notera L un fibré en droites sur X, et $L^n \in \mathbf{Z}$ son nombre d'intersection. On notera : $c_1(X)^n := (-K_X)^n$. Si C est une courbe effective de X, et si L.C est le nombre d'intersection de L et C, le **L-degré normalisé** de C, noté $d_L(C)$, est $d_L(C) := (L.C)/(L^n)^{1/n}$. Il ne change pas si L est remplacé par l'un de ses multiples. Si X est de Fano, on choisira **toujours** $L = -K_X$. On notera alors $d(C)$ $(\deg(C))$ le **degré normalisé** (resp. le **degré**) de C (relatif à $(-K_X)$).

0.3. Si Z est une variété projective, on notera $N^1(Z)$ et $N_1(Z)$ respectivement les espaces vectoriels réels (duaux) des classes d'équivalence numérique de diviseurs de Cartier et de courbes de X. Cette construction est fonctorielle (*voir* [K]). On notera aussi, si Z est une sous-variété projective de X, $N_1(Z)_X$ l'image dans $N_1(X)$ de $N_1(Z)$ par l'injection naturelle $i : Z \to X$. Si C est une courbe effective de X, on notera [C] sa classe dans $N_1(Z)$.

0.4. Si $F : X \to Y$ est une application rationnelle dominante, et si x est un point générique de X, on notera $F_x := F^{-1} F(x)$ la fibre de F en x.

0.5. On notera $\mathscr{C}(X)$ la variété de Chow de X. Si C est un cycle algébrique effectif de X, on notera $\{C\}$ le point correspondant de $\mathscr{C}(X)$. On dira que C est irréductible si son support l'est, et est affecté de la multiplicité 1.

Si S est un sous-ensemble algébrique irréductible de $\mathscr{C}(X)$, on notera $(C_s)_{s \in S}$ la famille algébrique de cycles de X paramétrée par S, dite aussi : famille S.

On notera : $G'_s \subset S_X X$ le graphe d'incidence de la famille S; on notera $p'_s : G'_s \to S$ et $q'_s : G'_s \to X$ les projections naturelles. On notera aussi : $\nu_s : G_s \to G'_s$ la normalisation de G'_s, et on posera :

$$p_s := p'_s \circ \nu_s \qquad \text{et} \qquad q_s := q'_s \circ \nu_s.$$

On dira que S est **couvrant** si C_s est irréductible pour s générique dans S, et si q_s est surjective.

0.6. Soit $(C_s)_{s \in S}$ une famille couvrante de courbes de X, et $L \in \operatorname{Pic}(X)$. On notera : $d_L(S) := d_L(C_s)$ pour s dans S. On remarquera que $q_s : C_s \to S$ est lisse au-dessus du point générique de S. Si X est de Fano, on choisira toujours $L = -K_X$, et $d(S)$ (resp. $\deg(S)$) sera donc défini par :

$$d(S) = d_{(-K_X)}(C_s) \qquad (\text{resp. } \deg(S) = -K_X . C_s).$$

On appellera $d(S)$ (resp. $\deg(S)$) le **degré normalisé** (resp. le **degré**) de S. On notera également $[S] := [C_s] \in N_1(X)$ la classe d'équivalence de C_s, s arbitraire dans S.

0.7. Une application rationnelle dominante à fibres connexes $F : X \to Y$ est appelée une **quasi-fibration** s'il existe un ouvert de Zariski dense X^* de X sur lequel F est régulière et propre. Si A est un diviseur ample de Y et C une courbe effective irréductible de X rencontrant X^*, on a alors : $F^* A . C > 0$ si C n'est pas contenue dans une fibre Z de F rencontrant X^*. En particulier : $N_1(Z)_X \neq N_1(X)$ dans ces conditions. De la même observation résulte que F est constante si $\rho(X) = 1$.

Remarquer enfin que si X est normale et Y une courbe, alors la quasi-fibration est régulière.

1. Quotient par une famille algébrique de cycles

1.1. Définition. — *Soit* $T = (S_1, \ldots, S_k)$ *une suite finie de familles algébriques couvrantes* S_i *de cycles algébriques de* X.

1. *Une* **T-chaîne** $C = C_1 + \ldots + C_k$ *est un cycle algébrique* **connexe** *de* X *avec* $\{C_i\} \in S_i$ *pour* $1 \leqq i \leqq k$.

2. *Soit* $x \in X$. *La* **T-classe** $T(x)$ *de* x *est l'ensemble des* $y \in X$ *pour lesquels une* T-*chaîne existe qui contient* x *et* y.

3. *Soit* $x \in X$. *La* **T-enveloppe** $T_\infty(x)$ *de* x *est l'ensemble des* $y \in X$ *pour lesquels existent :* $\rho \geqq 1$ *et une suite :* $(x_0 = x, x_1, \ldots, x_\rho = y)$ *de points de* X *tels que* $x_{i+1} \in T(x_i)$ *pour* $i = 0, \ldots, \rho - 1$.

4. *On dit que* T *est* **effective** *si* $T(x) = T_\infty(x)$ *pour tout* x *de* X.

5. *On dira que* X *est* T-*connexe si* $T_\infty(x) = X$ *pour un (et donc tout)* x *de* X.

1.2. Théorème ([C], **Théorème 1, p. 189**). — *Soit* $T = (S_1, \ldots, S_k)$ *une suite finie de familles algèbriques couvrantes de cycles de* X. *Il existe alors une quasi-fibration* $\Psi_T : X \to X^T$ *dont la fibre passant par* x, *pour* x *générique dans* X, *est* $T_\infty(x)$, *qui est donc une sous-variété lisse projective connexe de* X. *On dit que* X^T *est le quotient de* X *par* T.

1.3. Remarque. — Le résultat précédent est valable dans un cadre plus général : il suffit que X soit normal et dans la classe $\mathscr{C}$, c'est-à-dire biméromorphe à une variété Kâhlérienne compacte.

1.4. Corollaire. — *Dans la situation de* 1.2, *si* $\rho(X) = 1$, *alors :* Ψ_T *est constante, c'est-à-dire :* X *est* T-*connexe*.

Ceci résulte immédiatement de 0.7.

1.5. Remarques. — Avec les notations de 1.2, si $T' = (S_1, \ldots, S_h)$ avec : $h \leqq k$, il existe une quasi-fibration : $\Psi_{T', T} : X^{T'} \to X^T$ telle que : $\Psi_T = (\Psi_{T', T}) \circ \Psi_{T'}$. En particulier, si $\tilde{T} = (S_1, \ldots, S_m, \ldots)$ est une suite infinie de familles algébriques couvrantes de cycles de X, et si $T(m) := (S_1, \ldots, S_m)$, il existe un entier m' tel que $X^{T(m)} = X^{T(m+1)}$ si $m \geqq m'$. On notera alors : $\Psi_{\tilde{T}} : X \to X^{\tilde{T}}$ le quotient par $T(m')$.

2. Variétés rationnellement connexes

2.1. Définition. — *Soit* X *une variété projective complexe.*

1. *Une courbe effective de* X *est dite* **rationnelle** *si sa normalisée est une réunion disjointe de copies de* $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$.

2. *Une* **chaîne rationnelle** *de* X *est une courbe rationnelle connexe de* X.

3. **L'enveloppe rationnelle** $R(x)$ de $x \in X$ *est l'ensemble des* $y \in X$ *pour lesquels il existe une chaîne rationnelle contenant x et y.*

4. *On dit que* X *est* **rationnellement connexe** *si* $R(x) = X$ *pour un (et donc tout) x de* X.

5. *On dit que* X *est* **uniréglée** si $R(x) \neq \{x\}$ *pour tout x de* X *(c'est-à-dire : si tout point de* X *est contenu dans une courbe rationnelle).*

2.2. Proposition. — *Soit* X *une variété de Fano de dimension n. Pour tout x de* X, *il existe une courbe rationnelle* C *contenant x, et de degré au plus* $(n+1)$. *(C'est-à-dire :* $(-K_X . C) \leqq n+1)$.

Ce résultat connu est établi dans [M – M].

2.3. Théorème. — *Soit* X *une variété projective (normale et irréductible). Il existe une quasi-fibration* $R_X : X \rightarrow R(X)$ *telle que : pour x général dans* X, *la fibre de* R_X *passant par x est égale à* $R(x)$.

(Rappelons [C] *que : « x général » dans* X *signifie : dans une intersection dénombrable d'ouverts de Zariski denses). Nous appellerons* R(X) **le quotient rationnel de** X.

2.4. Corollaire. — *Si* X *est lisse, uniréglée, et si* $\rho(X) = 1$, *alors* X *est une variété de Fano, et est rationnellement connexe.*

2.5. Corollaire. — *Dans la situation de* 2.3, X *est uniréglée si et seulement si :* $\dim(R(X)) < \dim(X)$, *et* X *est rationnellement connexe ssi :* $\dim(R(X)) = 0$.

Démonstration. — Considérons l'ensemble des quasi-fibrations $F : X \rightarrow Y$ dont la fibre générique est rationnellement connexe. Soit $d(Y) := \dim(Y)$ la dimension d'une telle fibration. Soit $F : X \rightarrow Y$ telle que $d(Y)$ soit minimum. Nous allons montrer que cette quasi-fibration possède la propriété requise (qui la définit à équivalence de quasi-fibration près, dans un sens évident). Considérons l'ensemble dénombrable $S = ((S_1, \ldots, S_m, \ldots)$ des composantes irréductibles de $\mathscr{C}(X)$ dont le point générique paramètre une courbe rationnelle irréductible de X qui n'est ni contenue dans le lieu d'indétermination de F, ni contenue dans une fibre de F.

Pour tout $m \geqq 1$, soit $X_m \subset X$ la réunion des courbes paramétrées par S_m : c'est une sous-variété projective irréductible de X.

2.6. Lemme. — $F(X_m) \subsetneq Y$.

Démonstration. — Supposons que $F(X_m) = Y$ pour un *m*. On considère la famille algèbrique de cycles : $F_s := F^{-1}(F(C_s))$, pour $s \in S_m$. C'est une famille couvrante algébrique de cycles de X. De plus, F_s est, par construction, rationnellement connexe pour *s* générique dans S_m. On note alors : $F_s = Z_u$, où $u = \{F_s\} \in \mathscr{C}(X)$. On obtient ainsi une famille couvrante $(Z_u)_{u \in U}$ de cycles rationnellement connexes de X. Soit $\Psi_u : X \rightarrow X^u$ le quotient par U : ses fibres sont rationnellement connexes, et l'on a une factorisation $\eta_u : Y \to X^u$ telle que : $\Psi_u = \eta_u \circ F$. De plus, les fibres de η_u sont de dimension positive.

Ceci contredit la minimalité de $d(F)$, et établit le lemme.

Le théorème 2.3 résulte du lemme, car on a bien sûr : $F_x \subset R(x)$ pour x générique dans X. Si cette inégalité était stricte, il existerait pour x générique dans X une courbe rationnelle irréductible passant par x mais non contenue dans F_x. On en déduirait alors que $X_m = X$ pour un m du moins, ce qui contredirait le lemme 2.6.

2.7. Proposition. — *Soit* X *une variété projective lisse et connexe. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1. X *est rationnellement connexe.*

2. *Pour toute quasi-fibration* $F : X \to Y$, *si* y *est générique dans* Y, *il existe une courbe rationnelle irréductible* C *rencontrant* $X_y := F^{-1}(y)$, *mais non contenue dans* X_y.

Démonstration :

$1 \Rightarrow 2$ En effet : si $y \neq z$ sont des points génériques de Y (au-dessus desquels F est régulière propre), et si $x \in X_y$, $t \in X_z$, il existe une chaîne rationnelle C joignant x et t. Donc, l'une des composantes irréductibles de C rencontre X_y, mais n'y est pas contenue.

$2 \Rightarrow 1$ Soit $R_X : X \to R(X)$ le quotient rationnel de X. Il suffit, pour obtenir l'implication cherchée, de lui appliquer le lemme 2.6 et la fin de la démonstration du théorème 2.3.

2.8. Remarques. — Le théorème 2.3 a été obtenu par Y. Miyaoka par des méthodes voisines dans [Mi]. Il reste valable pour X dans la classe $\mathscr{C}$. En général, on ne peut remplacer le mot « général » par le mot « générique » dans la conclusion de 2.3, comme le montre l'exemple des hypersurfaces quintiques de $\mathbf{P}_4(\mathbf{C})$.

3. Connexité rationnelle des variétés de Fano

3.1. Théorème. — *Soit* X *une variété de Fano de dimension n, et* $F : X \to Y$ *une quasi-fibration. Soit* Z *une fibre générique de* F. *Il existe alors une courbe rationnelle irréductible* C *de degré au plus* $(n+1)$ *non contenue dans* Z *qui rencontre* Z.

3.2. Corollaire. — *Soit* X *une variété de Fano. Alors :* X *est rationnellement connexe.*

Démonstration de 3.1. — Les arguments de [M], Th. 6 ou [M-M], p. 69 permettent de voir qu'il suffit d'établir le résultat lorsque X est définie sur un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, ce que nous supposons désormais.

Soit G une courbe irréductible rencontrant Z, mais telle que G ne soit pas contenue dans Z, fixée. Soit d son degré (anticanonique), et soit g son genre.

Soit $d(p) := \sup(d, npg)$.

Soit T la famille bornée des courbes **irréductibles** effectives de X qui rencontrent Z, sont de degré au plus $d(p)$ et sont de genre au plus g.

Alors : T est une sous-variété quasi projective de $\mathscr{C}(X)$.

Soit $U := F^{-1}(F(G))$, et soit $v : V \to U$ la normalisation de U. Alors (0.7), le relèvement $F_V := F \circ v : V \to U$ à V de la restriction de F à U est régulière.

Soit $(C_t)_{t \in T}$ la famille algébrique des courbes paramétrées par T.

Soit T(U) la sous-variété fermée de T constituée des t de T pour lesquels C_t est contenue dans U.

L'application $p : T(U) \to \overline{NE}(U)$ qui envoie $t \in T$ sur la classe de C_t dans $N_t(U)$ est constante sur les composantes connexes de T(U). Son image est donc finie.

Soit alors K le cône convexe (fermé) engendré par $p(T(U))$ et

$$\overline{NE}(U/G_0) := v_* (\overline{NE}(V/G_0)),$$

où $G_0 := F(G)$, et où $\overline{NE}(V/G_0)$ est le cône convexe fermé de $N_1(V)$ engendré par les classes d'équivalence numérique de courbes effectives de V envoyées sur 0 par $(F_V)_*$.

Alors K n'est pas contenu dans $\overline{NE}(U/G_0)$ puisque [G] appartient à la différence de ces deux ensembles. Soit R une demi-droite de K, extrêmale dans K, mais non contenue dans $\overline{NE}(U/G_0)$, engendrée par la classe d'une courbe irréductible G' appartenant à T(U), rencontrant Z, non contenue dans Z.

Il existe alors un morphisme $\Lambda : \tilde{G}' \to \hat{G}'$ qui est un composé de morphismes de Frobenius tel que, si $i : G' \to X$ est l'injection naturelle et $\nu : \hat{G}' \to G'$ la normalisation, on ait :

(1) $$(i \circ \nu \circ \Lambda)^* (-K_X) . \tilde{G}' \leqq d(p)$$

(2) $$\chi = \chi(\tilde{G}', (i \circ \nu \circ \Lambda)^* (T_X) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{G}'}(-\tilde{x})) > 0, \text{ si } x \in (Z \cap G') \text{ et si } \Lambda \circ \nu(\tilde{x}) = x.$$

La compatibilité des conditions (1) et (2) provient de ce que : $g(\tilde{G}') = g(G') \leqq g$, et de ce que : $\chi = [(i \circ \nu \circ \Lambda)^* (-K_X) . \tilde{G}' - n + n(1 - g(\tilde{G}'))]$ tandis que : $0 < a \leqq ng \Rightarrow pa \leqq d(p)$.

En particulier, $h_0 := i \circ \nu \circ \Lambda : \tilde{G}' \to X$ admet une famille algébrique de dimension un $h_s : \tilde{G}' \to X$, $s \in S'$, de déformations non triviales qui envoient $\tilde{x}$ sur x ([M], Prop. 3). Si λ est le degré de Λ, nous avons donc : $[\lambda G'] = [C] + [H]$, où C est une courbe irréductible rationnelle passant par x ([M], Th. 5).

3.3. LEMME. — *Soit* S *et* B *des courbes propres, lisses et connexes. Soit* $\varphi : S \times B \to X$ *une application rationnelle régulière sur* $S' \times B$ *telle que* $\varphi(S' \times \{b_0\}) = x_0 \in Z$ *pour* $b_0 \in B$ *et* S' *Zariski dense dans* S.

Si les courbes rationnelles de X *passant par* x_0 *sont contenues dans* Z, *alors :* $F \circ \varphi$ *est régulière sur* $(S \times B)$, *et constante sur* $S \times \{b\}$, $(\forall b \in B)$.

Démonstration. — Soit $q : P \to S \times B$ une suite d'éclatements telle que $\tilde{\varphi} := \varphi \circ q : P \to X$ soit régulière. Soit $s \in (S/S')$, et soit $E := q^{-1}(s \times b_0)$; c'est une courbe connexe dont les composantes sont toutes rationnelles. Donc : $\tilde{\varphi}(E)$ est une courbe connexe de X dont toutes les composantes sont rationnelles. Donc : $\tilde{\varphi}(E) \subset Z$, d'après notre hypothèse. Donc : $(F \circ \tilde{\varphi})(q^{-1}(S \times \{b_0\})) = F(x_0)$. Donc : $(F \circ \tilde{\varphi})$ est constante sur $q^{-1}(S \times \{b\})$, pour tout b dans B. D'où le lemme.

Supposons maintenant que la conclusion du théorème 3.1 est fausse. Le lemme 3.4 ci-dessous montre alors que toutes les courbes rationnelles irréductibles de X qui rencontrent Z sont contenues dans Z. On peut donc appliquer la conclusion du lemme 3.3 à l'application $\varphi' : S' \times \tilde{G}' \to X$ définie par : $\varphi'(s', \gamma) = h_{s'}(\gamma)$.

Donc $G'_s := h_s(\tilde{G}')$ est contenue dans U, pour tout s de S. Si H′ est une composante irréductible de H non contenue dans une fibre de F_V, on a donc : $F(H') = F(G')$, de sorte que H′ rencontre Z, et donc : [H′] appartient à K.

On peut donc écrire : $[G'] = [Z_0] + [H_0]$, où $[Z_0] \neq 0$ est dans $\overline{NE}(U/G_0)$ et $[H_0]$ dans K. Par extrêmalité de R dans K, $[Z_0]$ et $[H_0]$ sont donc dans R. Ceci contredit le fait que R n'est pas contenue dans $\overline{NE}(U/G_0)$.

3.4. LEMME. — *Soit* C_0 *une courbe rationnelle irréductible qui rencontre* Z, *mais n'est pas contenue dans* Z. *Il existe alors une telle courbe rationnelle* C *satisfaisant les deux conditions précédentes, et telle que, de plus,* $\deg(C) := -K_X . C \leqq n+1$.

Démonstration. — Si $\deg(C_0) \geqq n+2$, le lemme de cassage de Mori ([M], Th. 4) montre qu'il existe une courbe rationnelle connexe réductible C′ rencontrant Z telle que : $[C'] = [C_0]$. L'une des composantes irréductibles C_1 de C′ rencontre donc Z sans y être contenue. De plus, $\deg(C_1) < \deg(C_0)$. D'où le lemme et donc le théorème 3.1.

3.5. REMARQUE. — Appliquant les résultats de [C′], on obtiendrait que $c_1(X)^n \leqq (n(n+1))^n$ pour toute variété de Fano de dimension n, pourvu que l'on sache, dans 3.1 remplacer : « qui rencontre Z » par : « qui contient x, pour x générique dans Z ».

BIBLIOGRAPHIE

[C] F. CAMPANA, *Coréduction algébrique d'un espace analytique compact faiblement Kählerien* (*Inv. Math.*, vol. 81, 1981, p. 187-223).

[C′] F. CAMPANA, *Théorème de finitude pour les variétés de Fano suffisamment uniréglées* [*J.f.d.R.u.A. Math.* (à paraître)].

[K-M-M] J. KOLLÁR, Y. MIYAOKA et S. MORI, *Rational Curves on Fano Manifolds, Preprint.*

[Ko-Mi-Mo] J. KOLLÁR, Y. MIYAOKA et S. MORI, *Rationally Connected Varieties*, Preprint.

[Mi] Y. MIYAOKA, *On the Structure of Uniruled Varieties*, Manuscrit non publié 1986.

[M-M] Y. MIYAOKA et S. MORI, *A numerical Criterion for Uniruledness* (*Ann. Math.*, vol. 124, 1986, p. 65-69).

[M] S. MORI, *Projective Manifolds with Ample Tangent Bundles* (*Ann. Math.*, vol. 110, 1979, p. 593-606).

[N] A. NADEL, *Boundedness of Fano Varieties with Picard Number One*, Preprint.

[T] H. TSUJI, *Boundedness of the Degree of Fano Manifolds with* $b_2 = 1$, Preprint.

(Manuscrit reçu le 27 mai 1991,
révisé le 7 novembre 1991).

F. CAMPANA,
Département de Mathématiques,
Université de Nancy-I,
B.P. n° 239,
54506 Vandœuvre Cedex.