

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

CH. MÉRAY

Solution du problème général de l'analyse indéterminée du premier degré

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2^e série, tome 12 (1883), p. 89-104

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1883_2_12__89_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

par lequel la multiplication du système de formes (5) régénère évidemment le système proposé (2).

6. Un déterminant du système (5) par rapport à m quelconques des indéterminées est égal au produit du même déterminant du système (2) multiplié par le déterminant du tableau (4).

Ce point résulte immédiatement de la manière dont les coefficients des formes (5) s'expriment au moyen des éléments des tableaux (3) et (4), combinée avec la règle de multiplication des déterminants.

7. L'opération consistant à remplacer certaines fonctions des indéterminées x, y, \dots, u, v , les formes (2) par exemple, par les nouvelles fonctions aux indéterminées x', y', \dots, u', v' , obtenues en substituant à x, y, \dots, u, v les seconds membres des formules

$$(6) \quad \begin{cases} x = \alpha'_1 x' + \beta'_1 y' + \gamma'_1 z' + \dots + \eta'_1 s' + \theta'_1 t' + \dots + \iota'_1 u' + \nu'_1 v', \\ y = \alpha'_2 x' + \dots, \\ \dots, \\ v = \alpha'_n x' + \dots + \nu'_n v', \end{cases}$$

se nomme la *transformation* de ces fonctions au moyen de la *substitution* linéaire (6).

Si maintenant on transforme ces nouvelles fonctions au moyen d'une seconde substitution linéaire, faisant passer des indéterminées x', y', \dots, u', v' à d'autres indéterminées $x'', y'', \dots, u'', v''$, il est évidemment possible de remplacer l'ensemble de ces deux substitutions consécutives par une seule substitution aussi linéaire, permettant de passer directement de x, y, \dots, u, v à $x'', y'', \dots, u'', v''$, et que l'on peut appeler la *résultante* des deux substitutions consécutives dont il s'agit.

Cela posé, on a ce théorème évident :

Les coefficients de la résultante de deux substitutions données sont les éléments du déterminant-produit des déterminants des coefficients de ces deux substitutions. Par suite, leur déterminant est égal au produit de ceux des coefficients de ces deux substitutions.

Si l'on *compose* ainsi deux substitutions linéaires, puis leur résultante

tante avec une troisième, puis cette nouvelle résultante avec une quatrième, etc., on aura la substitution résultant de la *composition* de toutes les substitutions données. Les coefficients de cette *résultante* sont des fonctions entières à coefficients entiers de ceux des substitutions que l'on a composées.

D'après ce qui a été dit tout à l'heure, *le déterminant de ces coefficients est égal au produit de tous les déterminants des substitutions simples.*

8. Quand le déterminant Δ' de la substitution (6) (c'est-à-dire celui de ses coefficients) ne s'évanouit pas, on peut assigner une substitution dont la composition, avec la première, donne la substitution identique

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x, \\ y = y, \\ \dots, \\ u = u, \\ v = v. \end{array} \right.$$

Il suffit évidemment, pour cela, de résoudre les formules (6) par rapport à x', y', \dots, u', v' . On trouve ainsi, en appelant $'\alpha_1, \dots$, les mineurs complémentaires des éléments α_1, \dots , de Δ'

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{'\alpha_1}{\Delta'} x + \frac{'\alpha_2}{\Delta'} y + \dots, \\ y' = \frac{'\beta_1}{\Delta'} x + \frac{'\beta_2}{\Delta'} y + \dots, \\ \dots \end{array} \right.$$

Cette substitution se nomme l'*inverse* de la substitution (6) et son déterminant est égal à $\frac{1}{\Delta'}$, inverse arithmétique de Δ' , puisque le produit de ces deux déterminants est égal à 1, déterminant de la substitution identique (7) résultante des deux substitutions inverses dont il s'agit.

9. *Si les coefficients des formes (2) et de la substitution (6) sont tous des entiers (positifs, nuls ou négatifs), cas auquel les déterminants de ce système de formes sont aussi des entiers, tout diviseur commun de ces*

Dans cette nouvelle forme φ' , tous les coefficients sont entiers : ceux nuls sont en même nombre au moins que dans φ ; l'un de ces coefficients, j , ne s'évanouit certainement pas ; tous les autres qui peuvent être dans le même cas ont pour plus grand commun diviseur d (n° 10), et, sauf j , ils sont, en vertu des inégalités (12), numériquement inférieurs aux coefficients de φ représentés par les mêmes lettres sans accent.

En traitant φ' comme φ , puis la forme résultante φ'' comme φ' , et ainsi de suite, on obtient, par des substitutions entières de déterminants tous $= 1$, une suite indéfinie de formes à coefficients entiers

$$\varphi, \varphi', \varphi'', \varphi''', \dots,$$

dont chacune jouit de cette propriété d'avoir un coefficient différent de zéro égal au correspondant de la précédente, d'avoir les autres nuls ou numériquement inférieurs aux correspondants de la précédente, et dans toutes lesquelles le plus grand commun diviseur des coefficients reste invariablement égal à d . Donc, comme tout entier qui décroît numériquement sans cesse finit par atteindre la valeur zéro, il arrivera un moment où, dans toutes les formes subséquentes, tous les coefficients s'évanouiront, sauf celui d'une certaine indéterminée, qui restera nécessairement égal à $\pm d$.

En appelant Φ la première de ces formes et (S) la substitution résultante de toutes celles qui auront permis de transformer φ en φ' , φ' en φ'' , ..., ... en Φ , (S) aura des coefficients entiers de déterminant $= 1$ (n° 7), et cette substitution unique (S) transformera φ en une forme Φ , dans laquelle le coefficient d'une certaine indéterminée se réduit à $\pm d$ et tous les autres à zéro.

Maintenant la forme $\frac{\Phi}{d}$, résultant de la multiplication de Φ par le multiplicateur $\frac{1}{d}$, n'offrira plus qu'un seul coefficient différent de zéro et égal à ± 1 .

II. *Si notre proposition est vraie pour un système de $M - 1$ formes, elle l'est aussi pour un système de $M (\leq n)$ formes.*

Pour éviter des notations trop compliquées, nous ferons la démon-

dont les déterminants $0, 0, \dots, 0, \pm c', \pm \dots, \pm i', \pm j'$ ont évidemment (nos 4, 10) pour plus grand commun diviseur le produit par $\frac{1}{d_{1,2}}$, déterminant du tableau (15), du plus grand commun diviseur d des déterminants du système (13), c'est-à-dire l'entier $d_3 = \frac{d}{d_{1,2}}$.

En multipliant ensuite le système (16) par le tableau

$$(17) \quad \begin{cases} 1, 0, \mp a', \\ 0, 1, \mp b', \\ 0, 0, 1, \end{cases}$$

de déterminant 1, on obtient le système

$$(18) \quad \begin{cases} \varphi_1'' = \pm x' + 0.y' + 0.z' + \dots + 0.u' + 0.v', \\ \varphi_2'' = 0.x' \pm y' + 0.z' + \dots + 0.u' + 0.v', \\ \varphi_3'' = 0.x' + 0.y' + c'.z' + \dots + i'.u' + j'.v', \end{cases}$$

dont les déterminants $0, 0, \dots, 0, \pm c', \pm \dots, \pm i', \pm j'$ ont toujours d_3 pour plus grand commun diviseur.

Soit enfin (S'') la substitution de déterminant 1, au moyen de laquelle on peut (I) réduire à $\pm d_3$ l'un des coefficients de la forme transformée de φ_3'' , celui de z'' par exemple, et tous les autres à zéro. Il est évident que le système (18), transformé par (S'') et multiplié par le tableau

$$(19) \quad \begin{cases} 1, 0, 0, \\ 0, 1, 0, \\ 0, 0, \frac{1}{d_3}, \end{cases}$$

de déterminant $\frac{1}{d_3}$, prendra la forme voulue

$$\begin{aligned} \pm x'' + 0.y'' + 0.z'' + \dots + 0.u'' + 0.v'', \\ 0.x'' \pm y'' + 0.z'' + \dots + 0.u'' + 0.v'', \\ 0.x'' + 0.y'' \pm z'' + \dots + 0.u'' + 0.v''. \end{aligned}$$

Cela posé, en composant, d'une part, les tableaux (15), (17), (19); d'autre part (n° 11), les substitutions (S'), (S''), on obtiendra bien le tableau unique de multiplicateurs de déterminant $\frac{1}{d_{1,2}} \cdot 1 \cdot \frac{1}{d_3} = \frac{1}{d}$ et la

substitution unique de déterminant $1.1 = 1$, dont il s'agissait d'établir l'existence.

III. *La proposition est donc générale, puisqu'elle a été établie pour $m = 1$. Notre raisonnement fournit en même temps le moyen de calculer les multiplicateurs et la substitution définis dans l'énoncé.*

13. *Pour que les équations (1) admettent des solutions entières, il est nécessaire et suffisant que les déterminants des formes linéaires*

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + \dots + g_1 s + h_1 t + \dots + i_1 u + j_1 v, \\ \varphi_2 = \dots, \\ \dots, \\ \varphi_m = a_m x + b_m y + c_m z + \dots + g_m s + h_m t + \dots + i_m u + j_m v, \end{array} \right.$$

auxquelles leurs premiers membres se réduisent par la suppression des termes connus k_1, k_2, \dots, k_m , aient pour plus grand commun diviseur un nombre d divisant tous les déterminants d'ordre m , dans lesquels se changent ces premiers déterminants, quand on remplace une quelconque de leurs colonnes par la suite k_1, k_2, \dots, k_m .

Et, quand ainsi ces équations sont possibles en nombres entiers, leurs systèmes de solutions sont donnés, une seule fois chacun, par des formules telles que

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \xi + x_1 \theta_1 + x_2 \theta_2 + \dots + x_{n-m} \theta_{n-m}, \\ y = \eta + y_1 \theta_1 + y_2 \theta_2 + \dots + y_{n-m} \theta_{n-m}, \\ \dots, \\ v = \psi + v_1 \theta_1 + v_2 \theta_2 + \dots + v_{n-m} \theta_{n-m}, \end{array} \right.$$

où toutes les lettres désignent des entiers jouissant des propriétés suivantes :

- 1^o Les $n - m$ nombres $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-m}$ sont absolument indéterminés;
- 2^o Les nombres ξ, η, \dots, ψ constituent un système particulier de solutions des équations (1);
- 3^o Les coefficients d'une même indéterminée θ satisfont aux équations homogènes, auxquelles se réduisent les équations (1), par la suppression des termes k_1, k_2, \dots, k_m ;
- 4^o Enfin, en nommant $(xy\dots s)$ le déterminant d'ordre $n - m$ formé par les $n - m$ lignes de ces coefficients où ne figurent pas les

m lettres x, y, \dots, s et $(ab\dots g)$ le déterminant des coefficients de x, y, \dots, s dans les équations (1), les déterminants $(xy\dots s)$ ont 1 pour plus grand commun diviseur et sont liés à leurs homologues ci-dessus définis par des relations de la forme

$$(22) \quad (xy\dots s) = \frac{(ab\dots g)}{d}.$$

La condition posée est nécessaire, car si,

$$\nabla = \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 & \dots & g_1 \\ k_2 & b_2 & c_2 & \dots & g_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_m & b_m & c_m & \dots & g_m \end{vmatrix}$$

étant un déterminant d'ordre m formé avec la colonne k_1, k_2, \dots, k_m et $m - 1$ colonnes de coefficients des inconnues, on appelle $'k_1, 'k_2, \dots, 'k_m$ les mineurs respectivement complémentaires aux éléments k_1, k_2, \dots, k_m , les équations proposées entraînent l'équation

$$(23) \quad 'k_1\varphi_1 + 'k_2\varphi_2 + \dots + 'k_m\varphi_m = -\nabla.$$

Or le premier membre de cette équation, se réduisant évidemment à la somme des produits des inconnues par quelques déterminants des formes (20), est nécessairement divisible par d ; d'où la même nécessité pour ∇ égal au signe près à ce premier membre, en vertu de l'équation (23).

Supposons donc cette condition remplie, et soient

$$(24) \quad \begin{cases} \lambda_1, \mu_1, \dots, \varpi_1, \\ \lambda_2, \mu_2, \dots, \varpi_2, \\ \dots, \dots, \dots, \dots, \\ \lambda_m, \mu_m, \dots, \varpi_m, \end{cases}$$

puis

$$(25) \quad \begin{cases} x = \alpha'_1 x' + \beta'_1 y' + \dots + \iota'_1 u' + \upsilon'_1 v', \\ \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \\ v = \alpha'_n x' + \beta'_n y' + \dots + \iota'_n u' + \upsilon'_n v' \end{cases}$$

les multiplicateurs et la substitution, de déterminants $\frac{1}{d}$, 1 respectivement, qui permettent (n° 12) de transformer les formes (20) en

Maintenant toutes les solutions entières des équations (1) donnent des solutions entières des équations (27), car ces dernières sont entraînées par les premières, et si x, y, \dots, v sont des nombres entiers, x', y', \dots, v' , liés à eux par la substitution inverse de (25) et à coefficients entiers (n° 10)

$$(28) \quad \begin{cases} x' = 'a_1 x + 'a_2 y + \dots + 'a_n v, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ v' = 'v_1 x + 'v_2 y + \dots + 'v_n v, \end{cases}$$

sont aussi des entiers.

Réciproquement, toutes les solutions entières des équations (27) donnent par les formules (25) des valeurs entières de x, y, \dots, u, v , satisfaisant aux équations (1); car, par la substitution inverse (28), accompagnée d'une multiplication par le tableau

$$(29) \quad \begin{cases} ' \lambda_1 d, ' \lambda_2 d, \dots, ' \lambda_m d, \\ ' \mu_1 d, ' \mu_2 d, \dots, ' \mu_m d, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ ' \varpi_1 d, ' \varpi_2 d, \dots, ' \varpi_m d, \end{cases}$$

où λ_1, \dots sont les mineurs complémentaires des éléments λ_1, \dots du tableau (24) dans leur déterminant, on retombe évidemment sur les premiers membres des équations (1).

Ainsi les systèmes d'équations (1) et (27) sont absolument équivalents. Or les seules solutions entières du second sont

$$\begin{aligned} x' &= \pm k'_1, \\ y' &= \pm k'_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ s' &= \pm k'_m, \end{aligned}$$

les $n - m$ autres inconnues t', \dots, u', v' à coefficients tous nuls, restant tout à fait indéterminées. Si donc, les représentant par $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-m}$, on les porte avec les valeurs ci-dessus trouvées pour x', y', \dots, s' dans la substitution (25), cette substitution donne, pour la résolution générale des équations (1), des formules identiques à (21), sauf la notation.

Les quantités $\xi, \eta, \zeta, \dots, \psi$ correspondent aux valeurs

$$\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_{n-m} = 0;$$

donc ce sont des solutions des équations proposées.

des indéterminées $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-m}$, c'est-à-dire de t', \dots, u', v' , appartiennent à des systèmes évidemment distincts de solutions des équations (27). Ce dernier point s'aperçoit encore facilement *a posteriori*.

14. *De quelque manière qu'on les ait obtenus, si les nombres ξ, η, \dots, ψ et $x_1, \dots, x_{n-m}, y_1, \dots, y_{n-m}$ jouissent seulement des propriétés 2° et 4° de l'énoncé du numéro précédent, les formules (21) donneront toujours, et une seule fois chacun, tous les systèmes de solutions des équations (1). Mais un groupe de formules qui aurait été construit dans d'autres conditions ne fournirait pas toutes les solutions de nos équations ou les fournirait plusieurs fois.*

Cette proposition, dont je supprime la démonstration pour abréger, peut, on le conçoit, faciliter, dans certains cas, la résolution générale des équations (1). On peut encore, comme s'il s'agissait d'équations simultanées quelconques, varier cette résolution de bien des manières : par exemple, résoudre généralement l'une des équations proposées, s'il est facile de le faire; porter ses solutions dans les autres, dont on résoudra le système par rapport aux indéterminées θ contenues dans les solutions de la première, etc.

15. On remarquera que le calcul et la composition des substitutions de déterminant 1, à l'aide desquelles on peut transformer la forme φ du n° 12 (I) en la forme Φ ayant un coefficient numériquement égal au plus grand commun diviseur de ceux de φ et tous ses autres nuls, est une généralisation du procédé d'Euler et de celui de Lagrange par les fractions continues, pour résoudre une seule équation à deux inconnues. Enfin cet algorithme donne évidemment une méthode systématique pour résoudre ces deux problèmes, dont le second joue un grand rôle dans la théorie des nombres : *Des entiers quelconques étant donnés, trouver leur plus grand commun diviseur, et assigner d'autres nombres qui, multipliés par eux, donnent des produits ayant précisément pour somme ce plus grand commun diviseur.*