DÉSIRÉ ANDRÉ

Développements, par rapport au module, des fonctions elliptiques $\lambda(x)$, $\mu(x)$ et de leurs puissances

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 9 (1880), p. 107-118
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1880_2_9__107_0>

DÉVELOPPEMENTS,

PAR RAPPORT AU MODULE,

DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

$\lambda(x)$, $\mu(x)$

ET DE LEURS PUISSANCES,

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE.

Introduction.

1. Nous nous proposons, dans le présent Mémoire, de déterminer la forme des développements, *par rapport au module*, soit des deux fonctions elliptiques $\lambda(x)$, $\mu(x)$, soit des puissances, d'exposant entier et positif, de ces deux fonctions.

2. Nous avons fait connaître déjà (¹), pour ces deux fonctions ainsi que pour leurs puissances, la forme de leurs développements *par rapport à la variable x*. Si l'on part de ces derniers développements et qu'on les ordonne par rapport aux puissances croissantes du module k, on constate que ces puissances du module y sont respectivement multipliées par des séries entières en x, d'une nature spéciale, lesquelles rentrent, comme cas particuliers, dans les séries dont nous avons récemment (²) donné la somme sous forme finie.

3. La méthode que nous devons suivre nous est donc naturellement

(¹) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, année 1877, p. 265.
(²) *Ibid.*, année 1879, p. 239.

indiquée : nous n'avons qu'à prendre les développements suivant les puissances de la variable x, à les ordonner suivant les puissances du module k, en déterminant bien les séries entières qui multiplient ces puissances, enfin à calculer la somme de chacune de ces séries.

4. C'est cette méthode que nous suivons.

Nous rappelons d'abord les développements par rapport à la variable x que nous avons donnés [1] pour les deux fonctions $\lambda(x)$, $\mu(x)$, ainsi que pour leurs puissances.

Nous ordonnons ensuite ces développements par rapport aux puissances du module k, en déterminant avec soin les séries entières en x qui multiplient ces puissances.

Nous sommons ces séries entières.

Enfin, des résultats de cette sommation et des résultats déjà obtenus [2] par nous pour les développements, par rapport au module, des fonctions $\lambda(x)$ et $\mu(x)$, nous déduisons la forme générale des coefficients de k^{2n} dans les développements, par rapport au module, des fonctions $\lambda^{\pi}(x)$ et $\mu^{\pi}(x)$, dans lesquelles π désigne un entier positif quelconque, et le problème que nous nous étions proposé se trouve ainsi résolu.

5. Tous les résultats du présent Mémoire, sauf les développements de $\lambda(x)$ et de $\mu(x)$, que nous avions obtenus et publiés déjà [3], nous paraissent nouveaux. Nous les avons résumés dans une courte Note que notre illustre maître, M. Hermite, a bien voulu présenter [4] à l'Académie des Sciences.

§ I. — Développements suivant les puissances de x.

6. Soit π un exposant entier et positif quelconque. On sait [5] que les développements des puissances $\pi^{\text{ièmes}}$ des deux fonctions $\lambda(x)$, $\mu(x)$

---

(1) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, année 1877, p. 265.

(2) *Ibid.*, année 1879, p. 151. — *Bulletin de la Société mathématique de France*, année 1878, p. 163.

(3) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, année 1879, p. 151. — *Bulletin de la Société mathématique de France*, année 1878, p. 163.

(4) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séance du 27 mai 1878.

(5) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, année 1877, p. 303.

affectent les formes suivantes,

$$\lambda^{\pi}(x) = A_0^{(\pi)} \frac{x^{\pi}}{\pi!} - A_1^{(\pi)} \frac{x^{\pi+2}}{(\pi+2)!} + A_2^{(\pi)} \frac{x^{\pi+4}}{(\pi+4)!} - A_3^{(\pi)} \frac{x^{\pi+6}}{(\pi+6)!} + \ldots,$$

$$\mu^{\pi}(x) = B_0^{(\pi)} - B_1^{(\pi)} \frac{x^2}{2!} + B_2^{(\pi)} \frac{x^4}{4!} - B_3^{(\pi)} \frac{x^6}{6!} + \ldots,$$

et que les coefficients de ces développements sont des polynômes entiers par rapport au carré du module k, de façon que l'on peut écrire

$$A_q^{(\pi)} = \alpha_{q,0}^{(\pi)} + \alpha_{q,1}^{(\pi)} k^2 + \alpha_{q,2}^{(\pi)} k^4 + \ldots,$$
$$B_q^{(\pi)} = \beta_{q,0}^{(\pi)} + \beta_{q,1}^{(\pi)} k^2 + \beta_{q,2}^{(\pi)} k^4 + \ldots.$$

7. Comme on le sait aussi, $A_0^{(1)}$ et $B_0^{(1)}$ sont l'un et l'autre égaux à l'unité; $A_q^{(1)}$ et $B_q^{(1)}$ sont, par rapport à k, le premier du degré $2q$ et le second du degré $2q-2$.

On voit facilement que ces propriétés subsistent pour $A_0^{(\pi)}$ et $B_0^{(\pi)}$, pour $A_q^{(\pi)}$ et $B_q^{(\pi)}$, quel que soit l'exposant entier et positif représenté par π.

8. Cela posé, nous avons, dans un travail antérieur ([1]), déterminé la forme générale des coefficients $\alpha_{q,s}^{(\pi)}$, $\beta_{q,s}^{(\pi)}$, regardés comme des fonctions de la seule quantité q, et nous sommes parvenu aux résultats que voici :

1° *Les coefficients $\alpha_{q,s}^{(\pi)}$, $\beta_{q,s}^{(\pi)}$, où q est variable et s et π constants, constituent chacun le terme général d'une série récurrente proprement dite.*

2° *Si π est impair et égal à $2p+1$, cette série admet l'équation génératrice*

$$\prod_0^p {}_j [z-(2j+1)^2]^{s+1} \times \prod_{p+1}^{p+s} {}_j [z-(2j+1)^2]^{p+s+1-j} = 0,$$

et si π est pair et égal à $2p$, elle admet l'équation

$$\prod_1^p {}_j [z-(2j)^2]^{s+1} \times \prod_{p+1}^{p+s} {}_j [z-(2j)^2]^{p+s+1-j} = 0.$$

3° *Enfin, $\alpha_{q,s}^{(2p+1)}$ et $\beta_{q,s}^{(2p+1)}$ sont l'un et l'autre de la première, et*

([1]) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, année 1877, p. 326.

$\alpha_{q,s}^{(2p)}$ *et* $\beta_{q,s}^{(2p)}$ *l'un et l'autre de la seconde des deux formes*

$$\sum_{0}^{p}{}_{j}\,\Xi_j(q)(2j+1)^{2q}+\sum_{p+1}^{p+s}{}_{j}\,\xi_j(q)(2j+1)^{2q},$$

$$\sum_{1}^{p}{}_{j}\,\Xi_j(q)(2j)^{2q}\quad+\sum_{p+1}^{p+s}{}_{j}\,\xi_j(q)(2j)^{2q},$$

dans lesquelles $\Xi_j(q)$ *est un polynôme entier en* q, *toujours du degré* s, *et* $\xi_j(q)$ *un polynôme entier en* q, *du degré* $p+s-j$.

9. Ce sont ces résultats que nous prenons pour point de départ des présentes recherches.

§ II. — Séries qui multiplient les puissances de k.

10. Conformément à la marche que nous avons indiquée, nous allons maintenant prendre nos développements par rapport à la variable x et les ordonner par rapport au module k. Nous considérerons successivement les développements des deux fonctions $\lambda^\pi(x)$ et $\mu^\pi(x)$.

11. Prenons d'abord le développement de $\lambda^\pi(x)$, et cherchons dans ce développement la série qui multiplie k^{2n}.

Le premier des polynômes $A_q^{(\pi)}$ qui contienne cette puissance du module est, comme on l'a vu (7), le polynôme $A_n^{(\pi)}$; le second est $A_{n+1}^{(\pi)}$, le troisième $A_{n+2}^{(\pi)}$, et ainsi de suite; et, dans ces différents polynômes, les coefficients de k^{2n} sont $\alpha_{n,n}^{(\pi)}$, $\alpha_{n+1,n}^{(\pi)}$, $\alpha_{n+2,n}^{(\pi)}$, et ainsi de suite.

Mais les polynômes $A_n^{(\pi)}$, $A_{n+1}^{(\pi)}$, $A_{n+2}^{(\pi)}$, ... multiplient (6) respectivement les quantités

$$(-1)^n\frac{x^{\pi+2n}}{(\pi+2n)!},\quad(-1)^{n+1}\frac{x^{\pi+2n+2}}{(\pi+2n+2)!},\quad(-1)^{n+2}\frac{x^{\pi+2n+4}}{(\pi+2n+4)!},\quad\cdots.$$

Donc, dans le développement de $\lambda^\pi(x)$, la série qui multiplie k^{2n} peut s'écrire

$$(-1)^n\left[\alpha_{n,n}^{(\pi)}\frac{x^{\pi+2n}}{(\pi+2n)!}-\alpha_{n+1,n}^{(\pi)}\frac{x^{\pi+2n+2}}{(\pi+2n+2)!}+\alpha_{n+2,n}^{(\pi)}\frac{x^{\pi+2n+4}}{(\pi+2n+4)!}-\cdots\right].$$

12. Prenons de même le développement de $\mu^{\pi}(x)$, et cherchons, dans ce développement, la série qui multiplie k^{2n}.

Le premier des polynômes $B_q^{(\pi)}$ qui contienne cette puissance du module est, comme on l'a vu (7), le polynôme $B_{n+1}^{(\pi)}$, le second est $B_{n+2}^{(\pi)}$, le troisième $B_{n+3}^{(\pi)}$, et ainsi de suite; et, dans ces différents polynômes, les coefficients de k^{2n} sont $\beta_{n+1,n}^{(\pi)}$, $\beta_{n+2,n}^{(\pi)}$, $\beta_{n+3,n}^{(\pi)}$, et ainsi de suite.

D'ailleurs les polynômes $B_{n+1}^{(\pi)}$, $B_{n+2}^{(\pi)}$, $B_{n+3}^{(\pi)}$, ... multiplient respectivement (6) les quantités

$$(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!},\quad (-1)^{n+2}\frac{x^{2n+4}}{(2n+4)!},\quad (-1)^{n+3}\frac{x^{2n+6}}{(2n+6)!},\quad \ldots.$$

Donc, dans le développement de $\mu^{\pi}(x)$, la série qui multiplie k^{2n} peut s'écrire

$$(-1)^{n+1}\left[\beta_{n+1,n}^{(\pi)}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}-\beta_{n+2,n}^{(\pi)}\frac{x^{2n+4}}{(2n+4)!}+\beta_{n+3,n}^{(\pi)}\frac{x^{2n+6}}{(2n+6)!}-\ldots\right].$$

13. Il suit immédiatement de ces résultats (**11** et **12**), que, si nous posons

$$\begin{aligned}
\lambda^{2p+1}(x) &= C_0^{(p)} + C_1^{(p)}k^2 + C_2^{(p)}k^4 + C_3^{(p)}k^6 + \ldots,\\
\lambda^{2p}\ \ (x) &= D_0^{(p)} + D_1^{(p)}k^2 + D_2^{(p)}k^4 + D_3^{(p)}k^6 + \ldots,\\
\mu^{2p+1}(x) &= E_0^{(p)} + E_1^{(p)}k^2 + E_2^{(p)}k^4 + E_3^{(p)}k^6 + \ldots,\\
\mu^{2p}\ \ (x) &= F_0^{(p)} + F_1^{(p)}k^2 + F_2^{(p)}k^4 + F_3^{(p)}k^6 + \ldots,
\end{aligned}$$

et que nous désignions en même temps par γ, δ, ε, ζ quatre polynômes convenablement choisis, entiers par rapport à x, ne contenant, le premier que des puissances impaires de x, les trois autres que des puissances paires, et ayant respectivement leurs degrés égaux aux quatre nombres $2p+2n-1$, $2p+2n-2$, $2n$ et $2n$, nous avons alors identiquement

$$\begin{aligned}
C_n^{(p)} &= \gamma + c_0\frac{x}{1!} - c_1\frac{x^3}{3!} + c_2\frac{x^5}{5!} - \ldots,\\
D_n^{(p)} &= \delta + d_0 \quad - d_1\frac{x^2}{2!} + d_2\frac{x^4}{4!} - \ldots,\\
E_n^{(p)} &= \varepsilon + e_0 \quad - e_1\frac{x^2}{2!} + e_2\frac{x^4}{4!} - \ldots,\\
F_n^{(p)} &= \zeta + f_0 \quad - f_1\frac{x^2}{2!} + f_2\frac{x^4}{4!} - \ldots,
\end{aligned}$$

les coefficients c_t, d_t, e_t, f_t étant respectivement de même forme (8) que les coefficients $\alpha_{t,n}^{2p+1}$, $\alpha_{t,n}^{(2p)}$, $\beta_{t,n}^{(2p+1)}$, $\beta_{t,n}^{(2p)}$.

14. On voit que nous n'avons plus, pour obtenir la forme des coefficients C, D, E, F, qu'à sommer les séries qui figurent aux seconds membres de ces dernières égalités.

§ III. — Sommation des séries considérées.

15. Les quatre séries que présentent à leurs seconds membres les égalités qui précèdent rentrent tout à fait, comme cas particuliers, dans les séries que nous avons étudiées (¹) récemment et dont nous avons fait connaître la somme. Pour sommer ces séries que nous venons d'obtenir, il nous suffirait donc de nous reporter à l'étude générale dont nous parlons et d'appliquer au cas présent les formules données alors. Mais, comme les séries actuelles sont relativement très simples, nous pouvons chercher directement leurs sommes. C'est ce que nous allons faire.

16. Considérons d'abord la série

$$c_0\frac{x}{1!} - c_1\frac{x^3}{3!} + c_2\frac{x^5}{5!} - \ldots,$$

qui est égale à $C_n^{(p)} - \gamma$, et appelons r l'une quelconque des racines de l'équation génératrice de la série dont c_t est le terme général, ρ désignant le degré de multiplicité de cette racine: nous avons, comme on le sait, la formule

$$c_t = \Sigma\varphi_r(t)\,r^t,$$

dans laquelle le Σ s'étend à toutes les racines de cette équation génératrice, et où $\varphi_r(t)$ est un polynôme entier en t du degré $\rho - 1$.

17. Il s'ensuit immédiatement, pour le terme général de notre série,

$$(-1)^t c_t \frac{x^{2t+1}}{(2t+1)!} = \sum (-1)^t \frac{\varphi_r(t)\,r^t}{(2t+1)!}\,x^{2t+1},$$

(¹) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, année 1879, p. 239.

et, dans le second membre de cette dernière égalité, l'expression soumise au signe Σ n'est autre chose que la portion de ce terme général qui correspond à la racine r de l'équation génératrice.

Comme d'ailleurs $\varphi_r(t)$ est un polynôme entier en t du degré $\rho - 1$, nous pouvons poser

$$\frac{\varphi_r(t)r^t}{(2t+1)!} = u_{r,0}\frac{(\sqrt{r})^{2t+1}}{(2t+1)!} + u_{r,1}\frac{(\sqrt{r})^{2t}}{(2t)!} + \ldots + u_{r,\rho-1}\frac{(\sqrt{r})^{2t-\rho+2}}{(2t-\rho+2)!},$$

et alors l'expression soumise au signe Σ devient

$$(-1)^t\left[u_{r,0}\frac{(x\sqrt{r})^{2t+1}}{(2t+1)!} + u_{r,1}x\frac{(x\sqrt{r})^{2t}}{(2t)!} + \ldots + u_{r,\rho-1}x^{\rho-1}\frac{(x\sqrt{r})^{2t-\rho+2}}{(2t-\rho+2)!}\right].$$

18. Si donc nous voulons, dans la somme même de la série, former la portion qui correspond à la racine r, nous n'avons qu'à sommer les résultats que fournit cette dernière expression lorsqu'on y donne à t toutes les valeurs entières possibles depuis 0 jusqu'à $+\infty$. Nous trouvons ainsi, pour cette portion de notre série,

$$(u_{r,0} - u_{r,2}x^2 + u_{r,4}x^4 - \ldots)\sin(x\sqrt{r}) + (u_{r,1}x - u_{r,3}x^3 + \ldots)\cos(x\sqrt{r}),$$

$\sin(x\sqrt{r})$ étant multiplié par un polynôme entier en x ne contenant que des puissances paires de x et d'un degré égal au plus grand nombre pair non supérieur à $\rho - 1$, et $\cos(x\sqrt{r})$ par un polynôme entier en x, ne contenant que des puissances impaires de x et d'un degré égal au plus grand nombre impair non supérieur à $\rho - 1$.

Au reste, il est facile de voir que, si l'on désigne par $2l$ le degré du premier polynôme et par $2m$ celui du second, l est la partie entière de $\frac{\rho - 1}{2}$ et m celle de $\frac{\rho - 2}{2}$.

19. Cherchons maintenant la somme même de la série considérée, c'est-à-dire l'expression de $C_n^{(p)} - \gamma$. Nous n'avons pour cela qu'à ajouter l'expression que nous venons d'obtenir, et qui correspond à la racine r de l'équation génératrice, avec les expressions analogues correspondant aux autres racines de cette équation.

20. *A priori*, nous voyons que la somme cherchée est un polynôme dont chaque terme contient un coefficient indépendant de x, multiplié par une puissance de x et par une ligne trigonométrique, qui est un sinus si la puissance de x a un exposant pair, et un cosinus si elle a un exposant impair. Mais les racines de l'équation génératrice considérée (8) sont toutes des carrés de nombres entiers impairs. Donc l'arc soumis à chaque signe sinus ou cosinus est de la forme $(2j+1)x$. Donc, en désignant par $G_{i,j}$ et $H_{i,j}$ des coefficients indépendants de x et par i et j des entiers non négatifs, on a identiquement, $C_n^{(p)} - \gamma$ désignant la somme cherchée,

$$C_n^{(p)} - \gamma = \Sigma G_{i,j} x^{2i} \sin(2j+1)x + \Sigma H_{i,j} x^{2i+1} \cos(2j+1)x.$$

21. Pour bien connaître la forme de $C_n^{(p)} - \gamma$, il nous reste à trouver à quelles conditions doivent satisfaire les entiers i et j figurant dans un même terme, quelconque d'ailleurs, de cette expression.

Puisque c_t est de même forme que $\alpha_{t,n}^{(2p+1)}$, ces conditions nous sont fournies par l'équation génératrice (8). Or nous voyons, sur cette équation, d'abord que j peut prendre toutes les valeurs entières depuis 0 jusqu'à $n+p$, et ensuite que $\rho - 1$ est égal à n pour toutes les valeurs de j non supérieures à p, et à $n+p-j$ pour toutes les valeurs supérieures. Si l'on se rappelle la valeur maxima (18) de i, en fonction de $\rho - 1$, dans chacun des deux Σ qui précèdent, on voit donc que l'on a : dans les deux Σ, $j \leqq n+p$; dans le premier Σ, lorsque j n'est pas supérieur à p, $2i \leqq n$, et $2i \leqq n+p-j$ lorsque j dépasse p; dans le second Σ, $2i+1 \leqq n$ lorsque j n'est pas supérieur à p, et $2i+1 \leqq n+p-j$ lorsque j dépasse p.

22. Tous ces résultats peuvent se résumer ainsi : $C_n^{(p)} - \gamma$ est donné par la formule

$$C_n^{(p)} - \gamma = \Sigma G_{i,j} x^{2i} \sin(2j+1)x + \Sigma H_{i,j} x^{2i+1} \cos(2j+1)x,$$

dans laquelle on désigne par $G_{i,j}$ et $H_{i,j}$ des coefficients indépendants de x, par i et j des nombres entiers quelconques, non négatifs, et où le premier Σ s'étend à tous les systèmes de valeurs des entiers i et j qui satisfont à la fois aux deux conditions

$$2i \leqq n, \quad 2i + j \leqq n + p,$$

et le second à tous ceux qui satisfont à la fois aux deux conditions

$$2i + 1 \leqq n, \quad 2i + 1 + j \leqq n + p.$$

23. Nous pourrions maintenant sommer les trois autres séries considérées, c'est-à-dire les séries qui sont les développements respectifs des trois quantités $D_n^{(p)} - \delta$, $E_n^{(p)} - \varepsilon$, $F_n^{(p)} - \zeta$; mais, comme les raisonnements et les calculs seraient pour ainsi dire identiques à ceux qui précèdent, au lieu d'exposer en détail ces trois sommations, nous nous bornerons à en faire connaître les résultats.

24. Pour $D_n^{(p)} - \delta$, on trouve la formule

$$D_n^{(p)} - \delta = \Sigma G_{i,j} x^{2i} \cos 2jx + \Sigma H_{i,j} x^{2i+1} \sin 2jx,$$

dans laquelle $G_{i,j}$ et $H_{i,j}$ sont des coefficients indépendants de x, les indices i et j des entiers quelconques, supérieurs le premier à -1 et le second à o, et où le premier Σ s'étend à tous les systèmes de valeurs des entiers i et j qui satisfont à la fois aux deux conditions

$$2i \leqq n, \quad 2i + j \leqq n + p,$$

et le second à tous ceux qui satisfont à la fois aux deux conditions

$$2i + 1 \leqq n, \quad 2i + 1 + j \leqq n + p.$$

25. Pour $E_n^{(p)} - \varepsilon$, on trouve la formule

$$E_n^{(p)} - \varepsilon = \Sigma G_{i,j} x^{2i} \cos(2j+1)x + \Sigma H_{i,j} x^{2i+1} \sin(2j+1)x,$$

dans laquelle $G_{i,j}$ et $H_{i,j}$ sont des coefficients indépendants de x, les indices i et j des entiers quelconques, non négatifs, et où les deux Σ ont chacun la même extension que dans les formules précédentes.

26. Enfin, on trouve que $F_n^{(p)} - \zeta$ est absolument de la même forme que $D_n^{(p)} - \delta$, et ce dernier résultat semble pour ainsi dire évident lorsqu'on se rappelle la relation bien connue

$$\lambda^2(x) + \mu^2(x) = 1,$$

qui sert parfois même (1) de définition à la fonction $\mu(x)$.

§ IV. — Coefficients des puissances du module.

27. Résoudre le problème que nous nous sommes proposé, c'est évidemment déterminer la forme des coefficients des puissances successives du module dans les quatre développements considérés plus haut (**13**). Notre problème est donc résolu, puisque nous venons de trouver la forme générale de chacune des quantités $C_n^{(p)}$, $D_n^{(p)}$, $E_n^{(p)}$, $F_n^{(p)}$. Seulement nous pouvons simplifier notablement les expressions que nous venons d'obtenir.

28. Considérons en premier lieu les coefficients $C_n^{(p)}$, $E_n^{(p)}$, qui correspondent aux puissances impaires des deux fonctions $\lambda(x)$, $\mu(x)$. Nous venons de trouver ces deux résultats :

$$C_n^{(p)} = \gamma + \Sigma G_{i,j} x^{2i} \sin(2j+1)x + \Sigma H_{i,j} x^{2i+1} \cos(2j+1)x,$$
$$E_n^{(p)} = \varepsilon + \Sigma G_{i,j} x^{2i} \cos(2j+1)x + \Sigma H_{i,j} x^{2i+1} \sin(2j+1)x.$$

Or, dans deux Mémoires (2) antérieurs à celui-ci, nous avons trouvé que $C_n^{(0)}$ et $E_n^{(0)}$, qui correspondent à $\lambda^1(x)$ et $\mu^1(x)$, ne contiennent ni l'un ni l'autre rien d'analogue aux polynômes γ, ε, ou, pour mieux dire, que chaque terme de $C_n^{(0)}$ et de $E_n^{(0)}$ renferme en facteur un sinus ou un cosinus portant sur un multiple impair de x. C'est là une propriété des fonctions $\lambda(x)$ et $\mu(x)$ qui subsiste évidemment lorsqu'on élève chacune de ces fonctions à une puissance d'exposant impair ; et il s'ensuit que les polynômes γ et ε sont identiquement nuls, fait qui

---

(1) Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions elliptiques*, p. 354.

(2) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, année 1879, p. 151. — *Bulletin de la Société mathématique de France*, année 1878, p. 163.

ne laisse pas que de simplifier réellement les expressions trouvées pour $C_n^{(p)}$ et $E_n^{(p)}$.

29. On obtient pour $D_n^{(p)}$ et $F_n^{(p)}$ une simplification analogue.

En effet, d'après la forme que nous avons rappelée (28) pour $C_n^{(0)}$ et $E_n^{(0)}$, on voit que, dans chacune de ces expressions, la puissance de x présentée par un terme quelconque n'a jamais un exposant supérieur à n. C'est là une propriété des développements, par rapport au module, de $\lambda(x)$ et de $\mu(x)$. Cette propriété subsiste évidemment pour toutes les puissances de ces fonctions dont l'exposant est entier, et, en particulier, pour les puissances d'exposant pair qui actuellement nous occupent. Par conséquent, nous sommes fondé à dire que les polynômes δ et ζ, que nous avions regardés comme ayant pour degrés, le premier $2n+2p-2$, et le second $2n$, sont d'un degré qui ne dépasse pas n, ou plutôt, pour préciser davantage, puisqu'ils ne contiennent chacun que des puissances paires de x, nous sommes fondés à dire qu'ils ont l'un et l'autre pour degré le plus grand nombre pair non supérieur à n.

Cela posé, reportons-nous à la forme commune aux quantités $D_n^{(p)} - \delta$ et $F_n^{(p)} - \zeta$, que nous avons trouvée déjà (24), et qui est

$$\Sigma G_{i,j} x^{2i} \cos 2jx + \Sigma H_{i,j} x^{2i+1} \sin 2jx.$$

Nous avons supposé que nous n'y attribuions à j que des valeurs supérieures à zéro. Donnons à cet indice j la valeur zéro elle-même : le second Σ s'annulera ; mais le premier nous donnera un polynôme entier en x, ne renfermant que des puissances paires de x, ayant pour degré, à cause de la condition $2i \leqq n$, le plus grand nombre pair non supérieur à n, et dont les coefficients pourront être pris arbitrairement. Choisissons ces coefficients égaux soit à ceux du polynôme δ, soit à ceux du polynôme ζ, les polynômes δ et ζ étant, par suite de la réduction précédente, justement du même degré que notre présent polynôme : nous obtiendrons ainsi une double simplification, d'abord le passage du polynôme δ ou ζ à l'intérieur du premier Σ, ensuite la faculté de donner à j la valeur zéro.

Grâce à la première de ces simplifications, $D_n^{(p)}$ et $F_n^{(p)}$ se présenteront comme $C_n^{(p)}$ et $E_n^{(p)}$, sous la forme d'une somme de deux Σ, et, grâce à la seconde, j pourra se définir de la même façon dans les formes des quatre coefficients $C_n^{(p)}$, $D_n^{(p)}$, $E_n^{(p)}$, $F_n^{(p)}$.

30. En résumé donc, les formes générales des quatre coefficients cherchés sont données par les quatre égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
C_n^{(p)} &= \Sigma G_{i,j} x^{2i} \sin(2j+1)x + \Sigma H_{i,j} x^{2i+1} \cos(2j+1)x,\\
D_n^{(p)} &= \Sigma G_{i,j} x^{2i} \cos 2jx \qquad\quad + \Sigma H_{i,j} x^{2i+1} \sin 2jx,\\
E_n^{(p)} &= \Sigma G_{i,j} x^{2i} \cos(2j+1)x + \Sigma H_{i,j} x^{2i+1} \sin(2j+1)x,\\
F_n^{(p)} &= \Sigma G_{i,j} x^{2i} \cos 2jx \qquad\quad + \Sigma H_{i,j} x^{2i+1} \sin 2jx,
\end{aligned}$$

dans chacune desquelles on désigne par $G_{i,j}$ et $H_{i,j}$ des coefficients indépendants de x, par i et j des entiers quelconques, non négatifs, et dans chacune desquelles aussi on étend le premier Σ à tous les systèmes de valeurs des entiers i et j qui satisfont à la fois aux deux conditions

$$2i \leqq n, \quad 2i + j \leqq n + p,$$

et le second à tous ceux qui satisfont à la fois aux deux conditions

$$2i + 1 \leqq n, \quad 2i + 1 + j \leqq n + p.$$

Telle est la solution du problème que nous nous étions proposé.

Dijon, 23 mai 1878.